中国科学院"十一五"规划教材

经·济·应·用·数·学·基·础·系·列

微积分

温田丁 主 编

马序昌 王玫 艾力 副主编

科学出版社

www.sciencep.com

中国科学院“十一五”规划教材·经济应用数学基础系列

微 积 分

主 编 温田丁

副主编 马序昌

王 玟

艾 力

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

微积分是培养大学生抽象思维能力的重要课程，是学生今后学习其他数学课程和专业课程的基础.本书根据教育部“经济类与管理类本科数学基础课程教学大纲及要求”以及考研大纲的基本要求编写而成.全书分为一元微积分学及其应用、多元微积分学及其应用、无穷级数、微分方程与差分方程四大知识板块，内容包括函数极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、多元微积分、无穷级数、微分方程与差分方程.

本书可用作全日制普通本科学校经济类和管理类各专业学生的教学用书，也可供其他专业学生及自学者使用，同时可作为考研学生备考的基础教材.

图书在版编目(CIP)数据

微积分/温田丁主编.—北京：科学出版社，2010.8
(中国科学院“十一五”规划教材·经济应用数学基础系列)
ISBN 978-7-03-028468-6

Ⅰ.①微… Ⅱ.①温… Ⅲ.①微积分-高等学校-教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 148806 号

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2010 年 8 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2010 年 8 月第一次印刷 印张：20 3/4
印数：1—11 000 字数：401 000

定价：29.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

总　序

随着科学技术的迅猛发展和经济建设的快速腾飞，数学与各门学科的联系变得更加紧密，在人类实践活动中的应用也更加广泛和深入. 不仅自然科学和工程技术离不开数学，财经科学、管理科学及其他社会科学同样离不开数学.

20 世纪 80 年代以来，我国高校按照教育部的要求，普遍为经济管理类各专业的本科学生开设了包括微积分、线性代数、概率论与数理统计等在内的经济应用数学基础课程. 在多年的经济数学教学实践中，曾经涌现出一批具有时代特色的优秀教材，这些教材对培养合格的财经管理人才发挥过重要作用. 近年来随着招生规模的不断扩大，我国已迅速进入高等教育的大众化时代. 新的时代呼唤经济数学教材的改革和创新. 如何为全日制经济类与管理类本科生编写一套既适合学生现状又兼顾考研需要、既传授数学思想又突出实际应用、既介绍经典理论又穿插现代理念、既适当研究解题技巧又学会使用数学软件的教材，是编者多年的夙愿，当然也是一件很有意义的事情.

基于上述想法，我们按照教育部"经济类与管理类本科数学基础课程教学大纲及要求"，深入研究了国内外经济数学教育教学改革动态，借鉴了许多优秀教材的内容结构和处理方法，并结合编者长期从事经济数学教学的经验体会编写了这套系列教材，包括《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《经济与金融分析数学基础》，共四册.

本系列教材的前三册(《微积分》,《线性代数》,《概率论与数理统计》)的读者对象是经济类和管理类的一、二年级本科生. 上述教材在编写思想、结构安排、内容取舍、教学方法等方面做了一些新的尝试，其共同特点如下：

(1) 努力体现分层次教学的思想. 针对不同层次学生的学习要求，对教学内容和课后习题两个方面进行了处理. 将内容分为必学内容和选学内容(加 * 号区分)，习题依照难易程度划分为(A)、(B)两组. 教材综合考虑了财经类各专业学习该课程和后续课程的需要、报考研究生的需要以及将来从事有关实际工作的需要. 文字叙述上尽量为初学者着想，对基本概念和证明思路的叙述力求准确和富有启发性.

(2) 突出数学的经济应用. 教材引入了简单的经济(管理)应用模型，目的在于加强对学生数学应用能力的培养，引导学生学以致用，提高学生学习经济数学的兴趣. 例如《微积分》中介绍了常用的边际分析与弹性分析等经济学经典模型，《线性代数》中介绍了投入产出分析等线性模型，《概率论与数理统计》中介绍了彩票模型及报童问题等随机模型.

(3) 穿插数学建模的思想和方法,尝试使课程内容与数学软件使用有机结合.书中运用 Mathematica 5.0 编排了若干数学实验,由此也就适当弱化了对某些复杂计算技巧的介绍.

