高等代数
学习指导与习题解答

裴世昌 陈希杰 主编

辽宁科学技术出版社

高等代数

学习指导与习题解答

高等代数学习指导与习题解答

主编　裴世昌　陈希杰
主审　徐　震　梁宝棋

辽宁科学技术出版社
1987年·沈阳

主　编：裴世昌　陈希杰
主　审：徐　震　梁宝棋
编写者：裴世昌　陈希杰　徐　震　杨传藏
梁宝棋　郭维良　丛　苹　张九赋
应明生　关宝平　王者天　丁　巍
张一君

高等代数学习指导与习题解答

Gaodeng Daishu Xuexi
Zhidao Yu Xiti Jieda

主编　裴世昌　陈希杰
主审　徐　震　梁宝棋

辽宁科学技术出版社出版发行（沈阳市南京街6段1里2号）
沈阳市第六印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32　　印张：11 7/8 字数，263,000
1987年11月第1版　　1987年11月第1次印刷

责任编辑：宋纯智　符　宁　封面设计：曹太文

印数：1—5,200册
ISBN 7—5381—0207—8/O.13
统一书号：13288·59　　定价：2.35元

前　言

高等代数是高等院校数学专业的必修课程之一，也是中学数学教师《专业合格证书》考核的必考科目。为了帮助广大中学数学教师搞好《专业合格证书》考试的复习，我们依据高等代数教学大纲(供初中数学教师用)，结合《高等代数(第三版)》(张禾瑞、郝钢新编)教材，编写了本书。全书共分两部分：第一部分为高等代数各章的目的要求与主要内容；第二部分为《高等代数第三版》(张禾瑞、郝钢新编)习题解答。

本书不仅可作为中学数学教师《专业合格证书》考试的复习用书，还可作为高等师范院校、师专以及省市教育学院的教学参考书，也可供电大、函大、业大学员学习时参考。

在本书的成书过程中，我们得到了有关单位和各方面同志的支持和帮助，在此我们表示衷心的感谢。

由于本书成书较匆忙，疏漏之处在所难免，欢迎读者不吝指正。

作　者

1987年

目　录

第一部分　高等代数各章的目的要求与主要内容

第二部分　《高等代数（第三版）》（张禾瑞、郝钢新编）习题解答

第一部分
高等代数各章的目的要求
与主要内容

概　论

高等代数是大学数学专业的重要基础课之一，是中学代数的继续和提高，它是由多项式理论(或方程式论)、线性代数和近世代数初步三部分组成的，方程式论是在十九世纪初形成的代数的中心问题，它是围绕着一个未知量的n次代数方程

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots a_{n-1} x + a_n = 0$$

的解法的研究形成了一套比较完整的理论，这部分内容中有一些是在中学代数课程里讨论过的。例如，多项式的运算、多项式的因式分解以及二次方程等等，现在看来，方程式论只不过是代数学的一个分支，随着数学发展的要求，代数学的内容极大地丰富起来。例如，人们对于运算和它的对象的认识发展了，从而提出了研究抽象的“对象”和运算的要求，现代的代数学转向到研究一些抽象的代数体系和结构，使得代数的应用更加广泛起来。

线性代数的历史表明：线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

的求解问题是历史上的第一个线性代数问题，我们现在在中学代数课程里讨论过这个问题的最简单情形，对于任意 n 个未知量 m个方程的情形，就需要找出来尽可能简单的数值解的方法，这在很多计算和研究中是常用到的、矩阵理论是线性代数中重要而且不可缺少的核心部分，它在提出和解决线性代数的问题中起着表现和工具的作用，线性代数中很大的

篇幅是研究抽象的向量空间的结构和它的线性变换、欧氏空间的结构和它的线性变换、二次型等，这些理论产生的源泉很多都来自数学分析和解析几何，反过来，应用线性代数中讨论的抽象理论，可以简化数学分析和解析几何中一些问题的讨论。线性代数已广泛的应用到物理、力学、计算技术和编码等领域中去。

