算學小叢書

初等幾何學
圓錐曲線

董滌塵編

商務印書館發行

算學小叢書

初等幾何學

圓錐曲線

董滌塵編

商務印書館發行

序

圓錐曲線之起源，遠在希臘．其時有三大問題出，僅用直線及圓不能解，於是不得不別求他途，而圓錐曲線以興．故其興，乃興於學者求知心切不能自已也．其後集大成於亞波羅尼氏(Apollonius)．當時之研究圓錐曲線者，須以三種正圓錐截得之．亞氏合之於一，三曲線乃歸一統，而理論得以大公．著論八卷，冠絕當世．此其成，成於精益求精不封故步也．希臘亡，亞氏書散佚其半．在西歷 1658 至 1710 年間，歐西學者累次求之於亞剌伯書籍中．不足，更覓其原目而從事補索．於是亞氏之論略備，而前所已知圓錐曲線之性質又全．此其全，乃全於學者之探索情殷不得不止也．嗣後學者探求方法，轉而入於解析及射影之途．初等方面，遂由是而止．論其法，固後來者居上，而欲奠厥基礎，則亞氏之途不能廢也．我國於此，在前清時李壬叔先生曾迻譯一書．而練習之問題不備，學者苦之．邇來學校雖多，然以初等幾何研究圓錐曲線者寂焉無所聞見．大學之數理科學生雖已修畢解析及射影諸方法，而返眞還

璞，易道以觀，乃瞠然不知所答．意者於求知之道或尙有缺憾乎？不佞嘗於大同大學中略講此科，俾學者於初等方法稍知控馭，今董子滌塵編輯此書，持稿以示，喜其與不佞之意默契．受而閱之，則條例旣精，筆復暢達，附題分章，甚便初學，而純從幾何入手，絕不假借解析以取巧圖便，尤得亞氏之眞．董子蓋集求精之念探索之勤於一身者．出以問世，補益後學，豈淺鮮哉．故樂爲之序．

吳在淵識

目 錄

初等幾何學

圓 錐 曲 線

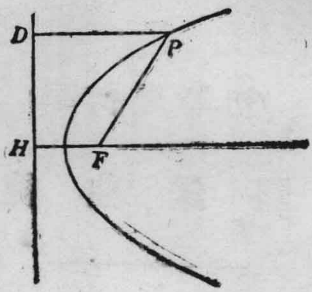
第 一 章

緒 言

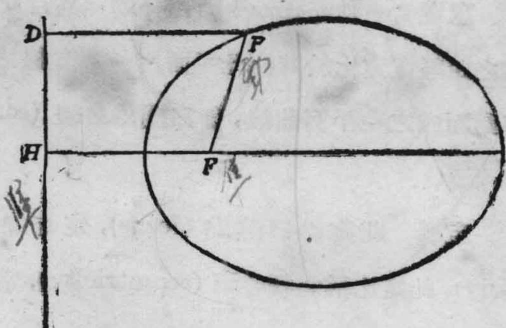
1. **定義** 一動點在一平面內移動，其自此平面內一定點之距離恆定比於其與此平面內一定直線之距離；如此移動而成之一平面曲線，卽曰**圓錐曲線** (conic section).

2. **定義** 此定點曰**焦點** (focus), 定直線曰**準線** (directrix). 此定比稱爲**離心率** (eccentricity), 常以 e 表之.

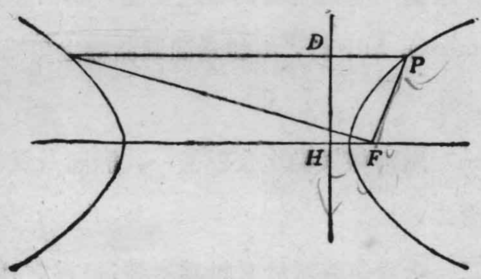
3. 若離心率等於 1, 卽曲線上之任何點，其自焦點之距離等於其自準線之距離，則此圓錐曲線稱爲**拋物線** (parabola). 如下圖.



4. 若離心率小於 1, 卽曲線上之任何點, 其自焦點之距離恆小於其自準線之距離, 則此圓錐曲線稱爲橢圓 (ellipse). 如下圖.



5. 若離心率大於 1, 卽曲線上之任何點, 其自焦點之距離恆大於其自準線之距離, 則此圓錐曲線稱爲雙曲線 (hyperbola). 如下圖.



