2000年考研辅导教材

（数学分册）

［经济类］

编　写　考研命题研究组
编　著　北京大学　田茂英
总策划　胡东华

科学技术文献出版社

最后冲刺

2000年
硕士研究生入学考试

1 V

2000年
硕士研究生入学考试
最后冲刺（数学分册）

[经济类]

编　写：考研命题研究组
编　著：北京大学田茂英

科学技术文献出版社
Scientific and Technical Documents Publishing House
北　京

图书在版编目(CIP)数据

2000年硕士研究生入学考试最后冲刺:数学:经济类/田茂英主编.
-北京:科学技术文献出版社,1999.9
ISBN 7-5023-3310-X

Ⅰ.20… Ⅱ.田… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-试题
Ⅳ.G643

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第17007号

出 版 者:科学技术文献出版社
图 书 发 行 部:北京市复兴路15号(公主坟)中国科学技术信息研究所大楼B段/100038
图 书 编 务 部:北京市西苑南一院8号楼(颐和园西苑公汽站)/100091
邮 购 部 电 话:(010)68515544-2953
图书编务部电话:(010)62878310,(010)62877791,(010)62877789
图书发行部电话:(010)68515544-2945,(010)68514035,(010)68514009
门 市 部 电 话:(010)68515544-2172
图书发行部传真:(010)68514035
图书编务部传真:(010)62878317
E-mail:stdph@istic.ac.cn
策 划 编 辑:胡东华
责 任 编 辑:葛 斌
责 任 校 对:葛 斌
封 面 设 计:胡东华
发 行 者:科学技术文献出版社发行 新华书店总店北京发行所经销
印 刷 者:北京市通县蓝华印刷厂
版 (印) 次:1999年8月第1版 1999年8月第1次印刷
开 本:787×1092 1/16
字 数:499千字
印 张:15.8
定 价:20.00元

前　言

去年出版的经济类数学最后冲刺(数学模拟试题)受到了广大读者的欢迎。应广大读者的要求,也是为了与已出版的《2000年硕士研究生入学考试应试教程》(数学分册)[理工类]相配合,并依据全国经济学硕士研究生入学考试数学大纲,在原冲刺的基础上,今年再次修订出版。此次出版作了较大的改动。主要是:将数学三、数学四的模拟试题分开,不再编放在一起;另一方面是通过精心选编,数学三、数学四又各自增加了三套模拟试题,即数学三、四都由原来的九套题增至十二套题。其他部分也根据大纲作了相应改动。这样,更便于不同的考生选用,也有利于广大读者阅读。

考试大纲规定,经济类考生分为数学三、数学四(试卷三、试卷四)两种试卷。各种试卷所适用的专业及考试内容等,可见各种试卷(模拟试题)前的说明,或参见考试大纲。虽然数学三、数学四的试卷有部分试题相同,但由于数学三、数学四的各套试卷相互独立,因此,广大读者可根据实际需要或通读全书,或选择部分阅读。

该模拟试题是按正规的考试试卷编写的。试题所涉及的数学知识点覆盖了数学考试大纲的要求。对选择题和填空题给出了答案,有些较难的题还给出了提示,对计算题和证明题作了详细解答。所有这些都有利于实践,也便于培养和强化考生的解题应试能力。通过模拟测练可以发现薄弱环节,及时查漏补缺。

本书不仅是经济类研究生入学考试者的复习用书,也可作为经济类院校的在校生、电大夜大学生的参考书,亦适合自学者阅读。

由于水平有限,书中难免有谬误,请广大读者赐教。

目　　录

第二部分　数学四(试卷四)

第一部分　数学三(试卷三)

数学三的说明

数学三

一、适用的专业

国民经济计划与管理(含经济系统分析)、工业经济、工业企业管理(含企业财务管理)、统计学、数量经济学、技术经济学、运输经济(附邮电经济)、经济地理、信息经济,以及对数学要求较高的人口经济学、保险学专业。

二、考试内容

1. 微积分:(1) 函数、极限、连续;(2) 一元函数微分学;(3) 一元函数积分学;(4) 多元函数微积分;(5) 无穷级数;(6) 常微分方程与差分方程。

2. 线性代数:(1) 行列式;(2) 矩阵;(3) 向量;(4) 线性方程组;(5) 矩阵的特征值和特征向量;(6) 二次型。

3. 概率论与数理统计:(1) 随机事件和概率;(2) 随机变量及其概率分布;(3) 随机变量的数字特征;(4) 大数定律和中心极限定理;(5) 数理统计的基本概念;(6) 参数估计;(7) 假设检验。

