21世纪高等院校教材

概率论与数理统计

刘舒强 金明爱 主编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

概率论与数理统计

刘舒强　金明爱　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是依照高等院校财经类专业的数学教学大纲并紧密联系硕士研究生入学考试数学考试大纲编写而成的. 在基本内容与习题的编排上均力争与这两个大纲及有关专业的具体要求相适应. 本书内容包括:随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、数理统计基本概念、参数估计、假设检验、方差分析及回归分析等知识. 根据教学的不同需要,供选择讲授的部分用“*”号作了标志.

本书可作为高等院校经济管理类专业本科生的概率论与数理统计教材,也可作为学时相近的工科专业本科生的教材及相关专业的研究生参考书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/刘舒强,金明爱主编. —北京:科学出版社,2009
21 世纪高等院校教材
ISBN 978-7-03-026249-3

Ⅰ.概… Ⅱ.①刘…②金… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 232581 号

责任编辑:王 静 杨 然 / 责任校对:陈玉凤
责任印制:张克忠 / 封面设计:陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

明辉印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 1 月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2010 年 1 月第一次印刷 印张:15 3/4
印数:1—4 000 字数:318 000

定价: 25.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前　言

“概率论与数理统计”是教育部在高等院校许多专业设置的核心课程之一，它同时又是一门与相当广泛领域的实际问题联系密切的数学基础课程.

20 世纪末，原国家教委审定通过了经济数学基础教学大纲，同时还颁布了全国硕士研究生入学考试数学考试大纲，这两个大纲乃是我们编写本书的主要依据.其目的是为相应专业的在校本科生学习这门课程提供必要和适当的相关基础知识，同时也充分考虑了部分学生继续深造的需求，从而在编写本书的过程中对内容与习题都做了精心的筛选，使本书在整体上既顾及了数学本身的严密性，同时也采用了通俗简洁的表述方式.有些章节还给出了一些必要的注释，以帮助读者理解某些容易混淆的概念.希望这些工作能对读者有所裨益.

参加本书编写工作的同志，均是长期从事数学研究和在数学教学上有丰富经验的教师，他们在各自完成的章节中都融入了许多自己深刻的理解和体会，这使得本书不仅内容全面、论证严谨，而且深入浅出、易学好教，稍加增删就可作为更加广泛的专业的本科生教材或参考书.

本书第 1、2 章由金明爱老师编写；第 3、4 章由姚静老师编写；第 5 章由刘舒强老师编写；第 6、7 章由杨波老师编写；第 8～10 章由谌雪莺老师编写.全书由刘舒强、金明爱老师统稿.

书中可能尚有许多不足之处，还望读者不吝指正.

南开大学数学科学学院周性伟教授对本书的编写给予了多方面的关注与指导，并对整个书稿进行了审阅，在此谨表深切的谢意！

编　者

2009 年 9 月

目　　录

第 1 章　随机事件及其概率

在自然界和人类的社会活动中会发生各种各样的现象，这些现象大致可分为两类，分别称其为确定性现象和随机现象.

所谓**确定性现象**，即在一定条件下必然会出现某一结果（或必然发生某一事件）的现象. 例如：

(1) 向上抛一粒石子必然下落；

(2) 纯净水在标准大气压下，加热至 100℃时会沸腾，冷却至 0℃时会结冰；

(3) 异性电荷必然相吸；

(4) 两个相邻的自然数相乘得到的数 $n(n+1)$ 一定是偶数；

(5) 质量为 m 的物体受到外力 f 的作用必然产生加速度 a；

(6) 一袋中装有 10 个大小和外形完全相同的白球，搅匀后从中任取的一球必是白球.

所谓**随机现象**，即在一定条件下可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，而且不能预先断言出现哪种结果的现象. 随机现象在实际生活中是大量存在的，例如：

(1) 往地面上抛掷一枚硬币，观察其结果，可能是正面朝上，也可能是反面朝上，并且每次在抛掷之前无法确定哪一面朝上；

(2) 100 件产品中有 3 件次品，从中任意取出 4 件，取到次品的件数可能是 0，1，2 或 3；

(3) 一袋中装有大小和外形完全相同的三个球：红球、白球和黑球，搅匀后从中任取一球，取到的可能是红球、白球或黑球.