視以上諸圖，F 爲焦點，DH 爲準線，P 爲動點．若自 P 至焦點之距離與其自準線之距離之比爲定比，則動點 P 卽描成一圓錐曲線．此圓錐曲線之爲拋物線，橢圓或雙曲線，則視離心率 e 之等於，小於或大於 1 而定；換言之，卽視 $PF=,<$ 或 $>PD$ 而定．

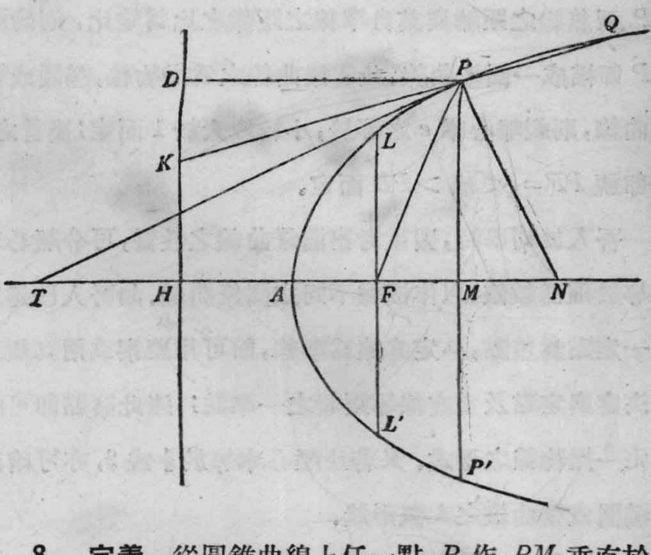
吾人於初學時，因欲考察圓錐曲線之性質，可令離心率等於種種數值，以作種種不同之圓錐曲線．如吾人已選定一定點爲焦點，一定直線爲準線，卽可用視察或兩脚規以決定與定點及定直線等距離之一羣點；連此諸點卽可略定一拋物線之形式．又若使離心率等於 $\frac{1}{2}$ 或 2，亦可繪出橢圓或雙曲線之大概形狀．

6.　**定義**　通過焦點而垂直於準線之線，稱曰圓錐曲線之軸 (axis).

7. 定義 圓錐曲線與軸之交點，稱曰圓錐曲線之頂點 (vertex). 如下圖，A 卽爲圓錐曲線之頂點，AH 卽爲其軸.

注意一 拋物線與軸之交點僅一，橢圓及雙曲線與軸之交點有二.

注意二 圓錐曲線關於其軸爲對稱；換言之，卽在軸上部之曲線與在軸下部之曲線，全相等而在對稱位置.



8. 定義 從圓錐曲線上任一點 P 作 PM 垂直於軸，則 PM 稱爲點 P 之縱線 (ordinate), AM 稱爲點 P 之

橫線 (abscissa).

9. **定義** 若延長 PM, 又遇曲線於 P', 則 PP' 稱為**倍縱線**(double ordinate).

10. **定義** 過焦點之倍縱線稱爲**通徑**(latus rectum).

如上圖, LL' 即爲通徑.

11. **定義** 任意一直線割一圓錐曲線於二點, 則此直線稱曰**割線** (secant), 此二點間之線分稱曰此圓錐曲線之**弦** (chord).

如上圖, KPQ 爲割線, PQ 爲弦.

12. **定義** 通過焦點之任意弦稱曰**焦點弦** (focal chord).

13. **定義** 從任意一點至焦點之距離, 稱曰此點之**焦點距離** (focal distance). 若此點在曲線上, 則其與焦點之距離稱曰此點之**焦點半徑** (focal radius).

14. **定義** 如上圖, 若 Q 點漸漸向 P 點移動, 至完全與 P 重合, 則割線之極限位置 PT, 即稱爲在 P 點之**切線** (tangent); 切於曲線之點曰**切點** (point of contact).

15. **定義** 若從圓錐曲線外一點, 作此曲線之兩切線, 則連結兩切點之直線, 曰此兩切線之**切點弦** (chord

of contact).

16. **定義** 從 P 作切線 PT 之垂線 PN, 交軸於 N, 則 PN 稱爲在 P 點之**法線** (normal).

17. **定義** 設曲線上 P 點之縱線,過軸於 M, 在此點之切線及法線過軸於 T 及 N, 則 TM 稱爲**次切線**(subtangent), NM 稱爲**次法線** (subnormal).