三、试卷结构

1. 内容比例

(1) 微积分　约 50%;

(2) 线性代数　约 25%;

(3) 概率论与数理统计　约 25%。

2. 题型比例

(1) 填空题与选择题　约 30%;

(2) 解答题(包括证明题) 约 70%。

第一套模拟试题

一、填空题(本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分。把答案填在题后横线上)

(1) 差分方程 $4y_{t+1}+8y_t-t(-2)^{t+2}=0$ 的通解为 $y=C(-2)^t+(-\frac{t^2}{2}+\frac{t}{2})(-2)^t$

(2) 设 $z=\frac{y\ln x}{\sqrt[x]{y}}$，则 $\frac{\partial z}{\partial y}=$ $\frac{x-1}{x}\ln x\, y^{-\frac{1}{x}}$

(3) 设 A 为 n 阶实方阵，且 $[AA^T]^2X=0$，则 $[AA^T]X=$ 0；其中 A^T 为矩阵 A 的转置；

(4) 在 R^3 中给定两个向量组 $\varepsilon_1=(1,0,-1)^T,\varepsilon_2=(2,1,1)^T,\varepsilon_3=(1,1,1)^T$ 与 $\eta_1=(-1,0,0)^T,\eta_2=(-3,-1,-2)^T,\eta_3=(-1,0,-1)^T$。设 $A=(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3),B=(\eta_1\eta_2\eta_3)$。如果矩阵 $A=BC$，则 $C^{-1}=$ $\begin{bmatrix}-\frac{2}{5} & -\frac{3}{10} & \frac{1}{10}\\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}$

(5) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N\left(\frac{1}{\sqrt{10}},(\frac{1}{\sqrt{7}})^2\right),Y\sim N\left(\frac{1}{2},(\frac{1}{\sqrt{7}})^2\right)$，则 $D(|\sqrt{5}X-\sqrt{2}Y|)=$ 1。

二、选择题(本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分。每小题的选项中，只有一项符合要求，把所选项前的字母填在题后括号内)

(1) 设 $y=f(x)$ 在 x_0 处可微。$f(x)$ 过点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线上的纵坐标与函数相应点处的纵坐标之差必然(C)

(A) 都是比 Δx 的高阶无穷小；　　(B) 都是与 Δx 的等价无穷小；

(C) 都是与 Δx 的同阶无穷小；　　(D) 不能确定。

(2) 设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上有原函数 $F(x)$，则必有(C)

(A) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积；

(B) 对任意 $x\in(a,b)$，$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 (a,b) 内有连续导函数；

(C) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$；

(D) 对任意常数 $\alpha(>a),\beta(<b)$，函数 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有界，那么 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续。

(3) 设 n 阶方阵 A 为实对称矩阵，且 $A^2=A$，则(C)

(A) A 必是满秩的；　　(B) A 的特征值只能是 1；

(C)A 的特征值只能是 0 或 1；　　　　　　(D)(A),(B),(C) 全都不对。

(4) 设 X 服从参数$\lambda > 0$ 的指数分布。令 $Y = aX + \frac{6}{\lambda}(a > 0)$，若行列式

$$\begin{vmatrix} E(X) & E(Y) \\ D(X) & D(Y) \end{vmatrix} = \int_{-b}^{b} \frac{\arctan x}{1 + x^2}\mathrm{d}x,$$ 其中 b 为实常数。则 a = (3)

(A)1;　　　　　(B) -1;　　=0　　(C)0;　　　　　(D)2

(5) 设 X 为连续型随机变量，则下列结论不成立的是(　　)

(A) 若 $f(x)$ 为 X 的概率密度，那么任意改变有限个点处 $f(x)$ 的值有限，X 的概率分布不变；

(B)X 的概率密度函数不一定是连续函数；

(C) 在任一指定实数值 α 处的概率都是零；而对离散型随机变量，在任一指定实数 β 处的概率都不是零；

(D) 对任意两实数 $a, b(a < b)$。那么，在区间(a, b)，$[a, b]$ 或$(a, b]$ 上的概率值都相等。

三、(本题 6 分)

由曲线 $y = 4x^2(x \geqslant 0)$，$x + y = \frac{3}{2}$ 与 x 轴围成的第一象限部分绕 y 轴旋转一周。求

(1) 旋转体的体积 V；

(2) 旋转体的侧面积 S。

四、(本题 6 分)