本系列教材的第四册(《经济与金融分析数学基础》)内容是前三册数学基础知识的自然延伸、提高和综合应用,读者对象为经济类、管理类、统计类、应用数学类高年级本科生及研究生.该书在内容取舍、体系结构安排及写作风格上都做了新的尝试,突出经济(金融)分析中实际问题的需要,重点放在如何运用数学的语言及模型反映经济(金融)分析及管理理论与实践中所面临的问题,而不刻意强调数学本身的系统性和严谨性.

本系列教材集中了众多专家学者及一线教师的智慧和力量,王春福主任,李鹏奇副编审以及科学出版社的许多朋友为本套书的出版付出了辛勤劳动,在此一并表示感谢.

限于编者的知识水平,书中不当之处在所难免,敬请读者批评指正.

丛书编委会

2010 年 6 月

前　言

微积分是培养大学生抽象思维能力的重要课程，是学生今后学习其他数学课程和专业课程的基础. 为全日制经济类与管理类本科生编写一本知识体系完整、内容叙述简明扼要、突出方法和技巧的讲授、把培养和提升学生的数学素养与数学应用能力相结合的教材，是编者多年的夙愿. 我们想通过教材的内容、方法、例题与习题，使学生感受到微积分的魅力，学习到微积分的思想精髓，在掌握微积分基本思想方法的基础上有效提升解题能力和应用能力.

基于以上想法，我们遵照教育部“经济类与管理类专业面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的精神、“经济类与管理类本科数学基础课程教学大纲及要求”以及考研大纲的基本要求编写了本书.

本书内容分为一元微积分学及其应用、多元微积分学及其应用、无穷级数、微分方程与差分方程四大知识板块.

本书的特点主要体现在以下几个方面：

(1) 内容选取适当，体系和结构合理，思路清晰，文字简练，兼顾经济类管理类后继专业课程对微积分知识的需要.

(2) 注重知识的系统性及前后内容的逻辑关系，叙述简明扼要，深入浅出，在引入概念时，尽可能从实际出发，通俗易懂，便于接受. 全书注重数学思维能力的培养，突出了解题方法和解题技巧的讲授，按循序渐进的原则增加难度，能适应分层次教学的需要.

(3) 在继承和保持经典微积分教材优点的同时，进行了一些改革和尝试. 一是介绍了许多实用的新方法和解题技巧，涵盖了考研真题中常见的方法和技巧. 二是内容与习题紧密结合，全书配置了数量较多的例题和习题. 习题分为(A)、(B)两类，(A)类是反映该课程基本要求的题目，(B)类是提升解题能力的综合性题目. 三是理论联系实际，突出了微积分在经济与管理上的应用. 书中介绍了常用的经济学函数、边际分析与弹性分析等基本内容和方法，加入了若干数学实验.

本书可用作全日制普通本科学校经济类和管理类各专业学生的教学用书，也可供其他专业的学生及自学者使用，同时可作为考研学生备考的基础教材. 书中加 * 的内容不作基本要求，可根据教学需要和学时安排取舍，这部分内容对准备考研的学生进一步提升能力和水平大有裨益.

本书第 1～2 章由马序昌编写，第 3 章和第 6 章由王玟编写，第 4～5 章由艾力编写，第 7～8 章由温田丁编写. 杨红伟参加了第 1～3 章的编写，刘文昱参加了第

4～5 章的编写，关凯参加了第 7～8 章的编写. 全书由温田丁负责总纂.

本书在编写过程中得到了许多同行专家的支持和帮助，李仁骏教授、杨霞副教授、徐全年副教授等阅读了本书初稿，并提出了宝贵的修改意见或建议，在此表示衷心的感谢.

本书在编写时参考了大量的中外教材和文献资料，选用了其中的某些内容和习题，在此向有关的作者表示感谢.

限于编者的学识水平，疏漏与不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正.

编　者

2010 年 6 月

目　　录

第1章　函数、极限与连续

微积分是以函数为研究对象，以极限理论为基础，以研究函数的连续性、可微性以及可积性为主要内容的数学课程. 函数、极限与连续是其最基本的概念，本章将从介绍函数，极限的概念、性质、运算入手，继而讨论函数的连续性.

