国家级示范性高等院校精品规划教材

线性代数

XIAN XING DAI SHU

GUOJIAJI SHIFANXING GAODENGYUANXIAO
JINGPIN GUIHUA JIAOCAI

主编/周蔚祺　张靖

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

国家级示范性高等院校精品规划教材

线性代数

主　编　周蔚祺　张　靖

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书根据作者多年的教学实践，结合理工类、经济类、管理类各专业线性代数的课程的基本要求编写而成．主要内容包括：行列式、矩阵、线性方程组、矩阵特征值与特征向量、二次型、线性代数的应用软件简介和线性规划．

本书可作为经济类、管理类、工科类专业学生的教材，也可供其他专业参考．

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/周蔚祺，张靖主编．—天津．天津大学出版社，2010.9
ISBN 978-7-5618-3651-4

Ⅰ．①线…　Ⅱ．①周…②张…　Ⅲ．①线性代数-高等学校-教材
Ⅳ．①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 170198 号

出版发行　天津大学出版社
出 版 人　杨欢
地　　址　天津市卫津路 92 号天津大学内（邮编：300072）
网　　址　www.tjup.com
电　　话　发行部：022-27403647　邮购部：022-27402742
印　　刷　河北省昌黎县第一印刷厂
经　　销　全国各地新华书店
开　　本　185mm×260mm
印　　张　13
字　　数　324 千字
版　　次　2010 年 9 月第 1 版
印　　次　2010 年 9 月第 1 次
定　　价　28.00 元

前　　言

随着社会经济的不断发展，线性代数课程在理工类、经济类、管理类等学科中的地位越来越重要，其应用也在不断地广泛化.

线性代数课程的有关教材，普遍体现了数学逻辑严谨的特点. 它对培养人的思维能力、解决问题的能力有着重要的作用. 但是，过分强求严谨性，对于非数学专业学生来说，加大了学习的难度，有些本末倒置. 因为非数学专业学生学习该课程的目的在于理解其基本思想，掌握其基本方法，应用它解决实际问题. 所以本教材在编写过程中，尽可能做到内容展开深入浅出、概念陈述通俗易懂、推理演绎简捷直观，符合人们的认知心理过程，语言朴实准确. 使用本教材的过程中，教学两方面都会感到顺利、流畅、舒心. 即使数学基础较差的读者，在学习过程中也不会感觉有多大困难.

本教材在保持传统教材优点的基础上，对体系进行了适当调整和优化. 全书突出"矩阵方法"，贯穿"初等变换"思想，结构严谨、论述准确、文笔流畅、示例丰富. 特别是配备了较多的习题，便于自学. 本书可作为经济类、管理类、工科类专业学生教材，也可供其他专业参考.

由于水平有限，时间仓促，本书难免有错误和不足之处，诚恳期望使用本教材的教师和学生提出宝贵意见，对此我们深表谢意.

编　者

2010. 8

目　　录

第一章　行　列　式

在线性代数中，行列式是一个基本工具，它不仅用于矩阵的讨论，而且在科技领域有着广泛的应用.

第一节　行列式的概念

一、2 阶与 3 阶行列式

1. 2 阶行列式

在初等数学中，解二元一次方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

用消元法得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$
$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，求得方程组(1.1)的解为

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

我们用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 来表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

定义 1.1　将 2^2 个数排成两行两列(横排叫行，竖排叫列)，并在左右两侧各加一竖线，得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.2}$$

(1.2)式左端称为 2 阶行列式，(1.2)式右端称为 2 阶行列式的展开式. 数 a_{ij} $(i = 1,2; j = 1,2)$ 称为 2 阶行列式的元素. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行；第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列.

为了便于记忆，可看成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

即实线连接的两个元素的乘积减去虚线连接的两个元素的乘积. 实连线称为主对角线；虚连线称为副对角线.

若记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

则当 $D \neq 0$ 时，方程组(1.1)有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D}$$

注:分母 D 是由方程组(1.1)的系数所确定的 2 阶行列式,称之为系数行列式. x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1、b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}、a_{21} 所得的 2 阶行列式. x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1、b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}、a_{22} 所得的 2 阶行列式.

2. 3 阶行列式

定义 1.2 将 3^2 个数排成三行三列,并在左右两侧各加一竖线,即

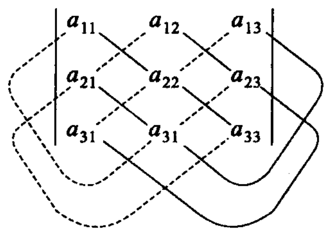
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

叫做 3 阶行列式. 它表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$.

