

DIANDONG  
LIXUE  
GAILUN

# 电动力学 概 论

● 李书民 编著

中国科学技术大学出版社

●李书民 编著

# 电动力学 概 论

DIANDONG  
*LIXUE*  
GAILUN

中国科学技术大学出版社

## 内 容 简 介

本书根据作者在中国科学技术大学讲授电动力学的讲义整理而成,通过比较自然的逻辑体系和简单易记的符号系统,全面系统地介绍了经典电动力学的内容和方法,突出了理论物理教材简洁、优美、严谨的特色。全书共分8章:电磁现象的基本规律、静电场、静磁场、似稳场、电磁波的传播、电磁波的辐射、狭义相对论、带电粒子与电磁场的相互作用。

本书尽量完整地给出了公式的推导和结论的证明,每章配有较丰富的例题与习题,适合综合性大学和师范院校物理类专业师生及有关专业研究人员与工程师阅读。

## 图书在版编目(CIP)数据

电动力学概论/李书民编著. —合肥:中国科学技术大学出版社,2010.5  
安徽省高等学校“十一五”省级规划教材  
ISBN 978-7-312-02674-4

I. 电… II. 李… III. 电动力学—高等学校—教材 IV. O442

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 007076 号

中国科学技术大学出版社出版发行

地址:安徽省合肥市金寨路 96 号,230026

网址:<http://press.ustc.edu.cn>

合肥芳翔印刷有限责任公司印刷

全国新华书店经销

开本:710×960 1/16 印张:22 字数:429 千

2010 年 5 月第 1 版 2010 年 5 月第 1 次印刷

印数:1—2500 册

定价:38.00 元

# 前 言

电动力学属物理专业本科基础理论课程之一。这组课程包括理论力学(经典力学)、电动力学、热力学与统计物理和量子力学,合称四大力学。和普通物理相比,这组课程更加系统、抽象,是普物力学课程的深化和提高。重点在于培养学生的抽象思维能力和解决实际问题的能力。

电动力学是电磁现象的经典动力学理论,主要研究电磁场的运动规律及其与物质的相互作用。电磁相互作用是自然界中最重要的相互作用之一,物质结构、生命现象与之密不可分。电磁相互作用也是迄今为止人们了解最彻底、最完备和最精确的相互作用之一,是研究其他相互作用的模型和样板。电磁场理论同时也是联系经典理论和量子理论的纽带,是近代物理学发展的基础和阶梯。电磁理论在几乎所有的科学技术领域都有着重要的应用。

本书是根据作者在中国科学技术大学讲授电动力学的讲义整理而成的。在编写过程中,力图按照理论本身的逻辑体系,循序渐进地引入抽象简洁的描述。第1章从基本实验事实出发,概要归纳出电磁现象的基本规律(麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式),并引入电磁场的势表述。阐明了电磁场的物质属性,如能量、动量、角动量等。建议读者在学习第1章时,先复习一下附录A和B中关于矢量分析和 $\delta$ 函数的数学知识。第2章将一般理论应用于介质和导体的静电现象。在唯一性定理的基础上,通过实例详细介绍静电边值问题的解法。建议读者在学习本章时,先复习一下附录C和D中关于球函数与柱函数的知识。第3章将静电场方法推广到稳恒电流所激发的静磁场,关于静磁场的许多结论与静电场是平行的。第4章讨论随时间缓慢变化的似稳场。第5章研究电磁波在绝缘介质、导体和等离子体中的传播规律,以及在介质(导体)界面上的反射和折射性质。作为应用,讨论了电磁波在波导管和谐振腔中的传播。第6章通过引入推迟势,讨论电磁波的辐射和衍射。第7章从电磁定律与经典伽利略相对性原理的矛盾出发,引入狭义相对论原理和洛伦兹变换,建立了四维闵可夫斯基时空和张量的概念,给出力学、电动力学乃至经典场理论的四维协变形式。第8章讨论带电粒子与电磁场的相互作用,在经典理论框架内,帮助学生建立带电粒子与电磁场相互作用的物理概念,为以后定量研究场与物质的相互作用打下基础。为了加强学生在理论思维和技能方面的训练,本书在注

重物理直观和简洁性的同时, 尽量详尽地给出结论的证明和公式的推导. 每章后面附有较丰富的习题, 以巩固正文中所学的内容. 带 \* 号的章节相对独立, 略去不讲不会影响整体的系统性. 本书采用国际单位制, 国际制与高斯制的转换在附录 E 中给出. 物理常数的数值参见附录 F.