1.1　函　　数

一、集合

1. 集合的概念

集合是数学中最基本的概念之一. 通常将具有某种属性的事物的全体，或一些确定对象的汇总称为集合. 组成这个集合的每一个事物称为该集合的元素. 通常用大写英文字母 $A,B,C,X,Y,\cdots$ 等表示集合，用小写英文字母 $a,b,c,x,y,\cdots$ 等表示集合的元素.

对于集合 A 及元素 a，两者的关系是确定的. 当 a 在 A 中时，记作 $a\in A$，读作 a 属于 A；当 a 不在 A 中时，记作 $a\notin A$，读作 a 不属于 A，两者必居其一.

含有有限个元素的集合称为有限集；含有无限个元素的集合称为无限集；不含任何元素的集合称为空集，用 $\varnothing$ 表示.

例如：

(1) 2009 年 10 月 1 日北京市出生的人构成的集合为有限集.

(2) 全体偶数构成的集合为无限集.

(3) 方程 $x^2+x+1=0$ 的实根构成的集合为空集.

2. 集合的表示

(1) 列举法：按任意顺序将集合中所有的元素不遗漏、不重复地列举出来，并用 $\{\}$ 括起来.

例 1　由 a,b,c,d 四个元素构成的集合 A 可表示为：$A=\{a,b,c,d\}$.

例 2　由方程 $x^2-5x+6=0$ 的根构成的集合 B 可表示为：$B=\{2,3\}$.

(2) 描述法：若 M 是具有某种特征的元素 x 的全体构成的集合，则可表示为

$$M=\{x\mid x\text{ 所具有的特征}\}.$$

例 3　由方程 $x^2-5x+6=0$ 的根构成的集合 B 还可表示为：

$$B=\{x \mid x^2-5x+6=0\}.$$

例 4　全体奇数的集合 M 可表示为：$M=\{x|x=2n+1, n \text{ 为整数}\}$.

3. 集合间的关系

设 A,B 是两个集合，若对任意的 $x\in A$，必有 $x\in B$，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$（读作 A 包含于 B）或 $B\supset A$（读作 B 包含 A）（如图 1-1）；

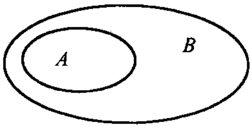

图 1-1

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

我们规定空集是任何一个集合的子集，即 $\varnothing\subset A$，其中 A 为任何集合.

由所研究的全体事物构成的集合称为全集，记作 Ω.

注意　全集是相对的，一个集合在某一条件下是全集，而在另一条件下就可能不是全集. 例如，当讨论的问题仅限于正整数时，全体正整数的集合 N^+ 为全集；当讨论的问题包括正整数和负整数时，全体正整数的集合 N^+ 就不再是全集.

本书今后用到的集合主要为数集，即元素为数的集合. 常用 **N** 表示自然数集；**Z** 表示整数集；**Q** 表示有理数集；**R** 表示实数集. 它们之间的关系为：$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

4. 集合的运算

设 A,B 是任意两个集合，它们之间的运算主要有以下几种：

(1) **并**　由 A 与 B 中所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的并集（简称并）. 记作 $A\cup B$（如图 1-2），即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

(2) **交**　由既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的交集（简称交）. 记作 $A\cap B$（如图 1-3），即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

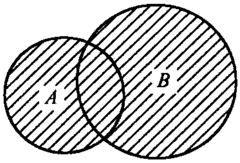

图 1-2

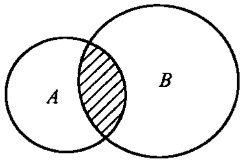

图 1-3

(3) **差**　由 A 中不属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的差集（简称差）. 记作 $A-B$（如图 1-4(a)，(b)），即 $A-B=\{x|x\in A \text{ 但 } x\notin B\}$.