我们不妨想象一下，能够使得整个人类，包括一个国家、一个区域、一个家庭乃至每个人感到振奋、幸福、惬意、快乐、悲伤、恐惧、失望及愤怒的那些主宰人们几乎所有激烈情绪的事件，无一不是随机现象：战争给人类带来的难以预料的结果；自然灾害给一个国家和个人带来的损失与苦难；子女的考学给家庭带来的不安与期望. 凡此种种，不一而足.

可以毫不夸张地讲，整个世界都是在与“随机现象”的“博弈”中生存的.

观察一定条件下发生的结果或事件通常称为**试验**. 仅就一次试验而言，随机现象的结果具有不确定性，但是在相同条件下做大量的重复试验时，随机现象的结果又会呈现出一种明显的规律性. 例如，往地面上抛掷一枚硬币的次数足够多时，正面朝上和反面朝上的次数大致相同，都占总抛掷次数的一半左右. 英国数学家皮尔

逊(Pearson)曾经做过 24 000 次抛掷硬币的重复试验,结果正面朝上为 12 012 次,反面朝上为 11 988 次,都接近 12 000 次,这就是随机现象的统计规律性. 可见,随机现象具有表面的偶然性和蕴涵的必然性,偶然性就是它的随机性,必然性就是大量的重复实验中呈现出的统计规律性. 概率论与数理统计就是从数量的角度研究随机现象规律性的一门学科.

作为概率论的入门,本章将主要介绍概率论中两个最基本的概念:随机事件与随机事件的概率;并在此基础上介绍条件概率及三个重要公式(乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式),事件的独立性及伯努利(Bernoulli)概型.

1.1　随机事件及其运算

1.1.1　随机事件与样本空间

研究随机现象,需要对"具备一定条件时,现象是否发生"进行观察,这种观察的过程称为**随机试验**,简称**试验**. 如:

试验 1　向一个桌面上掷一颗骰子,观察出现的点数;

试验 2　一袋中装有四白三黑三红大小形状完全相同的球,搅匀后从中任取一球,观察球的颜色;

试验 3　抽查流水生产线的一件产品,观察是正品还是次品.

随机试验具有以下三个共同特点:

(1) 可重复性,即试验可以在相同条件下重复进行;

(2) 多结果性,即试验的所有可能结果不止一个,但是预先知道所有可能的结果;

(3) 随机性,即每一次试验一定会出现可能结果中的一个,且只出现一个结果;但在试验之前,不能明确预言会出现哪个结果.

定义 1　称随机试验的所有可能结果组成的集合为该随机试验的样本空间,用 Ω 表示;试验的每一个结果(即 Ω 的元素)称为该试验的一个样本点,用 ω 表示.

定义 2　称随机试验的样本空间 Ω 的子集为该试验的随机事件. 特别地,由一个样本点组成的单点集称为基本事件.

在每次试验中一定发生的事件称为**必然事件**,通常用全集 Ω 表示. 在每次试验中一定不发生的事件称为**不可能事件**,通常用空集 $\varnothing$ 表示.

例如,向一个桌面上掷一颗骰子,结果可能是"出现 1 点"、"出现 2 点"、……、"出现 6 点"等. 每一个结果都是一个随机事件. 另外,"出现的点数不超过 5"、"出现的点数超过 3"、"出现的点数为偶数"等也都是随机事件. 而"出现的点数不超过 6"是必然事件,"出现 7 点"则是不可能事件.

在上述随机事件中,"出现 1 点"、"出现 2 点"、……、"出现 6 点"等事件为基本事件;我们把"出现的点数不超过 5"、"出现的点数超过 3"、"出现的点数为偶数"等事件称为**复合事件**,每一个复合事件都是由一些基本事件组成的,如"出现的点数为偶数",就是由"出现 2 点"、"出现 4 点"和"出现 6 点"三个基本事件所组成. 可以说,基本事件就是不可分解的事件,而复合事件就是可分解的事件.

显然,任何一个随机试验的结果一定是某一个基本事件. 因此,样本空间所代表的事件是必然事件.

