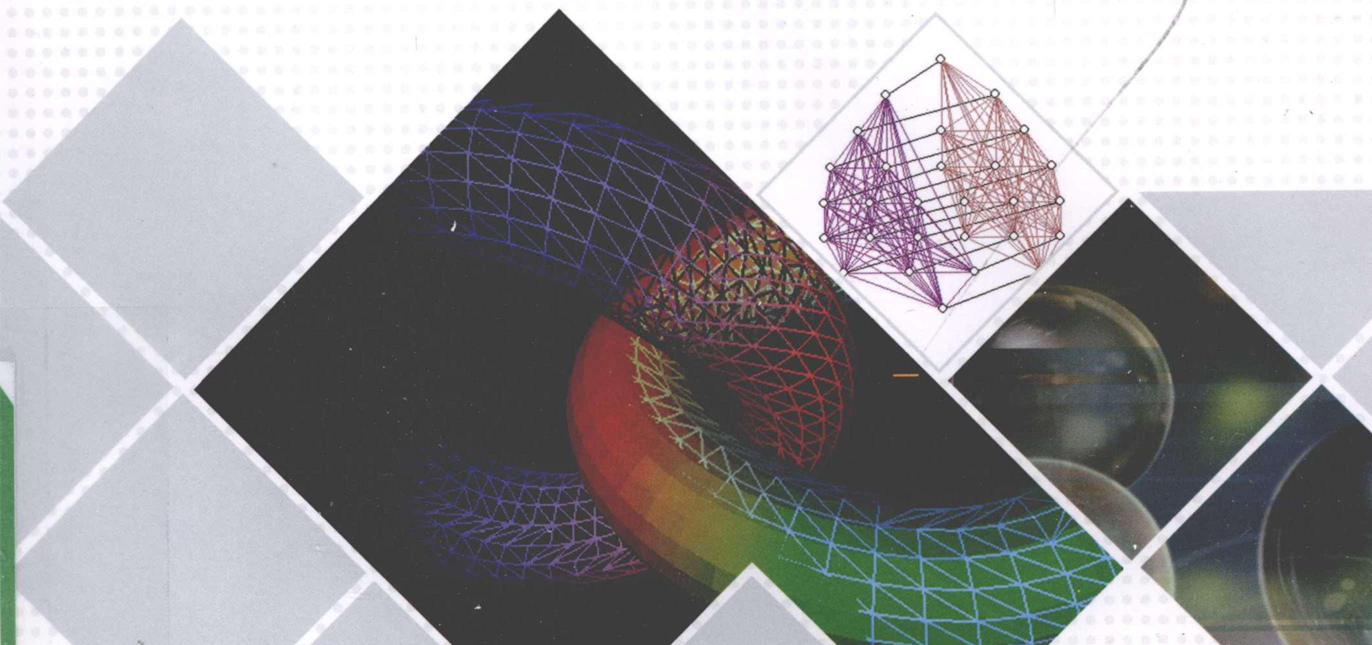
高等教育“十一五”规划教材
公 共 基 础 课 系 列 教 材

微积分

段复建 主 编



科学出版社
www.sciencep.com

高等教育"十一五"规划教材

公共基础课系列教材

微　积　分

段复建　主　编
张　楠　李可人　刘德光　副主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书内容包括函数的极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微分学、二重积分、无穷级数、微分方程与差分方程等.

本书从实际例子出发，引出微积分的基本概念、基本理论和基本方法，对某些章节适当降低理论深度，注重数学在经济管理领域中的应用，加强应用能力的培养. 具有逻辑清晰、注重应用、例题循序渐进、便于自学的特点. 可作为高等教育应用型本科经济类专业和管理类专业的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分/段复建主编. —北京：科学出版社，2009

(高等教育“十一五”规划教材·公共基础课系列教材)

ISBN 978-7-03-025141-1

Ⅰ. 微… Ⅱ. 段… Ⅲ. 微积分-高等学校-教材 Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 133799 号

责任编辑：沈力匀 周 恢/责任校对：柏连海

责任印制：吕春珉/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

世界知识印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 8 月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2009 年 8 月第一次印刷 印张：12 1/2

印数：1—4 500 字数：185 250

定价：19.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈世知〉)

销售部电话：010-62134988 编辑部电话：010-62135235 (HP04)

前　言

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的科学，是一切科学的基础，并在各个领域里有着广泛的应用，因此认识数学、学习数学、应用数学是 21 世纪对所有人才的要求.