公式符号繁多历来是电动力学著作所面临的一个问题. 本书为避免符号重复, 对个别物理量采用了不同于传统教科书的符号. 比如, 为了避免电导率符号  $\sigma$  与面电荷密度符号  $\sigma$  重复, 我们用希腊字母  $\xi$  标记电导率 (该符号的形状像一根弯曲的导线, 使人自然联想到它反映了导电性能); 又如, 为了避免柱坐标矢径  $\rho$  与电荷密度符号  $\rho$  重复, 我们将柱坐标矢径记为  $\eta$  (可以把  $\eta$  想像成草写的  $r$ , 只不过最后一笔向下拉得较长), 等等. 我们对物理量尽量不采用下标, 但对同一类型的物理量则采用共同的符号, 通过注以不同的下标以示区别. 比如, 对电磁场的能流密度、动量流密度和角动量流密度分别采用符号  $\mathbf{J}_w$ ,  $\mathbf{J}_g$  和  $\mathbf{J}_l$ . 为了区别矩阵与矢量 (张量) 符号, 将表示矩阵的字母冠以符号 “ $\sim$ ”, 对矢量和张量则采用黑斜体字母.

本书取名为《电动力学概论》, 以区别于国内同类教材. 本书逻辑严谨, 论述清楚、简练, 可作为物理系本科生电动力学课程的教材或教学参考书. 也可供其他专业的教师 and 研究生参考.

本书在编写过程中, 得到了中国科学技术大学出版社的大力支持, 同时受到国家自然科学基金 10874169、10674125 和国家重点基础研究发展计划项目 2007CB925200 的资助. 中国科学技术大学季海波教授提供了本书最初的 CTEX 模版. 在 2007~2009 年授课期间, 使用本书讲义的同学和作者进行了多次有益的讨论, 并提出了许多有价值的意见和建议. 作者在此一并向他们表示衷心的感谢! 由于作者水平有限, 书中定有不少错误, 恳请读者指正.

作 者

2009 年 1 月于合肥

# 目 录

|                        |    |
|------------------------|----|
| 前言                     | i  |
| 第 1 章 电磁现象的基本规律        | 1  |
| 1.1 麦克斯韦方程组            | 1  |
| 1.1.1 电荷与电流            | 1  |
| 1.1.2 电荷的电场            | 2  |
| 1.1.3 电流的磁场            | 4  |
| 1.1.4 电磁感应             | 7  |
| 1.1.5 麦克斯韦方程组与洛仑兹力公式   | 8  |
| 1.2 电磁场的能量、动量与角动量      | 9  |
| 1.2.1 电磁场的能量与能流        | 9  |
| 1.2.2 电磁场的动量与动量流       | 12 |
| 1.2.3 电磁场的角动量与角动量流     | 14 |
| 1.3 介质的电磁性质            | 15 |
| 1.3.1 介质的极化            | 16 |
| 1.3.2 介质的磁化            | 17 |
| 1.3.3 介质中的麦克斯韦方程组      | 18 |
| 1.3.4 电磁场边值关系          | 20 |
| 1.3.5 介质中电磁场的能量、动量和角动量 | 23 |
| 1.4 矢势、标势与电磁规范         | 27 |
| 习题 1                   | 29 |
| 第 2 章 静电场              | 34 |
| 2.1 电介质静电学             | 34 |
| 2.1.1 静电场方程和边值关系       | 34 |
| 2.1.2 静电场的能量           | 38 |
| 2.2 导体静电学              | 39 |
| 2.2.1 导体静电系统           | 39 |