在概率论中主要讨论随机事件,即在试验条件下可能发生也可能不发生的事件. 随机事件是样本空间的一个非空子集,一般用大写英文字母 A,B,C 等表示. 然而,偶然和必然的辩证统一性,让我们不能不涉及必然事件和不可能事件,因此,为讨论问题的方便,我们将必然事件和不可能事件也看作随机事件,这与集合论中将全集和空集也看作子集的给定相一致.

对一个随机试验,首先要弄清楚它所有的基本事件,进而确定样本空间和随机事件. 下面举几个例子.

例 1 在一个口袋中放有红、黄、绿三个大小形状完全相同的球,从中任取一个并观察它们的颜色. 在这个试验中,样本空间 Ω 由下面三个基本事件组成:

$$\omega_1 = \{\text{红球}\},\quad \omega_2 = \{\text{黄球}\},\quad \omega_3 = \{\text{绿球}\}.$$

$$\Omega = \{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}.$$

例 2 试写出下列随机试验的样本空间与指定的随机事件:

(1) 从一批产品中任意抽取 5 件,观察这 5 件产品中的次品数.

事件 $A =$"5 件产品中的次品数不超过 2 件".

(2) 设某零件直径的最大可能误差是± 0.1mm.

事件 $B =$"误差的绝对值不超过 0.05mm".

(3) 盒中装有颜色各为红、黄、白、黑的 4 个大小形状完全相同的球,搅匀后从中任取两个球,观察球的颜色.

事件 $C =$"有白球".

(4) 盒中装有红、黄、蓝三种颜色的粉笔,各色粉笔均超过 4 支. 从盒中任意取出 4 支粉笔,观察它们有几种颜色.

事件 $D_1 =$"有红色",　事件 $D_2 =$"有白色".

(5) 观察某地区 120 急救电话台在某一段时间内接到的呼唤次数.

解 (1) 设 $\omega_i=i$ 表示所抽 5 件产品中的次品数为 i,则该试验的基本事件为 $\omega_i=i(i=0,1,2,3,4,5)$. 于是样本空间

$$\Omega = \{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\} = \{0,1,2,3,4,5\},$$

而

$$A = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2\} = \{0,1,2\}.$$

(2) 该试验的基本事件为区间$[-0.1,0.1]$(单位:mm)中的任一实数 ω,因此样本空间 $\Omega=\{\omega \mid -0.1\leqslant\omega\leqslant0.1\}$,而

$$B = \{\omega \mid |\omega| \leqslant 0.05\}.$$

(3) 该试验的样本空间为 $\Omega=$\{红黄,红白,红黑,黄白,黄黑,白黑\},而

$$C = \{\text{红白},\text{黄白},\text{白黑}\}.$$

(4) 该试验的样本空间为 $\Omega=$\{红,黄,蓝,红黄,红蓝,黄蓝,红黄蓝\},而

$$D_1 = \{\text{红},\text{红黄},\text{红蓝},\text{红黄蓝}\}, \quad D_2 = \varnothing.$$

(5) 该试验的基本事件为 $\omega_i=$\{呼叫次数为 i 次\},样本空间为 $\Omega=\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots\}$.

例 2 说明随机试验的样本空间既有离散的,如(1)、(3)、(4)、(5);又有连续的,如(2);既有有限集,如(1)、(3)、(4);又有无限集,如(2)、(5).

1.1.2 随机事件间的关系与运算

在研究一个随机现象时,通常会涉及多个随机事件,而且这些随机事件是有关系的.了解事件之间的关系,有助于了解和掌握每个事件的本质,从而使我们通过对简单事件的了解,来研究与之有关的较为复杂的事件.

如前所述,一个随机试验的随机事件是样本空间的某个子集.因此,随机事件之间的关系与运算在本质上与集合之间的关系与运算一致,我们将以集合论的观点和表示方法给出随机事件之间的关系和运算.

以下设已给定某随机试验的样本空间 Ω(全集),$A,B,C,A_i(i=1,2,\cdots)$等均表示该试验的随机事件(Ω 的子集).

1. 事件的包含与相等关系

定义 3 如果事件 A 发生时,事件 B 必发生,则称事件 B 包含事件 A(或事件 A 含于事件 B),记作 $A\subset B$(或 $B\supset A$).如果 $A\subset B$ 与 $B\subset A$ 同时成立,则称 A 与 B 相等,记作 $A=B$.