随着高等教育的发展，应用型院校也得到了长足的进步，同时也要看到应用型院校与普通高校有着不同的教学模式和教学要求. 本书就是依据经济类、管理类各专业对微积分课程的要求和应用型高校的教学特点，遵循重视基本概念、培养基本能力、力求贴近实际应用的原则而编写的. 在编写过程中，我们首先突出微积分的基本思想和基本方法，重视知识结构，使学生在总体上把握高等数学的思想方法，在教学理念上不过分强调严密论证和研究过程，适当淡化运算技巧. 其次重视例题与习题的选择，使学生能够进行循序渐进地学习，并且每章附有具有一定难度的总习题. 拓广了经济应用实例，让学生更多了解如何应用数学知识、数学方法去解决经济管理类问题，增强学生的应用意识和能力. 另外在每章开始增加名人名言，后面附录增加数学家简介，目的在于提高学生对数学的认识，培养学生学习数学的兴趣.

全书共九章，包括函数的极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微分学、二重积分、微分方程与无穷级数，各节后配有习题，各章后配有总习题，书后附有习题参考答案. 本书由多所高校多位同仁集体创作完成，第 1 章由北京航空航天大学北海学院李可人编写，第 2 章由广西工学院鹿山学院宁桂英编写，第 3 章由广西师范学院师园学院朱雁编写，第 4、5 章由桂林电子科技大学信息科技学院段复建编写，第 6 章由桂林电子科技大学张楠编写，第 7 章由桂林理工大学博文管理学院王欣编写，第 8 章由广西大学行健文理学院刘德光编写，第 9 章由广西大学行健文理学院吴正飞编写，全书由段复建统稿，桂林电子科技大学信息科技学院黄坚、李绍刚、王春利同志给予了大力支持，在此深表谢意.

限于编者的水平，书中不足敬请批评指正.

目　　录

数学是科学之王.

—— 高斯

第 1 章　函数的极限与连续

函数是对现实世界中各种变量之间的相互依存关系的数学反映，是微积分学的主要研究对象. 极限是微积分的理论基础，是研究函数的基本分析方法；连续是函数的一个重要性质.

1.1　函　　数

1.1.1　区间与邻域

本书中常用的数集有自然数集 **N**、整数集 **Z**、有理数集 **Q** 与实数集 **R**. 区间是微积分中常用的一类数集，包括有限区间和无限区间，记号和定义如下：

(1) 开区间：$(a,b)=\{x|a<x<b\}$.

(2) 闭区间：$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$.

(3) 半开半闭区间：$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$；

$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}.$$

其中 a,b 是两个实数.

以上区间都称为**有限区间**，a 和 b 称为区间的**端点**，数 $b-a$ 称为区间的**长度**. 从数轴上看，这些有限区间是长度有限的线段.

(4) 无限区间：$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\}$；

$$(a,+\infty)=\{x|a<x\};$$
$$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\};$$
$$(-\infty,b)=\{x|x<b\}.$$

特别地，全体实数的集合 **R** 也可表示为无限区间$(-\infty,+\infty)$.

(a,b)，$[a,b]$，$[a,+\infty)$和$(-\infty,b)$在数轴上的表示如图 1.1 所示.

邻域也是微积分中常常用到的数集表示方法.

定义 1.1　设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，数集$\{x||x-a|<\delta\}$称为点 a 的 δ **邻域**，记为

$$U(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta\}.$$

其中，点 a 称为**邻域的中心**，δ 称为**邻域的半径**，如图 1.2 所示.

若把邻域 $U(a,\delta)$的中心点 a 去掉，所得到的邻域称为点 a 的**去心的 δ 邻域**，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$.