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

等式右端叫做 3 阶行列式的展开式. 每项均为不同行不同列的 3 个元素的乘积再冠以正负号. 其规律如下所示:



三条实线看作是平行于主对角线的连线,三条虚线看作是平行于副对角线的连线. 实线上三元素的乘积冠以正号,虚线上三元素的乘积冠以负号. 然后六项相加的代数和便是 3 阶行列式的展开式. 这种 3 阶行列式的展开法称为对角线法则.

【例 1.1】 计算 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 8 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

【解】 按对角线法则:

$$\begin{aligned} D &=1\times(-3)\times2+4\times(-1)\times0+0\times8\times2-0\times(-3)\times0-8\times(-1)\times1-2\times4\times2 \\ &=-14 \end{aligned}$$

【例 1.2】 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}>0$ 的充分必要条件是什么?

【解】 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}=a^2-1.$

则 $a^2-1>0$，当且仅当 $|a|>1$. 因此 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}>0$ 的充分必要条件是 $|a|>1$.

二、排列与逆序数

为了定义更高阶的行列式，先讲排列与逆序数.

(1)排列　由 n 个不同的数码排成一列，叫做这 n 个元素的一个 n 级排列，记作 $i_1i_2\cdots i_n$. 如 4312 就是一个 4 级排列；523614 是一个 6 级排列.

(2)逆序数　在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，如果较大的数 i_t 在较小的数 i_s 前面($i_s<i_t$)，则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序. 一个排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中所有逆序的总和称作这个排列的逆序数，记为 $N(i_1i_2\cdots i_n)$.

如果设 $t_k(k=1,2,\cdots,n)$ 表示 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中后面比 i_k 小的元素 $i_l(l=k+1,k+2,\cdots,n)$ 的个数，就说 i_k 这个元素的逆序数是 t_k. 则

$$N(i_1i_2\cdots i_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n$$

【例 1.3】 求排列 32514 和 $n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数.

【解】 $N(32514)=2+1+2+0+0=5$

$$N(n(n-1)\cdots 321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0=\frac{n(n-1)}{2}$$

(3)奇偶排列　在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，如果其逆序数 $N(i_1i_2\cdots i_n)$ 是奇数，则称这个 n 级排列是奇排列；否则称为偶排列.

如 $N(1432)=3$，则 4 级排列 1432 为奇排列. $N(231)=2$，则 3 级排列 231 是偶排列. 自然排列 $123\cdots n$ 的逆序数为 0，是偶排列.

定理 1.1　n 个数码($n>1$)共有 $n!$ 个 n 级排列，其中奇偶排列各占 $\frac{n!}{2}$ 个.

三、n 阶行列式的定义

观察二三阶行列式的展开式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}a_{31} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

有如下特点.

(1)2 阶行列式的展开式是所有不同行不同列的两个元素乘积的代数和，可表示为 $a_{1j_1}a_{2j_2}$，j_1j_2 是一个 2 级排列，当 j_1j_2 取遍了 2 级排列(12,21)时，即得到 2 阶行列式的所有项(不包含符号). 3 阶行列式的展开式是所有不同行不同列的 3 个元素乘积的代数和，可表示为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，$j_1j_2j_3$ 是一个 3 级排列，当 $j_1j_2j_3$ 取遍了所有的 3 级排列时，即得到 3 阶行列式的所有项(不包含符号).

(2)每一项的符号是：当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后，如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号.

由此我们可以把二三阶行列式的展开式分别改写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2)} (-1)^{N(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 j_3)} (-1)^{N(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

这里 $\sum\limits_{(j_1 j_2)}$、$\sum\limits_{(j_1 j_2 j_3)}$ 分别表示对 1、2 与 1、2、3 的一切排列取和.

根据这个规律,我们可将行列式概念推广到 n 阶情形.

定义 1.3 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$组成

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 简记为 $D=\det(a_{ij})$. 其中横排叫行,纵排叫列. a_{ij} 叫做 n 阶行列式的元素. 第一个下标 i 叫行标,第二个下标 j 叫列标. n 阶行列式表示所有可能取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和. 各项的符号是:当这一项元素的行标按自然数顺序排列后,如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号,是奇排列则取负号. 所以,n 阶行列式的一般项可以写成$(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$,其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个 n 级排列,当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 取遍所有的 n 级排列时,则得到 n 阶行列式表示的代数和中所有的项.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

由定理 1.1 可知,n 阶行列式的展开式共有 $n!$ 项,而正负项各占一半.

当 $n=1$ 时,$|a|=a$,即一阶行列式由一个元素组成,其值就是这个元素本身. 注意不要与绝对值记号相混淆.

【例 1.4】 $a_{12}a_{21}a_{34}a_{44}$ 和 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 是否是 4 阶行列式的项,若是,其符号是什么?