求函数 $u = f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y$ 在由 $x = 0, y = 0$ 及 $y + x = 2$ 所围成的平面区域上的最大、最小值。

五、(本题 6 分)

设某种商品的需求量 D 与供给量 Q 都是价格 $P(t)$ 的函数 $D = a - bP(t)$，$Q = cP(t) - d$，其中 a, b, c, d 都是正常数。如果在时间 t 价格的变化率与当时的价格$P(t)$及过剩需求量的乘积成正比，且 $t = 0$ 时，$P(0) = \frac{a + d}{b + c + 1}$。求价格 $P(t)$。

六、(本题 5 分)

设函数 $f(x,y)$ 连续，且满足 $f(x,y)=|x|e^y-x\cos(xy)+\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由曲线 $y=|x|$ 及 $y=x^2$ 围成的平面有界区域。求 $f(x,y)$。

七、(本题 9 分)

设当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，有 $a'_n(x)\cdot\sec x=2\sin x+3\sin^2x+\cdots+(n+1)\sin^n x$。试讨论：

(1) 序列 $\{a_n\}$ 的收敛性，其中 $a_n=a_n(1)$；

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}a_n}$ 的收敛性，其中 β 为任意实常数。

八、(本题 8 分)

设三阶实对称矩阵 A 的三个特征值之积为 -1，其中有一个重特征值，而余下的一个特征值 λ_1 与一个重特征值的和为零，对应于 λ_1 的特征向量为 $\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，求矩阵 A。

九、(本题 8 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$（$A$ 为有限值）。证明在 $(-\infty,+\infty)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $\frac{-\xi}{(1+\xi^2)^{3/2}}=f'(\xi)$。

十、(本题 8 分)

设 A,B 都是 n 阶方阵，且有自然数 m，使得 $A^m=0$。如果存在可逆矩阵 C，同时使得 $C^{-1}AC$ 与 $C^{-1}BC$ 都为下三角阵。证明行列式 $|A+B|=|B|$。

十一、(本题 9 分)

设随机变量(X, Y)在区域G上服从均匀分布，其中G是由曲线$y = x^3$及$y = \sqrt{x}$围成的有界区域。求：

(1)(X, Y)的联合概率密度$f(x, y)$及边缘概率密度；

(2)$\xi = X + Y$及$\eta = 5Y^2$的均值。

十二、(本题 7 分)

某高校新生入学检查身体。设体重服从正态分布。今从中任意取出 25 名新生的体重，算得平均重量为 59 公斤，标准差为 2.3 公斤。在显著性水平$\alpha = 0.05$下

(1) 是否可以认为新生平均体重为 60 公斤？

(2) 若要求体重的标准差不得超过 2 公斤，问新生体重的方差是否显著偏大？

附表一：t 分布表

$P\{t(n) > t_\alpha(n)\} = \alpha$

$t_\alpha(n)$ \ α / n	0.05	0.10
24	2.064	1.711
25	2.060	1.708

附表二：x^2 分布表

$P\{x^2(n) > x_\alpha^2(n)\} = \alpha$

$x_\alpha^2(n)$ \ α / n	0.025	0.05
24	39.364	36.415
25	40.646	37.652

第一套模拟试题参考解答

一、(1)$C(-2)^t+\frac{t}{4}(1-t)(-2)^t$，$C$ 为任意常数；

(2) $\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt[x]{y}}[1+\ln x\cdot\ln y]$；

(3)0；

(4) $\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & -3 & -2\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$；

(5)$1-\frac{2}{\pi}$。

二、(1)(A)；(2)(D)；(3)(C)；(4)(D)；(5)(C)。

三、解　先求交点(见图 1-1-1)

$$\begin{cases}y=4x^2\\ x+y=\frac{3}{2}\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=\frac{1}{2},\\ y=1,\end{cases}$