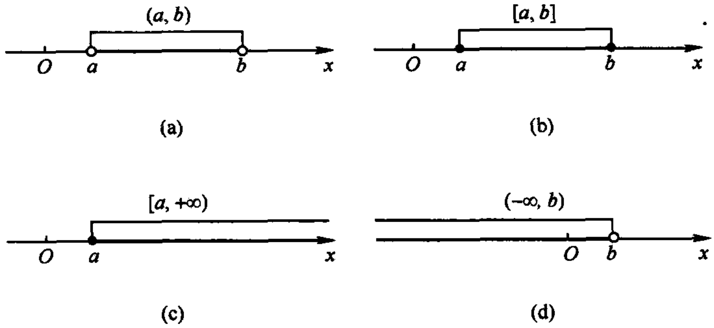


图 1.1

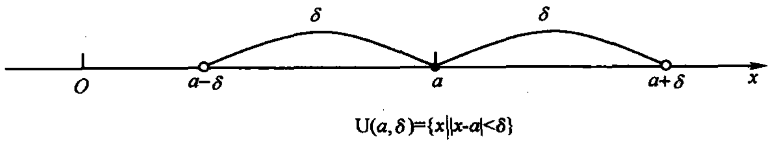


图 1.2

1.1.2 一元函数

定义 1.2 设 x,y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集，如果对于 D 内的每一个 x，按照某种规则 f，都有唯一确定的 y 值与之对应，则称变量 y 是 x 的**函数**，记为

$$y=f(x),x\in D,$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，x 的变化范围 D 称为函数的**定义域**，对应的 y 值的变化范围称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**，记为 D_f.

在平面直角坐标系下，点集 $\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$，称为函数 $y=f(x)$ 的**图像**.

例 1.1 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\dfrac{3}{x^2-1}$.　　(2) $f(x)=\ln(x^2-2x+1)$.

(3) $f(x)=\arccos(2x+3)$.　　(4) $f(x)=\arcsin(2x-3)-\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$.

解 (1) 在分式中，分母不能为 0，所以 $x^2-1\neq0$，解得 $x\neq\pm1$，即定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(2) 在对数式中，真数必须大于 0，所以有 $x^2-2x+1>0$，解得 $x\neq1$，即定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

(3) 反正弦或反余弦中的式子的绝对值必须小于等于 1，所以有 $|2x+3|\leqslant1$，解得 $-2\leqslant x\leqslant-1$，即定义域为 $[-2,-1]$.

(4) 函数为两部分的代数和，此时函数的定义域应该为两部分定义域的交集. 分别求得两部分定义域为 $[1,2]$ 和 $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$，可得函数定义域为 $\left(\dfrac{3}{2},2\right]$.

1.1.3　初等函数

1. 基本初等函数及其图像

(1) 常值函数：$y=c$　(c 为常数).

(2) 幂函数：$y=x^{\mu}$　(μ 为实数)(图 1.3).

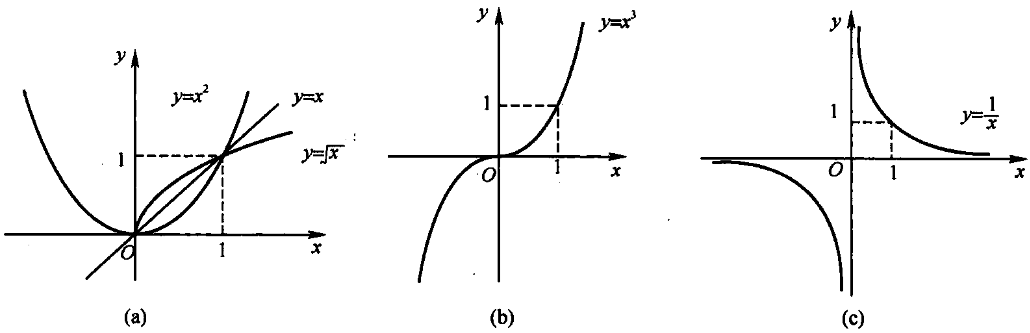


图 1.3

(3) 指数函数：$y=a^{x}$　($a>0$ 且 $a\neq1$)(图 1.4).

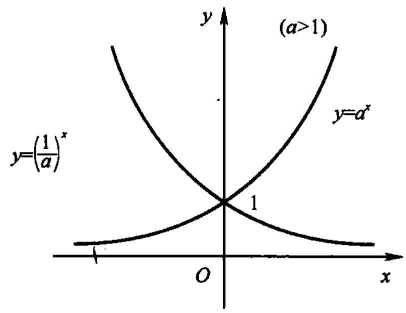


图 1.4

(4) 对数函数：$y=\log_{a}x$ ($a>0$ 且 $a\neq1$)(图 1.5).