【解】 因为 $a_{12}a_{21}a_{34}a_{44}$ 有两个元素都取自第 4 列,所以它不是 D_4 的一项.

而 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 行标排列 1234,元素取自不同行;列标 4312,元素取自不同列,所以是 D_4 的一项. $N(4312)=5$,则此项前面应冠以负号.

【例 1.5】 计算 $D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$

【解】 这是一个 4 阶行列式,在展开式中应有 $4!=24$ 项. 但由于每一项的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ 中只要有一个元素等于零,其乘积就是零. 因此,我们不妨从含有零元素最多的第 4 行考虑,这一行只有 $a_{44}\neq 0$,而其他项均为零,故只需考虑 $j_4=4$ 的项. 第三行中除了 a_{33}、a_{34} 外都是零,现已知 $j_4=4$,所以第三行只能取 $j_3=3$. 同理,第二行只能取 $j_2=2$;第一行只能

取 $j_1=1$,即行列式中不为零的项只能是 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$. 而 $N(1234)=0$,所以,$D_4=(-1)^{N(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$,该行列式的特点是主对角线以下的元素都为零(即当 $i>j$ 时,$a_{ij}=0$),这种行列式称为三角形行列式.

n 阶上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

n 阶下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

即等于主对角线元素的乘积.

特别地,有
$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

它的特点是除主对角线外,其他元素皆为零,称为对角行列式.

【例 1.6】 证明 $D_n=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2(n-1)} & \\ & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$

【解】 类似例 1.5 的讨论,第一行除了 $a_{1n}\neq 0$,第二行除了 $a_{2(n-1)}\neq 0$…第 n 行除了 $a_{n1}\neq 0$ 外,其余元素均为零,所以 D_n 的展开式中不为零的项只有 $a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$,而 $N(n(n-1)(n-2)\cdots 321)=\dfrac{n(n-1)}{2}$,所以

$$D_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$$

四、对换

为了研究行列式的性质,我们引入对换的概念.

定义 1.4 在一个 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n$ 中,如果仅将它的两个数码 j_s 与 j_t 对调,其他数位置不变,得到另一个 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n$,这样的变换称为一个对换. 将相邻两个元素对换,叫做相邻对换.

例如:排列 24135,将 4、5 对换得到 25134.

定理 1.2 任意一个排列经过一次对换后奇偶性改变.

【证】 (1)先考虑相邻对换的情形,设排列为 $AijB$,其中 A、B 表示除 i、j 两个数码外其余的数码,对换 i、j 后,$AijB\to AjiB$. 显然,A、B 中数码的次序没有改变,并且 i、j 与 A、B 中数码的次序也没有改变,仅仅改变了 i 与 j 的次序. 因此,新排列仅比原排列增加了一个逆序(当 $i<j$ 时),或减少了一个逆序(当 $i>j$ 时),所以它们的奇偶性相反.

(2)再考虑一般对换的情形,设排列为 $Aia_1a_2\cdots a_sjB$,经过对换 i、j 变成新排列 $Aja_1a_2\cdots$

$a_s iB$. 由原排列中将数码 i 依次与 a_1、a_2、…、a_s、j 作了 $s+1$ 次相邻对换，变为 $Aa_1a_2\cdots a_s jiB$. 再将 j 依次与 a_s、a_{s-1}、…a_2、a_1 作 s 次相邻对换得到新排列，即新排列可由原排列经过 $2s+1$ 次相邻对换得到. 由(1)的结论可知它改变了奇数次奇偶性，所以它与原排列的奇偶性相反.

推论：奇排列变成自然排列的对换次数为奇数，偶排列变成自然排列的对换次数为偶数.

【证】 不妨设排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列，由定理 1.2，对该排列作对换的次数就是该排列奇偶性变化的次数. 而自然排列 $12\cdots n$ 是偶排列，故只能通过奇数次对换才能实现要求.

定理 1.3 n 阶行列式也可定义为

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(i_1i_2\cdots i_n)}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}a_{i_nn}$$

【证】 按行列式的定义，有 $D=\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$. 令

$$D_1=\sum_{(i_1i_2\cdots i_n)}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

在 D 中当列标的排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 经过 k 次对换变成自然排列 $123\cdots n$ 时，相应的行标数自然排列 $123\cdots n$ 经过相同的 k 次对换变成排列 $i_1i_2\cdots i_n$. 由于数的乘法是可交换的，所以 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$，由推论，对换次数 k 与 $N(j_1j_2\cdots j_n)$ 有相同的奇偶性. 同理，k 与 $N(i_1i_2\cdots i_n)$ 也有相同的奇偶性，从而 $N(j_1j_2\cdots j_n)$ 与 $N(i_1i_2\cdots i_n)$ 有相同的奇偶性. 所以 $D=D_1$.