通过这门课的学习可以初步了解基本的系统的代数知识和抽象而又严格的代数方法以加深对中学代数的理解，并为进一步学习打下良好的基础。

这门课的主要内容包括：

一、基本概念：集合、映射、复数、数域等等；

二、多项式论：数域上一元多项式的因式分解理论、多项式的根以及多元多项式的理论；

三、行列式；

四、线性方程组理论；

五、矩阵；

六、向量空间（或线性空间）和它的线性变换；

七、欧氏空间和它的线性变换；

八、二次型和对称矩阵

九、近世代数初步

读者只要具备中学代数和解析几何的基础知识就可以自修这门课题，这门课可以用170学时复习完。

可与配合使用的主要参考书：

〔1〕《高等代数（第三版）》（张禾瑞、郝钢新编），高等教育出版社。

〔2〕《高等代数》（贺昌亭主编），辽宁人民出版社1983年版

第一章　基础知识

一、目的要求

本章主要介绍集合、映射、数集、数系、数环、数域以及自然数公理、最小数原理、数学归纳法、整数的整除性等基本概念和基本知识。

1．掌握集合、集合的包含与相等、子集、扩集、交集、并集、卡氏积、有限集、无限集等概念以及其间的逻辑关系，并能进行简单的逻辑推理；

2．掌握集合的运算和性质；

3．正确理解映射、满射、单射、双射、映射合成、逆映射等概念，并能举例说明、了解可数集和不可数集概念；

4．正确理解数集、数系、数环、数域的概念，并能判断一些数集是否为数环、数域，理解有理数域是最小数域；

5．正确理解数学归纳法的科学原理，并能正确运用数学归纳法；

6．掌握整数的整除性和数的分解。

二、主要内容

1．集合、数集与数系

集合　子集　交集　并集　有限集　无限集

映射　满射　单射　双射　映射相等　映射合成

逆映射　可数集　不可数集

数集　数系　数环　数域　自然数系　整数环

有理数域　实数域　复数域　最小数域

这部分内容均可在参考书〔1〕、〔2〕中查到，为方便读者对上述内容〔1〕中没有的内容给以如下的注释（以后的注释原则也如此，不再声明）。

注释：

（1）有限集——元素个数为有限的集合称为有限集、无限集——元素个数为无限多个的集合称为无限集，例如{1、2}为只含两个元素的有限集，而自然数集、偶数集等均为无限集。

（2）可数集——与自然数集今可以建立一一映射的集合称为可数集合，有限集和空集也称为可数集，其他的集合称为不可数集合、例如：整数集、有理数集都是可数集，而无理数集、实数集、复数集都是不可数集，空集可视为元素个数为0的集合，因而空集是有限集和可数集。

（3）数系——一个对于某种运算（+或－或×等）或某几种运算来说是封闭的数集称为数系。例如：自然数集（对加法或乘法）是数系。

2. 自然数系　数学归纳法

自然数公理——匹阿诺公理

自然数系的基本性质——最小数原理

数学归纳法及其两种形式

注释：

（1）匹阿诺公理：Peano对于自然数集合P进行了研究，得出了关于自然数的一系公理，我们称为匹阿诺(Peano)公理：

Ⅰ．1是自然数；

Ⅱ．在自然数集合P中，每个数a有一个确定的后继数

a^+，即$a^+ = a + 1$；

（例如：$a = 2$，$a^+ = a + 1 = 2 + 1 = 3$）

Ⅲ．$a^+ \neq 1$；

这就是说，P中没有以数1作为后继数的数；

Ⅳ．由$a^+ = b^+$，推出$a = b$

这就是说，对于每一个自然数，或者没有或者恰有一个数以它作为后继数；

Ⅴ．“完全归纳法原理”：如果自然数集合的一个非空子集合M包含数1，并且若$a \in M$ 则$a^+ \in M$；则M包含全体自然数，即 $M = P$。

3. 整数的整除性

整数环的除法不能问题

整数及其基本性质 约数 公约数 最大公约数 互素 素数与合数 带余除法 辗转相除法 哥德巴赫猜想与 陈景润定理

注释：

（1）整数环 Z 对于“+、−、×”来讲是封闭的，但对于数的除法（不以零为除数）来说就不封闭：例如 $2 \div 3 = \frac{2}{3} \notin z$，所以Z不是一个数域，也即对除法来说是不能施行的，也即整数环Z对除法来说是不能的。

（2）素数与合数：

在全体整数中，根据约数的多少可把全体整数分成三类：

第一类里有1，−1它们都刚好有两个约数，而且它们都有逆元：1的逆元是1，−1的逆元是−1，我们把有逆元的元在环里叫做单位。所以，1，−1都是Z中的单位。

第二类里有±2、±3、±5、…

这一类里的数有一个共同的特点：它们都刚好有四个整约数，这种刚好有四个整约数的整数叫做素数。所以，这第二类是素数类。

第三类里有：0，±4，±6，±8，±9，…，

这一类里的数有一个共同的特点：它们都有六个或六个以上的约数。我们把这些数称为合数，所以第三类是合数类。

例如：2、－2、3、－3等，它们都有四个约数（2的约数为±、±2），所以它们都是素数，而4、－4的约数为±1，±、±4、所以4、－4都是合数。

（3）最大公约数的求法——辗转相除法：

假设a和b都是正整数，且a＞b，如果我们要求a和b的非负的最大公约数，可先以b除a，可得到

$$a = bq_1 + r_1$$

其中q_1和r_1都是非负整数，而$0 \leqslant r_1 < b$，如果$r_1 = 0$，则有$a = bq$，所以a和b的最大公约数就是b，如果$r_1 \neq 0$，这时则有$0 < r_1 < b$，我们再以r_1除b，可得到