|                                |     |
|--------------------------------|-----|
| 2.2.2 电势系数与电容系数 . . . . .      | 44  |
| 2.3 静电边值问题 . . . . .           | 45  |
| 2.3.1 分离变量法 . . . . .          | 45  |
| 2.3.2 电像法 . . . . .            | 57  |
| 2.3.3 格林函数法 . . . . .          | 62  |
| 2.4 电多极矩 . . . . .             | 67  |
| 2.4.1 电势的多极展开与电多极矩 . . . . .   | 67  |
| 2.4.2 电多极矩同外电场的相互作用 . . . . .  | 73  |
| 习题 2 . . . . .                 | 74  |
| <b>第 3 章 静磁场</b> . . . . .     | 84  |
| 3.1 稳恒电流分布与静磁场 . . . . .       | 84  |
| 3.1.1 稳恒电流分布与场方程 . . . . .     | 84  |
| 3.1.2 稳恒电流体系的电场与电荷 . . . . .   | 85  |
| 3.1.3 稳恒电流体系的磁场 . . . . .      | 86  |
| 3.2 静磁场的边值问题 . . . . .         | 92  |
| 3.2.1 矢势法 . . . . .            | 92  |
| 3.2.2 磁标势法 . . . . .           | 98  |
| 3.2.3* 磁像法 . . . . .           | 102 |
| 3.3 磁多极矩 . . . . .             | 106 |
| 3.3.1 矢势的多极展开与磁多极矩 . . . . .   | 106 |
| 3.3.2 磁矩在外磁场中的能量 . . . . .     | 109 |
| 3.3.3 磁矩在外磁场中所受的力和力矩 . . . . . | 110 |
| 习题 3 . . . . .                 | 112 |
| <b>第 4 章* 似稳场</b> . . . . .    | 114 |
| 4.1 似稳近似与似稳场 . . . . .         | 114 |
| 4.1.1 似稳条件 . . . . .           | 114 |
| 4.1.2 似稳场方程, 场的扩散 . . . . .    | 115 |
| 4.2 趋肤效应 . . . . .             | 116 |
| 4.3 似稳电路 . . . . .             | 120 |
| 习题 4 . . . . .                 | 121 |
| <b>第 5 章 电磁波的传播</b> . . . . .  | 122 |
| 5.1 电磁波在绝缘介质中的传播 . . . . .     | 122 |
| 5.1.1 波动方程与平面波解 . . . . .      | 122 |
| 5.1.2 电磁波的能量、动量与角动量 . . . . .  | 124 |
| 5.1.3 电磁波的偏振 . . . . .         | 126 |

|        |                    |     |
|--------|--------------------|-----|
| 5.1.4  | 波包                 | 127 |
| 5.2    | 电磁波在绝缘介质界面上的反射与折射  | 128 |
| 5.2.1  | 反射折射定律             | 128 |
| 5.2.2  | 菲涅耳公式              | 129 |
| 5.2.3  | 反射与透射系数            | 132 |
| 5.2.4  | 全反射                | 134 |
| 5.3    | 电磁波在导电介质中的传播       | 136 |
| 5.3.1  | 导体内的自由电荷分布         | 136 |
| 5.3.2  | 导体内的电磁波, 复介电常数与复波矢 | 137 |
| 5.3.3  | 电磁波在金属表面的反射与折射     | 139 |
| 5.4*   | 介质的色散              | 144 |
| 5.5    | 波导管                | 147 |
| 5.5.1  | 波导管中的电磁波           | 147 |
| 5.5.2  | 波导中的能流             | 154 |
| 5.5.3* | 多连通截面波导            | 156 |
| 5.6    | 谐振腔                | 158 |
| 5.7*   | 电磁波在等离子体中的传播       | 165 |
| 5.7.1  | 等离子体的基本性质          | 166 |
| 5.7.2  | 电磁波在等离子体中的传播       | 168 |
|        | 习题 5               | 173 |
| 第 6 章  | 电磁波的辐射             | 178 |
| 6.1    | 推迟势                | 178 |
| 6.1.1  | 推迟势                | 178 |
| 6.1.2  | 天线辐射               | 181 |
| 6.2    | 多极辐射               | 184 |
| 6.2.1  | 电偶极辐射              | 185 |
| 6.2.2  | 电四极辐射与磁偶极辐射        | 187 |
| 6.3    | 电磁波的衍射             | 192 |
| 6.3.1  | 基尔霍夫公式             | 192 |
| 6.3.2  | 小孔衍射               | 193 |
|        | 习题 6               | 194 |
| 第 7 章  | 狭义相对论              | 198 |
| 7.1    | 狭义相对论基础            | 198 |
| 7.1.1  | 狭义相对论的基本原理         | 198 |
| 7.1.2  | 洛伦兹变换              | 200 |