习题 1-1

1. 计算 2 阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} \sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$

2. 计算 3 阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} b & 0 & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$　　(4) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

3. 求下列各排列的逆序数，并判断奇偶性.

(1)52431　　(2)3214765

(3)36715284　　(4)$135\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots642$

4. 在 4 阶行列式中：

(1)写出所有含 $a_{12}a_{33}a_{41}$ 的项；

(2)写出所有含 $a_{23}a_{31}$ 的项；

(3)写出所有含 a_{43} 且带有负号的项.

5. 选择 i、j，使 $a_{14}a_{2i}a_{32}a_{4j}a_{55}$ 成为 5 阶行列式中带有正号的项.

6. 用定义计算行列式的值.

(1) $D_4=\begin{vmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}$　　(2) $D_4=\begin{vmatrix}a_1&0&b_1&0\\0&c_1&0&d_1\\a_2&0&b_2&0\\0&c_2&0&d_2\end{vmatrix}$

7. 设 n 阶行列式中有 n^2-n 个以上元素为零，证明该行列式的值为零.

第二节　行列式的性质

把行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$ 的行与列互换而得到的新行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为 D 的转置行列式. 显然 D 也是 D^{T} 的转置行列式，即 $(D^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=D$.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

【证】　设 $D=\det(a_{ij})$，$D^{\mathrm{T}}=\det(b_{ij})$，由转置的定义，有 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则

$$\begin{aligned}D^{\mathrm{T}}&=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}\\&=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}=D\end{aligned}$$

由此性质可知，行列式中行与列具有同等的地位，所以行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立，反之亦然.

性质 2　互换行列式的两行(列)，行列式变号.

【证】　设 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\begin{array}{l}\\\\(i\text{ 行})\\\\(m\text{ 行})\\\\\\\end{array}$

交换 D 的第 i 行与第 m 行的对应元素，得

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (i\text{ 行}) \\ \\ (m\text{ 行}) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

由行列式定义及定理 1.2

$$D_1 = \sum_{(j_1\cdots j_n)} (-1)^{N(j_1\cdots j_m\cdots j_i\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{mj_m} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n}$$
$$= \sum_{(j_1\cdots j_n)} (-1)^{N(j_1\cdots j_i\cdots j_m\cdots j_n)+1} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{mj_m} \cdots a_{nj_n} = -D$$

以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示第 i 列，交换 i、j 两行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$；交换 i、j 两列，记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

推论 1　如果行列式有两行(列)完全相同，则此行列式等于零.

【证】　由性质 2，把这两行互换，有 $D=-D$，所以 $D=0$.

性质 3　若行列式某行(列)有公因数 k，则 k 可提到行列式符号外边，即

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

【证】　设 $D=\det(a_{ij}) = \sum_{(j_1\cdots j_n)} (-1)^{N(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n}$，而

$$D_1 = \sum_{(j_1\cdots j_n)} (-1)^{N(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (ka_{ij_i}) \cdots a_{nj_n}$$
$$= k \sum_{(j_1\cdots j_n)} (-1)^{N(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} = kD$$

所以结论成立.

该性质说明：若用数 k 去乘行列式，等于用数 k 乘该行列式某一行(列)的各元素.

第 i 行(或列)提出公因子 k，记作 $r_i \div k$(或 $c_i \div k$).

推论 2　如果行列式某行(列)的元素全为零，则行列式的值为零.

性质 4　如果行列式有两行(列)的对应元素成比例，则行列式的值等于零.

【证】　由性质 3，可将行列式中这两行(列)的比例系数提到行列式外面，则余下的行列式有两行(列)对应元素相同，由推论 1，可知此行列式的值等于零.

性质 5　若行列式某行(列)的元素都是两数之和，即 $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$，则此行列式等于两个行列式的和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6 把行列式的某一行(列)的各元素同乘以数 k 后加到另一行(列)对应的元素上去,行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

【证】 由性质 5,上式右端的行列式等于两个行列式的和,即:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

第一个行列式就是原式左端的行列式,第二个行列式第 i 行与第 j 行成比例,由性质 4,第二个行列式的值为零,所以结论成立.

数 k 乘以第 j 行(列)加到第 i 行(列)上去,记作 $r_i+kr_j(c_i+kc_j)$.

利用行列式的性质计算行列式,可以使计算简化.

【例 1.7】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ -5 & 10 & 4 \end{vmatrix}$

【解】 因为第 1 列与第 2 列元素对应成比例,根据性质 4,得 $D=0$.

【例 1.8】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$