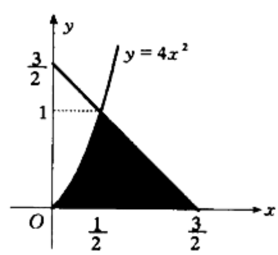

图 1-1-1

$$(1)\ V=\pi\int_0^1\left\{\left(\frac{3}{2}-y\right)^2-\frac{y}{4}\right\}dy$$

$$=\pi\left\{\frac{9y}{4}-\frac{3}{2}y^2+\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{8}\right\}\Big|_0^1$$

$$=\frac{23\pi}{24};$$

(2) 由 $x=\frac{\sqrt{y}}{2}$ 得 $x'_y=\frac{1}{4\sqrt{y}}$，故 $\sqrt{1+(x')^2}=\sqrt{1+\frac{1}{16y}}$，于是所求侧面积为

$$S=2\pi\left\{\int_0^1 x\sqrt{1+(x')^2}dy+\int_0^1 x\sqrt{2}dy\right\}$$

$$=2\pi\int_0^1\left\{\frac{\sqrt{y}}{2}\sqrt{1+\frac{1}{16y}}+\sqrt{2}\left(\frac{3}{2}-y\right)\right\}dy$$

$$=2\pi\int_0^1\left\{\frac{1}{8}\sqrt{16y+1}+\frac{3\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}y\right\}dy$$

$$=\pi\left(\frac{1}{6}+2\sqrt{2}\right)$$

四、解 由

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 1 = 0 \\ f'_y = 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

又 $A = f''_{x^2}(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = 2 > 0, B = f''_{xy}(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = 0, C = f''_{y^2}(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = 2 > 0$

故 $AC - B^2 = 4 > 0$，于是 u 在点$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$处取极小值

$u = f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$

下面考查边界上的情况：

(1) 在 $x + y = 2$ 上，将 $y = 2 - x$ 代数u 得

$u = x^2 + (2 - x)^2 - x - 2 + x = 2x^2 - 4x + 2, x \in [0,2]$，由 $u' = 4x - 4 = 0$，解得唯一驻点 $x = 1$，而 $u'' = 4 > 0$，故在 $x = 1$ 处取极小值 $u = 0$。在端点 $x = 0$ 处，有 $u = 2$，在端点 $x = 2$ 处，$u = 2$；

(2) 在线段 $x = 0$ 上

$$u = f(0,y) = y^2 - y, y \in [0,2]$$

由 $f'_y(0,y) = 2y - 1 = 0$ 解得 $y = \frac{1}{2}$。此时函数值为

$$u = f(0,\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$$

在端点 $y = 0$ 处，$u = f(0,0) = 0$；在 $y = 2$ 处，$u = f(0,2) = 2$；

(3) 在 $y = 0$ 上，

$$u = f(x,0) = x^2 - x, x \in [0,2]$$

同理得　当 $x = \frac{1}{2}$ 时，有

$$u = f(\frac{1}{2},0) = -\frac{1}{4}$$

在端点 $x = 0$ 时，$u = f(0,0) = 0$；$x = 2$ 时，$u = f(2,0) = 2$

比较以上各种情况得函数的最大值为

$$u = f(0,2) = f(2,0) = 2$$

最小值为　$u = f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$

五、解 由题设条件知

$$\frac{dP}{dt} = kP[D - Q]$$

其中 k 为比例常数。将 D, Q 的表达式代入上式，得

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=-k(b+c)P^2+k(a+d)P$$

即

$$P^{-2}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}-k(a+d)P^{-1}=-k(b+c)$$

于是

$$-\frac{\mathrm{d}P^{-1}}{\mathrm{d}t}-k(a+d)P^{-1}=-k(b+c)$$

令 $z=P^{-1}$，则有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+k(a+d)z=k(b+c)$$

这是一阶线性方程，于是

$$\begin{aligned}z=P^{-1}&=\mathrm{e}^{-\int k(a+d)\mathrm{d}t}\left[C+k(b+c)\int \mathrm{e}^{\int k(a+d)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right]\\&=\mathrm{e}^{-k(a+d)t}\left[C+\frac{b+c}{a+d}\mathrm{e}^{k(a+d)t}\right]\\&=C\mathrm{e}^{-k(a+d)t}+\frac{b+c}{a+d}=\frac{C(a+d)\mathrm{e}^{-k(a+d)t}+b+c}{a+d},\end{aligned}$$

从而

$$P=\frac{a+d}{C(a+d)\mathrm{e}^{-k(a+d)t}+b+c}$$

利用条件 $P(0)=\frac{a+d}{b+c+1}$，得 $C=\frac{1}{a+d}$。因此，所求

$$P(t)=\frac{a+d}{b+c+\mathrm{e}^{-k(a+d)t}}$$

六、解　令

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=C\text{（区域 }D\text{ 见图 1-1-2）}$$