|        |                    |     |
|--------|--------------------|-----|
| 7.1.3  | 速度变换公式             | 208 |
| 7.1.4  | 相对论的时空效应           | 210 |
| 7.2    | 四维正交变换与四维张量        | 212 |
| 7.2.1  | 四维正交变换             | 213 |
| 7.2.2* | 托马斯进动              | 219 |
| 7.2.3  | 四维张量及其运算           | 222 |
| 7.3    | 相对论力学              | 229 |
| 7.3.1  | 四维速度与四维加速度         | 229 |
| 7.3.2  | 四维动量与质点运动方程        | 231 |
| 7.3.3  | 运动定理               | 238 |
| 7.3.4  | 相对论力学的拉格朗日表述与哈密顿表述 | 240 |
| 7.4    | 相对论电动力学            | 245 |
| 7.4.1  | 四维电流密度与四维势         | 245 |
| 7.4.2  | 电磁场张量与麦克斯韦方程组的协变形式 | 248 |
| 7.5*   | 经典场论               | 252 |
| 7.5.1  | 场的拉格朗日函数与哈密顿函数     | 252 |
| 7.5.2  | 诺埃瑟定理              | 255 |
| 7.5.3  | 电磁场的能动张量与角动量张量     | 262 |
| 习题 7   |                    | 269 |
| 第 8 章  | 带电粒子与电磁场的相互作用      | 276 |
| 8.1    | 运动带电粒子的电磁辐射        | 276 |
| 8.1.1  | 李纳-维谢尔势            | 276 |
| 8.1.2  | 带电粒子的辐射场           | 277 |
| 8.1.3  | 辐射频谱               | 286 |
| 8.2*   | 切伦科夫辐射             | 290 |
| 8.3    | 带电粒子电磁场对粒子自身的反作用   | 292 |
| 8.3.1  | 电磁质量               | 293 |
| 8.3.2  | 辐射阻尼               | 294 |
| 8.3.3  | 谱线的自然宽度            | 295 |
| 8.4    | 电磁波的散射             | 297 |
| 8.4.1  | 自由电子对电磁波的散射        | 297 |
| 8.4.2  | 束缚电子对电磁波的散射        | 299 |
| 8.4.3  | 电磁波的吸收             | 301 |
| 8.4.4  | 稀薄气体的色散模型          | 302 |
| 8.4.5  | 经典电动力学的局限性         | 303 |

---

|                      |     |
|----------------------|-----|
| 习题 8                 | 303 |
| 附录 A 矢量与张量运算公式       | 307 |
| 附录 B $\delta$ 函数及其性质 | 314 |
| 附录 C 球函数             | 316 |
| 附录 D 柱函数             | 320 |
| 附录 E 国际单位制和高斯单位制     | 324 |
| 附录 F 重要物理常数 (国际单位制)  | 330 |
| 索引                   | 331 |
| 主要参考书目               | 338 |

# 第 1 章 电磁现象的基本规律

和定域分布的实体物质不同, 电磁场弥散于空间中, 是空间坐标和时间的函数. 为描写电磁场的运动, 麦克斯韦 (Maxwell) 花了约十年时间总结实验定律, 并将电磁现象与流体力学类比, 最终得到一组以他的名字命名的微分方程. 本章将从电磁现象的实验定律出发, 建立麦克斯韦方程组, 阐述电磁场的运动规律及其与物质的相互作用.

## 1.1 麦克斯韦方程组

### 1.1.1 电荷与电流

很久以前, 人们就发现用毛皮摩擦过的琥珀、玻璃、橡胶等能够吸引像羽毛、头发那样轻小的物体. 物体有了这种吸引轻小物体的性质, 我们就说它带了电, 或者说有了电荷. 自然界中只存在正、负两种电荷. 物体所带电荷数量的多少称为电量. 在国际单位制 (参见附录 E) 中, 电量的单位是库仑. 近代物理表明, 物体所带的电量都是 1 个电荷单位即电子电量的整数倍. 电子电量是  $e \approx -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$  (参见附录 F).