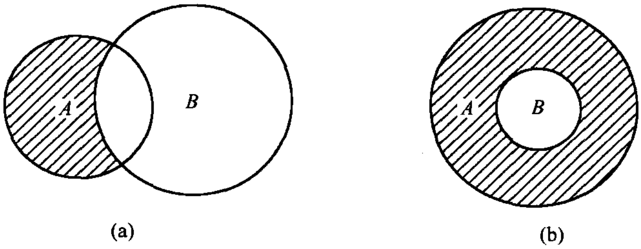

图 1-4

(4) **补**　由全集 Ω 中不属于 A 的所有元素组成的集合，称为 A 的补集(简称补). 记作 $\overline{A}$(如图 1-5)，即

$$\overline{A}=\{x \mid x\in\Omega \text{ 但 } x\notin A\}.$$

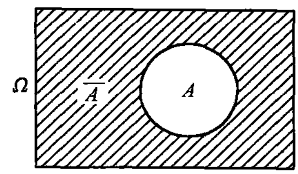

图 1-5

二、区间与邻域

在微积分中，用的最多的数集是区间与邻域，下面我们介绍如下：

1. 有限区间

设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，通常有如下定义与记法：

(1) 开区间 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$；

(2) 闭区间 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$；

(3) 半开半闭区间 $[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$.

以上区间称为有限区间，其中 a 与 b 称为区间的端点，a 为左端点，b 为右端点，两端点之间的距离 $b-a$ 称为区间的长度. 长度有限的区间称为有限区间.

2. 无限区间

引入记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大)，类似地可给出无限区间的定义和记法：

(1) $(a,+\infty)=\{x|x>a\}$；　　(2) $[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$；

(3) $(-\infty,b)=\{x|x<b\}$；　　(4) $(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$；

(5) $(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R}$.

注意　以后在不需要特别强调区间的开、闭性以及有限与无限性时，就简单地称其为区间，通常用字母 I 表示.

3. 邻域与去心邻域

设 $a,\delta\in\mathbf{R}$，且 $\delta>0$，则称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的 δ 邻域，记作 $N(a,\delta)$ 即

$$N(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

点 a 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径(如图 1-6).

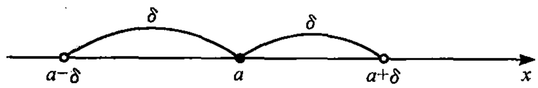

图 1-6

将邻域 $N(a,\delta)$的中心 a 点去掉,所得的邻域称为点 a 的去心 δ 邻域(如图 1-7),记作 $N^{\circ}(a,\delta)$,即

$$N^{\circ}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

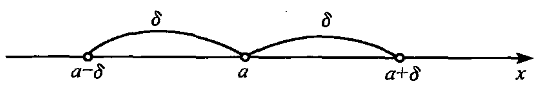

图 1-7

为表达方便,有时把开区间$(a-\delta,a)$称为点 a 的左 δ 邻域,把开区间$(a,a+\delta)$称为点 a 的右 δ 邻域.

注意 a 为中心的任何开区间均是点 a 的邻域,当不需要指明其半径时,可记作 $N(a)$.

三、函数的概念

1. 函数的定义

在许多自然现象或社会现象中,往往同时存在着多个不断变化的量(变量),且这些量并不是孤立变化的,而是相互影响、相互依赖并遵循一定规律相互作用的.变量之间的这种相互确定的依赖关系抽象出来就是函数的概念.下面我们给出一元函数的定义.

定义 1.1 设 x 与 y 是两个变量,D 是一个非空数集,如果对每个 $x\in D$,变量 y 依照某一法则 f 总有唯一确定的数值与之对应,则称 y 为 x 的函数,记作 $y=f(x),x\in D$.

其中,x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为这个函数的定义域,也记作 D_f,即 $D=D_f$.

根据定义,对某个取定的 $x_0\in D$,依照对应法则 f,总有确定的值 y_0 与之对应,这个值称为函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的函数值,记作 $f(x_0)$或 $y|_{x=x_0}=f(x_0)$.

全体函数值的集合称为函数的值域,记作 R_f 或 $f(D)$,即

$$R_f=f(D)=\{y \mid y=f(x),x\in D\}.$$

函数的定义域 D 和对应法则 f 是确定函数的两个要素.如果两个函数的定义

域与对应关系相同，则这两个函数相同. 至于自变量和因变量用什么字母表示，则无关紧要.