$$b = r_1q_2 + r_2$$

其中r_2和q_2都是非负整数，而$0 \leqslant r_2 < r_1$，由

$$a = bq_1 + r_1$$

我们有

$$(a,\ b) = (b, r_1)$$

如果$r_2 = 0$，则b和r_1的最大公约数就是r_1，即$(b, r_1) = r_1$，由$(a,\ b) = (b, r_1)$得到a和b的最大公约数就是r_1，如果$r_2 \neq 0$，则有$0 < r_2 < r_1$。我们再以r_2除r_1，可得

$$r_1 = r_2q_3 + r_3$$

其中q_3和r_3都是非负整数，而$0 \leqslant r_3 < r_2$由此可得

$$(b, r_1) = (r_2, r_1)$$

如果$r_3 = 0$，则$(a, b) = r_2$，如果$r_3 \neq 0$，则有$0 < r_3 < r_2$，我们再以r_3除r_2，

……

这样继续辗转相除，由$b > r_1 > r_2 > r_3 > \cdots$和所有$r_i$ $(i = 1, 2, 3, \cdots)$都是非负整数，所以一定存在一个正整数n，使得经过$n+1$次辗转相除后有$r_{n+1} = 0$，但$r_n \neq 0$，这时r_n就是a和b的最大公约数，即$(a, b) = r_n$

（4）哥德巴赫猜想与陈景润定理：

① 任何大于4的正偶数，均可以写成两个正奇素数之和，这个命题称为哥德巴赫猜想。

② 陈景润为了解决上述猜想做了大量的工作，获得世界上大数学家的好评，但是他还没有完成这个证明，他解决的命题被称为“1 + 2”，而哥德巴赫命题被称为“1 + 1”、“1 + 2”这个命题被称为陈景润定理：任何一个大的正偶数，均可以写成两个正的奇素数之和，或者它等于一个正奇素数加上两个正奇素数之积。

（5）若整数d是整数$a_1, a_2, \cdots, a_n$的最大公约数，则存在整数$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，使

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n = d$$

（6）若整数$a_1, a_2, \cdots, a_n$ $(n \geqslant 2)$互素，则存在整数$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$使

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n = 1$$

4. 因数分解定理及其证明

命题1 每一个大于1的整数a都可以分解成素因数的连乘积，就是

$$a = p_1 p_2 \cdots p_n \qquad n \geqslant 1$$

这里p_1，p_2，p_3，…，p_n都是素数，其中可能有相同的，例如$12=2\times2\times3$，$18=2\times3\times3$

命题2　如果p是素数，则由$p\nmid a$可得$(p, a)=1$，而当$(p, a)=1$时，可得$p\nmid a$.

命题3　如果a、b、c、都是正整数，则由$(a, b)=1$，$a|bc$可得$a|c$，这就是说：当a和b互素，但是a能整除bc时，那么一定是a能整除c。

命题4　如果$n\geqslant2$是一个整数，而a_1，a_2，…，a_n和a都是正整数，当$a|a_1a_2\cdots a_n$和$(a_1, a_1)=(a_1, a_2)=\cdots=(a, a_{n-1})=1$时，那么一定有$a|a_n$

命题5　如果a，b，c都是正整数，而$(a, b)=1$，$c|a$则有

$$(b, c)=1$$

命题6　如果a和b都是正整数，而$(a, b)=1$，则有

$$(a, bc)=(a, c)$$

命题7　如果$n\geqslant2$是一个整数，而b_1，b_2，…b_n和a都是正整数，当$(a,b_1)=(a,b_2)=\cdots=(a,b_n)=1$时，则有

$$(a,b_1b_2\cdots b_n)=1$$

命题8　如果$n\geqslant2$是一个整数，a_1，a_2，…，a_n都是正整数，而p是一个素数，当$p|a_1a_2\cdots a_n$时，则至少有一个a_r能被p除尽，也即是$p|a_r$

命题9　如果$n\geqslant2$是一个整数，而p_1，$p_2\cdots$，p_n和p都是正素数，当$p|p_1p_2\cdots p_n$时，则最少有一个p_r，而r是1，2，…，n中的某一个数，它使得$p=p_r$

定理（因数分解）如果不计素因数的次序，则只有一种方法可以把一个正整数$a>1$分解成正素因数的连乘积，或