电荷的流动形成电流. 它可以用电流密度矢量  $\mathbf{j}$  来描写. 电流密度的方向沿 (正) 电荷速度方向, 大小为单位时间内垂直通过单位面积的电量. 如图 1.1 所示, 考虑电流经过的一小面元  $d\mathbf{S}$ . 设电荷密度 (即单位体积内的电量) 为  $\rho$ , 电荷速度为  $\mathbf{v}$ , 则  $d\mathbf{t}$  时间内通过面积  $d\mathbf{S}$  的电量为体积  $d\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}d\mathbf{t}$  内的电荷数, 即

$$dQ = \rho d\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}d\mathbf{t}, \quad (1.1.1)$$

因此

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}. \quad (1.1.2)$$

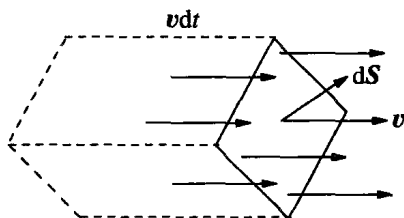


图 1.1 流过面元的电流

将上式对任一截面积分, 可得通过该截面的电流强度:

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.1.3)$$

实验证明, 电荷是守恒的. 如果在空间任意取一封闭曲面  $S$ , 则从  $S$  流出的电量应等于它所包围区域  $V$  内减少的电量, 即

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (1.1.4)$$

应用高斯 (Gauss) 散度定理把左端的面积分转化为体积分, 可得

$$\int_V \left( \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0. \quad (1.1.5)$$

式中

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \equiv \sum_{i=x,y,z} \mathbf{e}_i \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \quad (1.1.6)$$

为矢量微分算符 (参见附录 A). 因为式 (1.1.5) 中的积分区域是任意的, 所以

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (1.1.7)$$

上式称为连续性方程, 是电荷守恒定律的微分形式. 如果电流是稳恒的, 则电荷密度分布不随时间而变, 式 (1.1.7) 变为

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (1.1.8)$$

上式表明稳恒电流是无源的, 其流线为闭合曲线.

### 1.1.2 电荷的电场

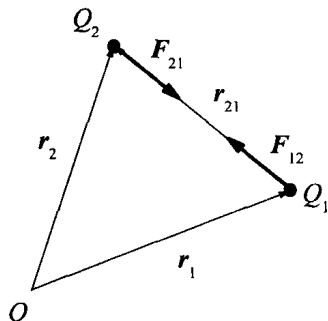


图 1.2 两个点电荷间的库仑力

1785 年, 库仑 (Coulomb) 通过实验发现了点电荷之间相互作用的定量规律. 如图 1.2 所示, 设两个点电荷的电量分别为  $Q_1$  和  $Q_2$ , 位矢为  $\mathbf{r}_1$  和  $\mathbf{r}_2$ , 则  $Q_2$  受到  $Q_1$  的作用力为

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2 Q_1}{r_{21}^3} \mathbf{r}_{21}. \quad (1.1.9)$$

其中  $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ,  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$  为真空介电常数或真空电容率 (参见附录 F). 式

(1.1.9) 称为库仑定律, 在电磁学发展史上占有重要地位. 库仑定律的发现使人们对电现象的探索从定性研究过渡到定量研究. 库仑力平方反比性质隐含着光子静质量为零这一深刻物理内涵. 现代物理证明, 如果库仑力反比于电荷距离的  $2 + \delta$  次方, 则  $\delta$  的上限为  $10^{-15}$ .

库仑力满足牛顿 (Newton) 第三定律, 即

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}. \quad (1.1.10)$$

近代物理认为, 电荷之间的相互作用是通过场来传递的. 电场的强弱可以用电场强度 (简称场强) 来描写. 它是单位检验电荷所受的力. 如果把  $Q_2$  作为检验电荷, 则点电荷  $Q_1$  在  $\mathbf{r}_2$  点所激发的场强为

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_{21}}{Q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r_{21}^3} \mathbf{r}_{21}. \quad (1.1.11)$$

实验证明, 电场满足线性叠加原理. 设在空间中存在  $N$  个点电荷  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$ , 分别位于  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ , 则它们在  $\mathbf{r}$  点所产生的电场强度为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (1.1.12)$$