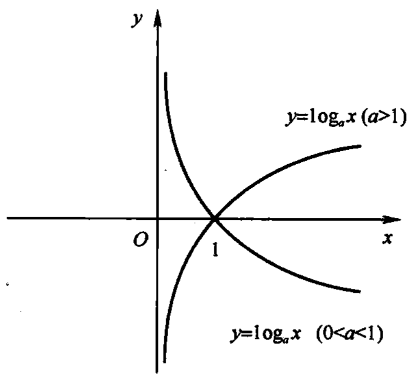


图 1.5

(5) 三角函数：$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x$(图 1.6).

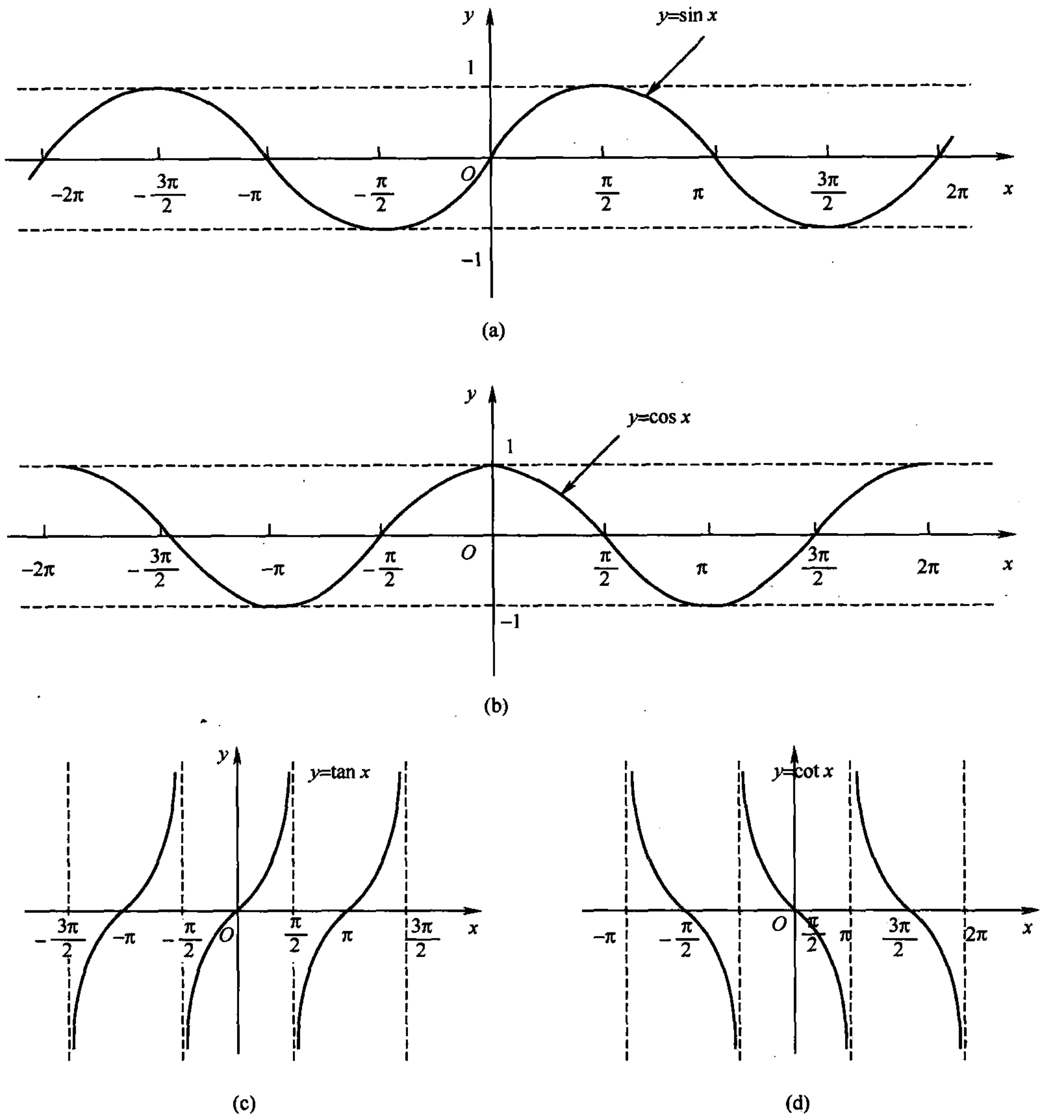


图 1.6

(6) 反三角函数：$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$(图 1.7).