例如，$y=x^2+2x$ 与 $s=t^2+2t$ 是相同的函数；而 $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 则是不同的函数.

关于函数的定义域，在实际问题中应根据问题的实际意义具体确定. 如果所讨论的是纯数学问题，则函数的定义域就是使函数的表达式有意义的一切实数所构成的集合，这种定义域称为函数的自然定义域.

例如，函数 $y=\pi x^2$，若 x 表示圆的半径，y 表示圆的面积，则 $D_f=[0,+\infty)$；若不考虑 x 的实际意义，则其自然定义域为 $D_f=(-\infty,+\infty)$.

2. 函数的表示法

函数的表示法通常有如下三种：

(1) **表格法**　将自变量与因变量的值列成表格的方法.

例如，某国 1990～1995 年人口估计数字如下表：

年	1990	1991	1992	1993	1994	1995
人口(百万)	37.18	39.03	40.80	42.57	44.36	46.39

它反映了该国人口与年份的函数关系，这种表示法的优点是与自变量的取值所对应的函数值不需计算，只需查表即可得到.

(2) **图像法**　在坐标系中用图形表示函数的方法.

例如，图 1-8 是某气象站用自动温度记录仪记录的某地一昼夜气温变化的曲线. 这是用图形表示的函数，当 t 取 0 到 24 小时中的任意一个数时，在曲线上都能找到确定的 y 与之对应.

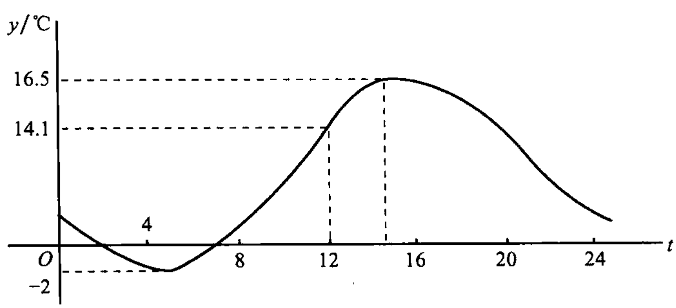

图 1-8

(3) **公式法(解析法)**　自变量与因变量之间的关系用数学表达式(又称解析表达式)来表示的方法.

根据函数解析表达式的不同形式，函数又可分为显函数、隐函数和分段函数三种：

① **显函数**：函数 y 由自变量 x 的解析表达式直接表示. 例如，$y=x^2+2x-1$；$y=\dfrac{\ln x}{x+\sin x}+3\sqrt[3]{x}\arctan x$ 等.

② **隐函数**：函数的自变量 x 与因变量 y 之间的对应关系由方程 $F(x,y)=0$ 来确定的. 例如，$\ln y=\sin(x+y)$；$xy^2=e^{x+x^2y}$等.

③ **分段函数**：函数在其定义域的不同范围内，用不同的解析表达式表示. 例如，

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & x<3\\ x^2-1, & x\geqslant 3\end{cases};\quad f(x)=\begin{cases}x, & x<1\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2\\ e^x, & x>2\end{cases}\quad 等.$$

注意 (1) 分段函数是用几个关系式合起来表示一个函数，而不是表示几个函数.

(2) 分段函数的定义域是各段取值范围之并集.

例 5 求绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 的定义域 D_f 及值域 R_f，并作出其图形.

解 $D_f=(-\infty,+\infty)$，$R_f=[0,+\infty)$，图形如图 1-9 所示.

例 6 求符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 的定义域 D_f 及值域 R_f，并作图形.

解 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{-1,0,1\}$，图形如图 1-10 所示.

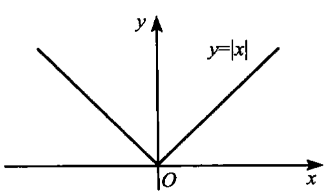

图 1-9

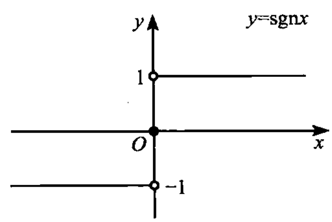

图 1-10

例 7 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1\\ \dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}, & 1<|x|\leqslant 2\end{cases}$，确定函数 $f(x)$ 的定义域并作出其图形.