如果电荷是连续地分布在一个空间区域  $V$  内, 电荷密度为  $\rho(\mathbf{r}')$ , 则场强

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'. \quad (1.1.13)$$

为了导出电场满足的微分方程, 我们先对场强 (1.1.13) 求散度. 利用数学公式 [参见附录 A, 式 (A.57)]

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\nabla^2 \frac{1}{r} = 4\pi\delta(\mathbf{r}), \quad (1.1.14)$$

可得

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV', \quad (1.1.15)$$

即

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}. \quad (1.1.16)$$

这就是微分形式的高斯定理, 相应的积分形式为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (1.1.17)$$

其中,  $Q$  为封闭曲面  $S$  所包围区域内的电量.

我们还可以求出场强的旋度

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = - \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \nabla \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = 0. \quad (1.1.18)$$

这里用到了数学公式  $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$  [参见附录 A, 式 (A.29)]. 注意, 上式是从静电场得到的. 当场随时间变化时, 我们需要对它进行修正.

### 1.1.3 电流的磁场

1820 年, 丹麦物理学家奥斯特 (Oersted) 首先发现了电流的磁效应. 之后, 毕奥 (Biot)、萨伐尔 (Savart) 和安培 (Ampere) 做了一系列实验, 找出了电流之间相互作用的定量关系.

设真空中存在两个稳恒电流元  $j_1 dV_1$  和  $j_2 dV_2$ , 则电流元  $j_2 dV_2$  受到  $j_1 dV_1$  的作用力为

$$d\mathbf{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{j_2 dV_2 \times (j_1 dV_1 \times \mathbf{r}_{21})}{r_{21}^3}. \quad (1.1.19)$$

其中,  $\mu_0 = 1.26 \times 10^{-6} \text{ H/m}$  为真空磁导率 (参见附录 F). 上式称为安培定律. 它表明电流元之间的相互作用也服从平方反比律, 但不满足牛顿第三定律,  $d\mathbf{F}_{12} \neq -d\mathbf{F}_{21}$ .

类似于电场, 我们可以从安培定律引入磁场的概念. 不妨将式 (1.1.19) 改写成

$$d\mathbf{F}_{21} = j_2 dV_2 \times \mathbf{B}, \quad (1.1.20)$$

其中

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{j_1 dV_1 \times \mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} \quad (1.1.21)$$

为第一个电流元在第二个电流元处产生的磁感应强度<sup>①</sup>. 磁感应强度也是可以线性叠加的. 如果电流  $j$  连续地分布于一个空间区域, 则它所产生的磁感应强度为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV', \quad (1.1.22)$$

上式称为毕奥 - 萨伐尔定律.

我们现在来求  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  的散度. 先将式 (1.1.22) 改写成

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int j(\mathbf{r}') \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (1.1.23)$$

①  $\mathbf{B}$  没有被称为磁场强度是由于历史的原因.

注意到  $\nabla$  只对  $\mathbf{r}$  起作用, 与  $\mathbf{r}'$  无关, 可得

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (1.1.24)$$

由矢量分析公式  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0$  [参见附录 A, 式 (A.30)], 可知

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.1.25)$$

可见稳恒电流所激发的磁场是无源场, 磁感应线总是闭合曲线.

再来计算  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  的旋度. 利用矢量分析公式 [参见附录 A, 式 (A.32)]

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}, \quad (1.1.26)$$

可得

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left[ \nabla \times \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left\{ \nabla \left[ \nabla \cdot \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] - \nabla^2 \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \end{aligned} \quad (1.1.27)$$

利用

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.1.28)$$

和数学公式 (1.1.14), 可得

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \mu_0 \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV'. \quad (1.1.29)$$

对第 1 项进行分部积分得

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' + \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (1.1.30)$$

因电流是稳恒的,  $\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$  [参见方程 (1.1.8)], 所以

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (1.1.31)$$

这就是安培环路定理的微分形式, 相应的积分形式为

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I. \quad (1.1.32)$$

$I$  为环路  $L$  所包围的电流.