以上 6 类函数统称为**基本初等函数**.

2. 反函数

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,值域为 D_f. 对于值域 D_f 中的任意数值 y，在定义域上至少可以确定一个数值 x 与 y 对应,且满足关系式

$$f(x)=y.$$

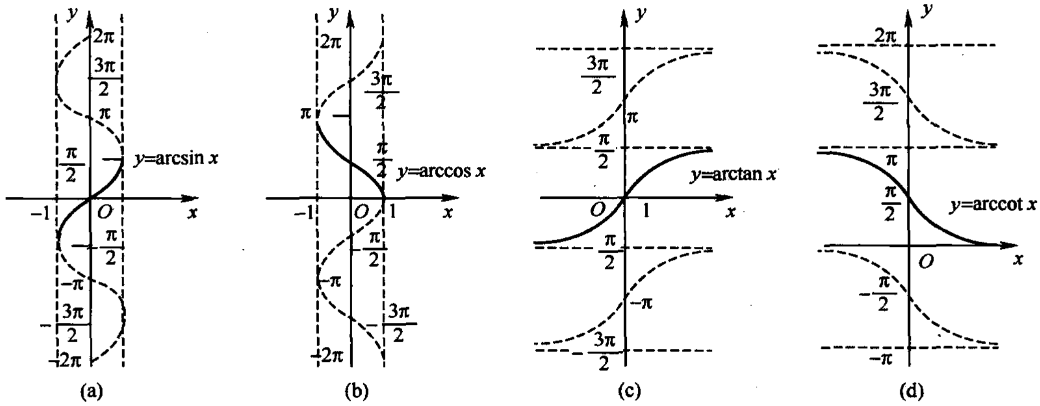


图 1.7

如果把 x 作为自变量,y 作为因变量,则上述关系式可以确定一个新函数

$$x=\varphi(y)(\text{或 } x=f^{-1}(y)),$$

该函数称为 $y=f(x)$ 的**反函数**. 反函数的定义域为 D_f,值域为 D.

需要注意的是我们通常是用 x 表示自变量,y 表示因变量,因此 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 常改写为

$$y=\varphi(x)(\text{或 } y=f^{-1}(x)).$$

函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 1.2　求下列函数的反函数.

(1) $y=2x-1$.　　　　(2) $y=\sin(x+1)$.

解　(1) 由 $y=2x-1$,解得 $x=\dfrac{y+1}{2}$. 交换 x 和 y,得 $y=\dfrac{x+1}{2}$.

即 $y=\dfrac{x+1}{2}$ 是 $y=2x-1$ 的反函数.

(2) 由 $y=\sin(x+1)$,解得 $x=\arcsin y-1$. 交换 x 和 y,得 $y=\arcsin x-1$. 即 $y=\arcsin x-1$ 是 $y=\sin(x+1)$ 的反函数.

3. 复合函数

定义 1.4　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U,而函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D,值域为 D_φ,且 $D_\varphi\subseteq U$. 则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的**复合函数**. 其中,x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,u 称为**中间变量**.

例 1.3　设 $y=f(u)=10^u$,$u=\varphi(x)=x^3-1$,求 $y=f[\varphi(x)]$.

解　$y=f[\varphi(x)]=10^u=10^{x^3-1}$.

例 1.4　设 $y=f(u)=\arctan u$,$u=\varphi(v)=\sqrt{v}$,$v=\psi(x)=e^x$,求 $y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$.

解　$y=f\{\varphi[\psi(x)]\}=\arctan u=\arctan\sqrt{v}=\arctan\sqrt{e^x}=\arctan e^{\frac{x}{2}}$.

例 1.5　求下列函数的复合分解式.

(1) $y=\ln\sin^2\sqrt{x}$.　　　　(2) $e^{\cos x^2}$.

解 (1)所给函数是由 $y=\ln u, u=v^2, v=\sin t, t=\sqrt{x}$ 等 4 个函数复合而成.

(2) 所给函数是由 $y=e^u, u=\cos v, v=x^2$ 3 个函数复合而成.

4. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所得到的,并能用一个式子表示的函数,称为**初等函数**.