则

$$f(x,y)=|x|\mathrm{e}^y-x\cos(xy)+C \qquad (1.1)$$

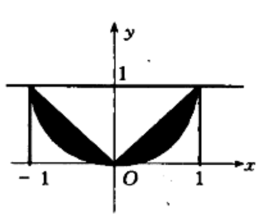

图 1-1-2

将此代入上面的二重积分中，并注意到 $x\cos(xy)$ 是 x 的奇函数，且积分区域 D 关于 y 轴对称，故

$$\iint\limits_D x\cos(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

又 $|x|\mathrm{e}^y$，C 关于 x 是偶函数，且由 D 的对称性知，只要计算第一象限的积分再 2 倍，得

$$C=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\mathrm{e}^y\mathrm{d}y+2C\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^1 x[\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{x^2}]\mathrm{d}x+2C\int_0^1(x-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=2[x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}]\Big|_0^1+\frac{C}{3}$$

$$=3-\mathrm{e}+\frac{C}{3}$$

于是

$$C=\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{e}$$

将 C 的值代人(1.1) 式,得

$$f(x,y)=|x|\mathrm{e}^y-x\cos(xy)+\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{e}$$

七、解

$$(1)a_n=\int_0^1[2\sin x+3\sin^2x+\cdots+(n+1)\sin^n x]\frac{\mathrm{d}x}{\sec x}$$

$$=\int_0^1[2\sin x+3\sin^2x+\cdots+(n+1)\sin^n x]\mathrm{d}(\sin x)$$

$$=\sin^2 1+\sin^3 1+\cdots+\sin^{n+1}1$$

$$=\sin^2 1\times\frac{1-\sin^n 1}{1-\sin 1}$$

显然,a_n 对 n 单调递增,且

$$0<\sin^2 1\leqslant a_n<\frac{\sin^2 1}{1-\sin 1}$$

即有界。因此,序列$\{a_n\}$ 收敛。

(2) 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}a_n}=\frac{1-\sin 1}{\sin^2 1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}(1-\sin^n 1)}$$

令

$$b_n=\frac{1}{n^{\beta}(1-\sin^n 1)}$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}a_n}=\frac{1-\sin 1}{\sin^2 1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$$

且 $b_n>0$。故只要讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ 的收敛性。

(i) $|(-1)^{n-1}b_n|=b_n=\dfrac{1}{n^{\beta}(1-\sin^n 1)}$

因为

$$\frac{b_n}{n^{\beta}}=\frac{1}{1-\sin^n 1}\to 1(n\to\infty)$$

而当 $\beta>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\beta}}$ 收敛，所以依据比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，从而原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}a_n}$ 绝对收敛；

当 $\beta\leqslant 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\beta}}$ 发散，从而原级数不绝对收敛。

(ii) 当 $0<\beta\leqslant 1$ 时，b_n 随 n 单调递减且趋于 0，由莱布尼兹收敛定理知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ 条件收敛，从而原级数条件收敛。

(iii) 当 $\beta\leqslant 0$ 时，由于

$$b_n=\frac{1}{n^{\beta}(1-\sin^n 1)}\geqslant\frac{1}{1-\sin^n 1}\not\to 0(n\to\infty),$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ 发散，因此，原级数发散。

八、解　设重特征值为 $\lambda_2=\lambda_3$。由题设条件知 $\lambda_1+\lambda_2=0$，即 $\lambda_1=-\lambda_2$。从而有

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-\lambda_2^3=-1$$

解得 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$。

对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 有两个线性无关的特征向量。α_2,α_3，且 α_2,α_3 都与 α_1 正交。

设 $\alpha_2=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$，则 $\alpha'_2\alpha_1=0,\alpha'_3\alpha_1=0$，故可取

$$\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

显然，这样取的 α_2 也与 α_3 正交。

分别将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化得

$$\beta_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\beta_3=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

令

$$Q=(\beta_1\beta_2\beta_3)=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

则 Q 是正交矩阵，从而有 $Q^{-1}=Q'$，于是

$$Q'AQ=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\Lambda$$

因此，

$$\begin{aligned}A &= Q\Lambda Q'\\ &=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

九、证明：令

$$x=\tan t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

考虑函数

$$F(t)=\begin{cases}f(\tan t)-\cos t & ,t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\\ A & ,t=\pm\frac{\pi}{2},\end{cases}$$

则 $F(t)$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内可微，且

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}F(t)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A=F\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\lim_{t\to-\frac{\pi}{2}}F(t)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A=F\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

故 $F(t)$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上连续。由罗尔定理知至少存在 $t_0\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，使得

$$F'(t_0)=f'(\tan t_0)\frac{1}{\cos^2 t_0}+\sin t_0=0$$