例 3 5 件同类产品中有两件次品,从中任取三件,设 $A=$“恰取到一件次品”,$B=$“至少取到一件次品”,$C=$“最多取到两件正品”,则 $A\subset B, B=C$.

2. 事件的和(并)运算

定义 4 事件 A 与事件 B 至少有一个发生,是一个事件,称为事件 A 与事件 B 的和(并),记作 $A+B$,即 $A+B=$“A 与 B 至少发生其一”.

例 4 发行甲、乙两种报纸,按户统计订报情况,设 $A=$“订甲种报纸”,$B=$“订

乙种报纸”，C=“甲、乙两种报纸中至少订阅一种报纸”，则 $C=A+B$.

3. 事件的积(交)运算

定义 5 事件 A 与事件 B 同时发生，是一个事件，称为事件 A 与事件 B 的积(交)，记作 $A\cdot B$(或 AB)，即 AB=“A 与 B 同时发生”.

如例 4 中 AB=“甲、乙两种报纸都订阅”.

事件的并与交运算，可推广到事件为有限个或可列个的情形. 若 A 发生当且仅当 $A_1, A_2, \cdots$ 中至少有一个发生，则称 A 是 $A_1, A_2, \cdots$ 的和，记为 $A=\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$ 或 $A=\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$；若 A 发生当且仅当 $A_1, A_2, \cdots$ 同时发生，则称 A 是 $A_1, A_2, \cdots$ 的积，记为 $A=\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$ 或 $A=\prod\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

易见，若 $A\subset B$，则 $AB=A$.

4. 事件的差运算

定义 6 事件 A 发生而事件 B 不发生，是一个事件，称为事件 A 与事件 B 的差，记作 $A-B$，即 $A-B=A-AB$.

如例 4 中 $A-B$=“订甲种报纸而不订乙种报纸”.

5. 对立事件(逆事件)

定义 7 事件 A 与事件 B 有且仅有一件发生，是一个事件，称事件 A 与事件 B 互为对立事件(逆事件)，记作 $\overline{A}=B$(或 $\overline{B}=A$)，即 $\overline{A}$=“A 不发生”.

如例 4 中 $\overline{A}$=“未订甲种报纸”.

事件 A 与它的对立事件 $\overline{A}$ 有关系：$\overline{(\overline{A})}=A$；$A\overline{A}=\varnothing$；$A+\overline{A}=\Omega$. 而 $A-B=A\overline{B}$.

6. 事件的互不相容性(互斥性)

定义 8 若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互不相容(或互斥).

注意，互逆一定互斥，但互斥未必互逆. 比如，掷一个骰子，事件“出现 3 点”和事件“出现偶数点”是互斥的，但这两个事件并不互逆.

若事件组 $A_1, A_2, \cdots$(有限个或可列个)中任意两个事件互不相容(互斥)，则称事件组 $A_1, A_2, \cdots$ 互不相容(或两两互斥).

易见，基本事件是互不相容的，而两个互斥事件不包含共同的基本事件.

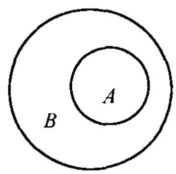
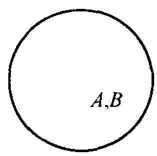
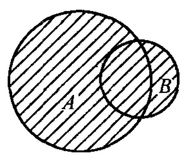
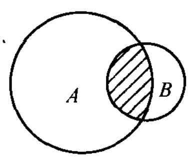
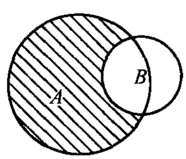
7. 完备事件组

定义 9　若事件组 $A_1, A_2, \cdots$(有限或可列个)互不相容,且 $\sum_i A_i = \Omega$,则称 $A_1, A_2, \cdots$ 构成一个完备事件组.

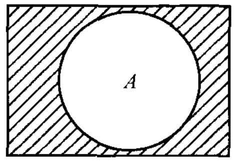
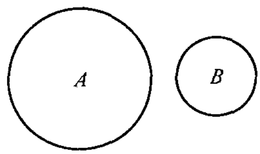
易见,一个随机试验的所有基本事件就构成一个完备事件组;而事件 A 与它的对立事件 $\overline{A}$ 也构成一个完备事件组.