例如,$y=e^{x^2-1}$,$y=\ln(\sin 2x+\cos^2 x)$,$y=\dfrac{1}{2-x^2}-\sqrt{4-x^2}$ 等都是初等函数.需要注意的是分段函数不是初等函数,例如,符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0.\\ -1, & x<0\end{cases}$

1.1.4 函数的性质

1. 函数的有界性

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上有定义,若存在一个正数 M,使得对于任意 $x\in D$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立,则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上是**有界函数**.如果不存在这样的正数 M,则称 $y=f(x)$ 在 D 上是**无界函数**.

2. 函数的单调性

定义 1.6 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subseteq D$.如果对于区间 I 的任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加的**;如果对于区间 I 的任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少的**.

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

例如,函数 $y=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的,在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的,在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调的. 而 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调增加的.

3. 函数的奇偶性

定义 1.7 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称.若对于任意 $x\in D$,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为**偶函数**;若对于任意 $x\in D$,恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴是对称的,奇函数的图形关于原点是对称的,如图 1.8 所示.

例如,函数 $y=x^2$ 是偶函数,因为 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$.而 $y=x^3$ 是奇函数,因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$.

4. 函数的周期性

定义 1.8 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D.如果存在常数 $T>0$,使得对任意的 $x\in D$,有 $(x\pm T)\in D$,且 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为**周期函数**,T 称为 $f(x)$ 的**周期**.

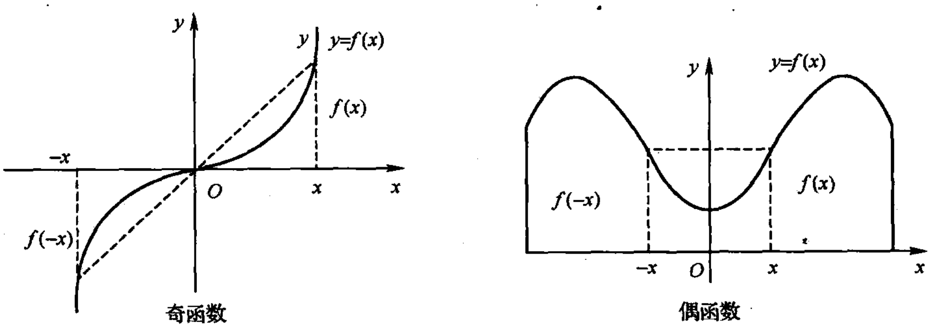


图 1.8

通常我们说的周期函数的周期指的是**最小正周期**.

例如,$\sin x$、$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数,函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

例 1.6　讨论函数 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的单调性、奇偶性.

解　函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,在区间$[0,+\infty)$上,设 $0<x_1<x_2$,则有$-x_1^2>-x_2^2$,也即$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_1^2}{2}}>\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_2^2}{2}}$,故 $f(x)$在区间$[0,+\infty)$上递减;同理可得 $f(x)$在区间$(-\infty,0]$上递增.

由于 $f(-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(-x)^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=f(x)$,故 $f(x)$是偶函数.

1.1.5　经济学中的常用函数

1. 需求与供给函数

需求函数是指某一特定时期内,市场上某种商品的可能购买量与决定这些购买量的各因素之间的数量关系. 假定其他因素不变,决定需求量的因素就是价格. 则需求函数就是商品需求量与商品价格这两个变量间的数量关系,即

$$Q_d=D(P),$$

其中 Q_d 表示需求量,P 表示价格,$D(P)$为需求函数.

需求函数的反函数 $P=P(Q_d)$称为**价格函数**.

供给函数是指某一特定时期内,市场上某种商品的可能供给量与决定这些供给量的各因素之间的数量关系,则供给函数就是商品需求量与商品价格这两个变量间的数量关系,即 $Q_s=S(P)$,其中 Q_s 表示供给量,P 表示价格,$S(P)$为供给函数.

函数 $Q_d=ap+b$ 称为线性需求函数,$Q_s=cp+d$ 称为线性供给函数,其中 a,b,c,d 是常数.

把需求函数曲线与供给函数曲线在同一坐标系中表示(图 1.9). 需求曲线与供给曲线的交点的横坐标 p_0,就是该商品的市场需求量与供给量相等的价格,称 p_0 为**市场均衡价格**. 需求曲线与供给曲线的交点的纵坐标 q_0,即 $q_0=Q_s=Q_d$,称 q_0 为**市场均衡数量**.