式 (1.1.31) 是从稳恒电流情形得到的. 对于一般的非稳恒电流, 该方程应该如何修改呢? 对式 (1.1.31) 两边取散度, 我们发现左端  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$ . 但根据连续性方程, 右端  $\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} = -\mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$ , 矛盾. 为了消除这一矛盾, 麦克斯韦引入了位移电流的假设. 将高斯定理 (1.1.16) 代入连续性方程 (1.1.7) 可得

$$\nabla \cdot \left( \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0. \quad (1.1.33)$$

麦克斯韦把上式括号中的第 2 项叫做位移电流:

$$\mathbf{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.1.34)$$

我们将方程 (1.1.31) 中的  $\mathbf{j}$  用  $\mathbf{j} + \mathbf{j}_D$  取代, 便得到一般的关系:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.1.35)$$

**例 1.1.1** 电流  $I$  均匀分布于半径为  $R$  的无限长直导线内, 求空间各点的磁感应强度, 并计算其旋度.

**解** 取柱坐标系的  $z$  轴沿电流方向. 在与导线垂直的平面内作一半径为  $\eta$  的圆形环路, 圆心在导线轴上. 根据对称性, 在圆周各点的磁感应强度有相同的值, 方向沿圆周环绕方向. 当  $\eta > R$  时, 通过圆内的总电流为  $I$ . 由安培环路定理得

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\eta B = \mu_0 I, \quad (1.1.36)$$

所以  $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\eta}$ , 写成矢量形式为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\eta} \mathbf{e}_\phi \quad (\eta > R). \quad (1.1.37)$$

式中  $\mathbf{e}_\phi$  为圆周环绕方向的单位矢量.

当  $\eta < R$  时, 通过圆内的总电流为

$$\mathbf{j} \cdot \pi\eta^2 = \frac{I}{\pi R^2} \pi\eta^2 = \frac{\eta^2}{R^2} I, \quad (1.1.38)$$

应用安培环路定理得

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\eta B = \mu_0 I \frac{\eta^2}{R^2}, \quad (1.1.39)$$

所以

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I \eta}{2\pi R^2} \mathbf{e}_\phi \quad (\eta < R). \quad (1.1.40)$$

利用柱坐标系下的旋度公式 [参见附录 A, 式(A.74)]

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{a} = & \left( \frac{1}{\eta} \frac{\partial a_z}{\partial \phi} - \frac{\partial a_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\eta + \left( \frac{\partial a_\eta}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \eta} \right) \mathbf{e}_\phi \\ & + \left[ \frac{1}{\eta} \frac{\partial(\eta a_\phi)}{\partial \eta} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial a_\eta}{\partial \phi} \right] \mathbf{e}_z,\end{aligned}\quad (1.1.41)$$

可求出  $\mathbf{B}$  的旋度:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \begin{cases} 0 & (\eta > R), \\ \frac{\mu_0 I}{\pi R^2} \mathbf{e}_z & (\eta < R). \end{cases} \quad (1.1.42)$$

### 1.1.4 电磁感应

自从发现了电流的磁效应后, 人们一直致力于寻找其逆效应, 即磁场能否产生电流, 但许多尝试都失败了. 直到 1831 年法拉第 (Faraday) 通过实验发现了变化磁场和电场之间的联系. 变化磁场在一个闭合回路中引起的电流叫做**感应电流**, 如图 1.3 所示. 与这种电流相应的电动势称为**感应电动势**. 它可表示为电场强度沿回路的线积分:

$$\mathcal{E} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.1.43)$$

实验表明, 感应电动势等于回路所围曲面中磁通量的变化率:

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.1.44)$$

上式称为**法拉第电磁感应定律**.

如果回路在空间是固定的, 则式 (1.1.44) 可改写成

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.1.45)$$

应用斯托克斯 (Stokes) 定理, 将左端化为面积分, 可得

$$\int_S \left( \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (1.1.46)$$

由回路曲面的任意性可知

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.1.47)$$

当  $\mathbf{E}$  中包含静电场时, 上式仍然成立, 因为静电场对旋度没有贡献 [参见方程 (1.1.18)].

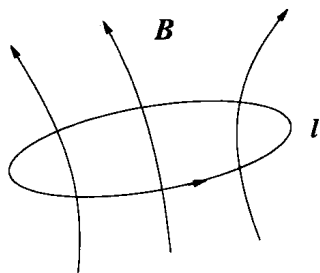


图 1.3 电磁感应