完备事件组有时也称为对样本空间 Ω 的一个剖分(或划分).下面将会看到,完备事件组是事件间的一种很重要的关系.为便于对照和记忆,我们把随机事件的关系与运算列入表 1.1.1 中.

表 1.1.1

关系或运算	符号(集合表示)	文氏图	概率论语言描述
事件 B 包含事件 A	$A \subset B$ (或 $B \supset A$)		事件 A 发生, 则事件 B 发生
事件 A 与 B 相等	$A = B$		
事件 A 与 B 的和(并)	$A + B$		事件 A 与 B 中至少 有一个发生
事件 A 与 B 的积(交)	AB		事件 A 与 B 同时发生
事件 A 与 B 的差	$A - B$		事件 A 发生而 B 不发生

续表

关系或运算	符号(集合表示)	文氏图	概率论语言描述
事件 A 的对立事件	$\bar{A}=\Omega-A$		事件 A 不发生
事件 A 与 B 互不相容	$AB=\varnothing$		事件 A 与 B 不能同时发生
完备事件组 $A_1,A_2,\cdots$	$A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$ $\sum\limits_i A_i=\Omega$		

1.1.3 随机事件的运算性质

随机事件的运算性质与集合的运算性质完全相同，这里仅列出其主要性质，证明从略. 有兴趣的读者可查阅有关集合论的书籍.

1. 交换律

$$A+B=B+A,\quad AB=BA.$$

2. 结合律

$$(A+B)+C=A+(B+C),\quad (AB)C=A(BC).$$

3. 分配律

(1) $(A+B)C=AC+BC$(第一分配律). 推广至任意有限个事件，则为

$$\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)C=\sum_{i=1}^{n}A_iC.$$

(2) $AB+C=(A+C)(B+C)$(第二分配律). 推广至任意有限个事件，则为

$$\prod_{i=1}^{n}A_i+C=\prod_{i=1}^{n}(A_i+C).$$

4. 德摩根(De Morgan)定理(对偶律)

(1) $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$(第一对偶律). 其推广形式为

$$\overline{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \prod_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

(2) $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$(第二对偶律). 其推广形式为

$$\overline{\prod_{i=1}^{n} A_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

例 5　设 A,B,C 是某随机试验中的三个随机事件,试用 A,B,C 运算关系式表示下列各事件:

(1) A,B,C 中恰有 A 发生;

(2) A,B,C 中至少有两个事件发生;

(3) A,B,C 中恰好有两个事件发生;

(4) A,B,C 中至多有一个事件发生.

解　(1) 可表示为 $A-(B+C)=A\,\overline{(B+C)}$ 或 $A\overline{B}\,\overline{C}$;

(2) 可表示为 $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC$ 或 $AB+AC+BC$;

(3) 可表示为 $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$;

(4) 可表示为 $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}\,\overline{C}+\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $\overline{AB+AC+BC}$.

例 6　从一批灯泡中任取 4 个进行检验,设 A_i 表示第 i 个灯泡的使用寿命在 800h 以上(含 800h). 试用语言描述下列随机事件:

(1) $A_1+A_2+A_3+A_4$;

(2) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4$;

(3) $\overline{A_1A_2A_3A_4}$.

解　(1) 表示 4 个灯泡中至少有一个灯泡的使用寿命在 800h 以上;

(2) 表示第 1、4 两个灯泡的使用寿命在 800h 以上,而第 2、3 两个灯泡的使用寿命不足 800h;

(3) 表示并非 4 个灯泡使用寿命都在 800h 以上,即至少有一个灯泡的使用寿命不足 800h.

注　顺便指出,**样本点未必都是事件**. 不过,对此进行的研究已经超出了本书的范围.

1.2　随机事件的概率

观察一个随机试验的各种事件,总会发现不同的事件出现的可能性一般也不尽相同. 我们研究随机现象时,不仅需要知道可能会出现哪些事件,更重要且

更具实践意义的是需要研究、了解各种事件发生可能性的大小，并加以度量. 这就需要有一个刻画事件发生可能性大小的数量指标，该指标需满足以下两个条件：

(1) 它必须是事件本身所固有的客观量度，且可在相同条件下通过重复试验予以识别和检验.