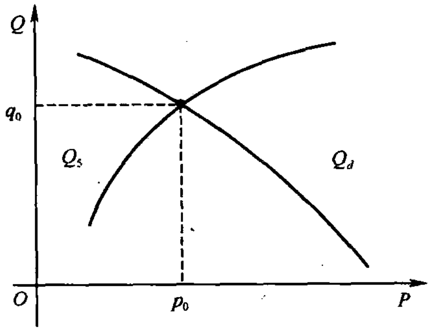


图 1.9

当市场价格高于均衡价格时，将出现供过于求的现象，而当市场价格低于均衡价格时，将出现供不应求的现象.

根据市场情况不同，需求函数与供给函数还可以是二次函数、多项式函数、指数函数甚至是较复杂的初等函数. 但其基本规律相同，都可以找到相应的**市场均衡点**(p_0, q_0).

例 1.7 某种商品的供给函数和需求函数分别为

$$Q_d = -p^2 + 30p + 120, \quad Q_s = p^2 + 16p,$$

求该商品的市场均衡价格与市场均衡量.

解 由供需条件 $Q_s = Q_d$，可得

$$-p^2 + 30p + 120 = p^2 + 16p,$$

整理得

$$2p^2 - 14p - 120 = 0,$$

解此二次方程得 $p_1 = 12, p_2 = -5$. 显然 p_2 不合题意，舍去.

因此，均衡价格为 $p = 12$，市场均衡量为 $q = p^2 + 16p = 336$.

2. 成本、收益与利润函数

产品成本是以货币形式表现的企业生产和销售产品的全部费用支出，成本函数表示了总成本与产量(或销售量)之间的依赖关系. 产品成本可分为**固定成本**和**可变成本**两部分. 固定成本 C_0 与产量 q 无关，如设备维修费、企业管理费等；可变成本 $C_1(q)$随产量 q 变化而变化，如原材料费等. 以上两部分之和即为**成本函数** $C(q) = C_0 + C_1(q)$. 当产量 $q = 0$ 时，对应的成本函数 $C(0)$就是固定成本. 而 $\bar{C}(q) = \dfrac{C(q)}{q}$，称为**平均成本函数**.

销售某产品的收益 R，等于产品的单价 p 乘以销售量 q，即 $R = p \cdot q$，称其为**收益函数**. 而销售利润 L 等于收益 R 减去成本 C，即 $L = R - C$，称其为**利润函数**. 而 $\bar{L}(q) = \dfrac{L(q)}{q}$，称为**平均利润函数**.

当 $L = R - C > 0$ 时，生产者盈利；当 $L = R - C < 0$ 时，生产者亏损；当 $L = R - C = 0$ 时，生产者盈亏平衡. 使 $L(q) = 0$ 的点 q_0 称为**盈亏平衡点**.

例 1.8 设某产品的需求函数为 $q = 100 - 4p$，成本函数为 $C = 100 + 20q$，求销售量为 q 时的收益与平均利润.

解 价格函数是需求函数的反函数，由此可得

$$p = 25 - 0.25q,$$

从而得到收益为

$$R = pq = 25q - 0.25q^2,$$

平均利润为

$$\overline{L}=L(q)/q=(R-C)/q=5-0.25q-100q^{-1}.$$

3. 库存函数

我们在此仅讨论需求量是确定的,不允许缺货的简单库存函数. 对于库存模型,我们假设:

(1) 计划期为 T,在计划期 T 内对货物的需求量是确定的,记为 Q.

(2) 进货均匀,在计划期 T 内分 n 次进货,每次进货量为 $q=\frac{Q}{n}$,于是 $n=\frac{Q}{q}$.

(3) 每批进货费用为常数,记为 C,每件货物储存单位时间的储存费用为常数,记为 S.

(4) 货物均匀投放市场:此时最大库存量就是每次进货量 q,随后均匀降至零. 一旦库存货量为零,立即得到货物补充. 此时货物的库存量 $q(t)$ 如图 1.10 所示.