(2) 它必须符合一般常理. 比如，当事件发生的可能性大时，该指标值相应也大；反之，它的值就小. 而必然事件的指标值最大，不可能事件的指标值最小.

这样一来，我们就能够建立起事件出现的可能性与其数量指标的对应关系. 由于在通常的情形下，这二者是等价的(稍后我们会看到它们之间也有细微的差别)，所以我们把刻画一个事件 A 发生可能性大小的数量指标称为事件 A 的概率，记为 $P(A)$，它同时也为我们即将给出的在公理化结构下的概率定义做好了准备 .

本书将针对不同情况介绍三种计算概率的方法，这三种方法分别称为统计概率、古典概率和几何概率.

1.2.1 统计概率

随机事件在一次试验中，可能发生，也可能不发生，这是具有偶然性的. 但是，大量的事实告诉我们，随机事件在一次试验中发生的可能性大小是随机事件本身所固有的一种属性，不同的随机事件，发生的可能性大小不一定相同，有的发生的可能性大，有的发生的可能性小. 前面说过，我们需要用一个量来体现这种可能性的大小，那么，到底怎样的一个量能够体现事件发生的可能性大小? 为此，我们先给出频率的定义.

定义 1 设在 n 次重复随机试验中，事件 A 发生了 m 次. 称 m 为事件 A 发生的频数，称 $\frac{m}{n}$ 为事件 A 发生的频率，记为

$$f_n(A)=\frac{m}{n}. \tag{1.2.1}$$

由定义易知，频率具有如下基本性质：

(1) 对任意事件 A，$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) $f_n(\Omega)=1$，$f_n(\varnothing)=0$；

(3) 若事件 A 和事件 B 互斥，则 $f_n(A+B)=f_n(A)+f_n(B)$. 进一步地，若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两互斥的事件，则 $f_n(A_1+A_2+\cdots+A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k)$.

一个随机事件的频率与试验的次数和事件发生的次数有关，因而不是一个固定的常数. 但是在大量的重复试验中，频率具有稳定性. 为了说明频率的稳定性，先看下面的例子.

例 1 考虑"抛硬币"试验,除了皮尔逊,历史上还有多名数学家做过这个试验. 设事件 A="正面朝上",则试验的结果如表 1.2.1 所示.

表 1.2.1

试验者	抛掷次数(n)	A 发生的次数(m)	频率($f_n(A)$)
德摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
费勒	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
维尼	30 000	14 994	0.499 8

表 1.2.1 的数据表明,随着试验次数 n 的增大,频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性,即当 n 逐渐增大时,$f_n(A)$ 总是在 0.5 附近摆动,且摆动幅度越来越小.

例 2 考察英文字母出现的频率. 当观察字母的个数 n(试验次数)较小时,频率有较大幅度的随机波动,但是当 n 增大时,频率呈现出稳定性. 表 1.2.2 就是一份英文字母频率的统计表,是由 Dewey 统计了约 438 023 个字母得到的.

表 1.2.2

字母	频率	字母	频率	字母	频率
E	0.126 8	L	0.039 4	P	0.018 6
T	0.097 8	D	0.038 9	B	0.015 6
A	0.078 8	U	0.028 0	V	0.010 2
O	0.077 6	C	0.026 8	K	0.006 0
I	0.070 7	F	0.025 6	X	0.001 6
N	0.070 6	M	0.024 4	J	0.001 0
S	0.063 4	W	0.021 4	Q	0.000 9
R	0.059 4	Y	0.020 2	Z	0.000 6
H	0.057 3	G	0.018 7		

大量的试验说明,尽管一个事件发生的频率不是固定的常数,但是当试验的次数逐渐增大时,事件发生的频率会逐渐在某个常数附近摆动,试验的次数越大,频率和某个常数之间的偏差就越小,呈现出一种稳定性,我们将这个常数称为频率的稳定值. 因此,我们用这个频率稳定值来确切反映事件发生的可能性大小,作为其度量指标,引入下述定义.

定义 2 在观察某一随机事件 A 的随机试验中,随着试验次数 n 的增大,事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 会越来越稳定地在某一常数 p 附近摆动,这时就以常数 p 作为事件 A 的概率,并称其为统计概率,即 $P(A)=p$.

根据这个定义,在实际问题中,我们可以把大量观察所得到的频率作为概率的