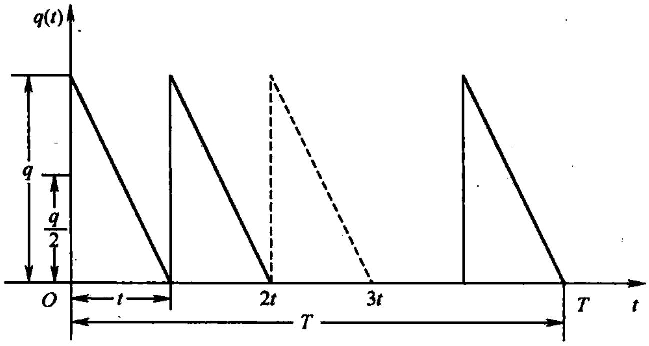


图 1.10

在上述假设下,总储存费用为 $E_1=\frac{q}{2}ST$,总进货费用为 $E_2=Cn=C\frac{Q}{q}$,于是总费用为 $E=E_1+E_2=\frac{qST}{2}+\frac{CQ}{q}$.

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{1-x}$.　　(2) $y=\frac{1}{1-x}$.

(3) $y=\ln(2-x)+\sqrt{x^2-9}$.　　(4) $y=\arcsin\frac{x+1}{2}$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+9, & -4\leqslant x<2\\ \sqrt{x-1}, & 2\leqslant x<6\end{cases}$,求 $f(-1)$,$f(0)$,$f(2)$,$f(5)$.

3. 讨论下列函数的单调性,奇偶性.

(1) $y=x\tan x$.　　(2) $y=1+x^2$,$x\in(-2,4)$.

(3) $y=3x^3+2x^2-7$,$x\in(0,+\infty)$.　　(4) $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

(5) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

4. 求下列函数的反函数.

(1) $y=\dfrac{x-3}{x+3}$.　　　　(2) $y=\sqrt[3]{x+2}$.

5. 设 $f(x)=3x^2-x,\varphi(x)=e^{x-1}$,求 $f[\varphi(x)],\varphi[f(x)]$.

6. 据市场调查,某产品供给函数和需求函数分别为 $Q_d=35p-80,Q_s=1000-10p$,求该产品的市场均衡价格与市场均衡量.

7. 设某商品的成本函数与收益函数是 $C(q)=50+3q-q^2,R(q)=11q$,试求:

(1) 该商品的利润函数.

(2) 销量分别为 4 和 8 时,盈利还是亏损? 如果盈利,求总利润及平均利润.

1.2 极限的定义和性质

极限的思想是由求某些实际问题的精确解而产生的.早在魏晋时期,我国的杰出数学家刘徽就利用圆内接正多边形来推算圆面积.刘徽的割园术说:"割之弥细,所失弥少,割之又割,以至于不可割,则与圆周合体而无所失矣。"其中隐含了深刻的极限思想.

1.2.1 数列的极限

按一定规则排列的无穷多个数构成了一个数列

$$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$$

简记为$\{x_n\}$.其中每个数称为数列的**项**,x_n 称为**通项**或**一般项**.例如,

(1) $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots$;通项为 $x_n=\dfrac{1}{2^n}(n=1,2,\cdots)$,记做$\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$.

(2) $\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\cdots,\dfrac{n}{n+1},\cdots$;通项为 $x_n=\dfrac{n}{n+1}(n=1,2,\cdots)$,记做$\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$.

(3) $1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n},\cdots$;通项为 $x_n=(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$,记做$\left\{(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}\right\}$.

(4) $1,-1,1,\cdots,(-1)^{n-1},\cdots$;通项为 $x_n=(-1)^{n-1}(n=1,2,\cdots)$,记做$\{(-1)^{n-1}\}$.

(5)$1,\sqrt{2},\sqrt{3},\cdots,\sqrt{n},\cdots$;通项为 $x_n=\sqrt{n}(n=1,2,\cdots)$,记做$\{\sqrt{n}\}$.

可见,数列随着 n 的无限增大,x_n 的变化趋势是不同的,如果当 n 无限增大时,x_n 无限趋近常数 a,则称数列$\{x_n\}$以 a 为极限,严格的数学定义如下.

定义 1.9 设$\{x_n\}$为一个数列,a 为一个常数,如果对于任意给定的正数 ε,总存在一个正整数 N,使得当 $n>N$ 时,有

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

则称 a 是数列$\{x_n\}$的**极限**,或称数列$\{x_n\}$**收敛**于 a,记做

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \quad 或 \quad x_n\to a(n\to\infty).$$

如果数列没有极限,则称数列是**发散**的.