18. **圖形中所表西文字母之注意** 圖形中所表之西文字母亦爲吾人所宜注意者，若字母彼此雜用無一定表法，則易致觀念混亂．故以下各圖中，凡重要之處，均定一適當字母以表之，如 A 表頂點，F 表焦點，H 表軸與準線之交點等等．書中於講述之際，往往省略頂點或焦點等字，而僅以 A 或 F 表之，即命題中所有圖形亦未必逐一畫出，而僅以字母表之．故讀者一遇此等文字，即知其所表爲何，而曲線之性質亦可稍稍印入腦中矣．

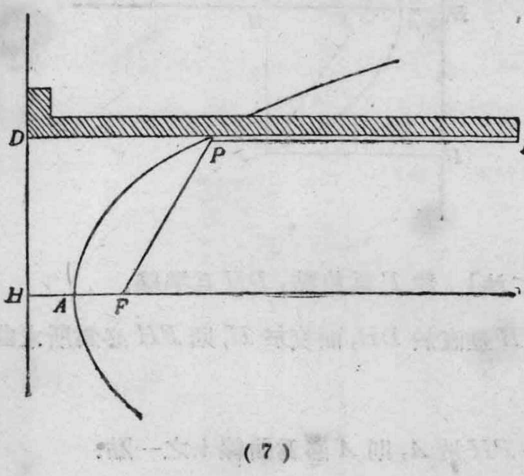
第二章

拋物線

19. **定義** 拋物線者,一平面曲線為一動點之軌跡;此點在平面內移動常與此平面內之一定點及一定直線為等距離.(參閱 § 3).

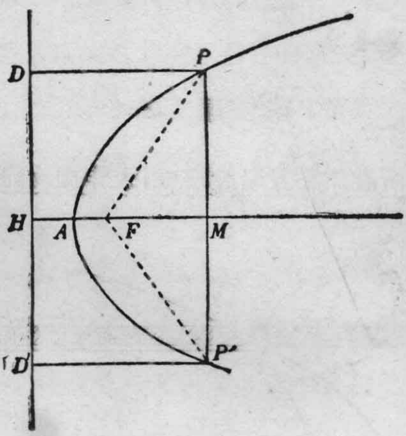
問題一

20. 有所設焦點及所設準線,求作拋物線.



[第一法]　設 DE 爲一直線尺，其一端 D 緊附於所設準線 DH，此尺與準線垂直，能沿之移動．取一線與 DE 等長，釘其一端於 E，而釘其他端於所設焦點 F．以鉛筆尖 P 緊貼此線於直線尺上；於是使直線尺沿準線 DH 垂直移動，P點即描成一拋物線如圖．

因直線尺在任何位置，常 $PF=PD$ 也．



[第二法]　設 F 爲焦點，DH 爲準線．

作 FH 垂直於 DH，而交於 H，則 FH 必爲所求曲線之軸．　§ 6

平分 FH 於 A，則 A 必爲曲線上之一點．　§ 19

在軸內於 A 之右取任意點 M, 作一垂直於軸之直線. 以 F 爲中心, HM 爲半徑畫兩弧, 截此直線於 P, P', 則 P, P' 必爲曲線上之二點.

何則, 設作 $PD, P'D'$ 垂直於準線, 則

$$PD = HM, \quad P'D' = HM;$$

然從作法,
$$HM = PF = P'F.$$

$$\therefore \quad PD = PF, \quad P'D' = P'F.$$

故 P, P' 爲曲線上之二點.　§ 19

依此可得曲線之各點, 過此諸點作一曲線連之, 卽爲所求之抛物線.

21. **推論一**　若從頂點 A 作軸之垂線, 則此曲線全在此垂線之一側.

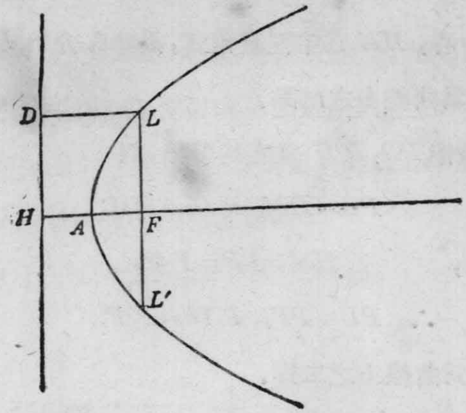
22. **推論二**　因 PP' 平分於 M, 故可知軸分曲線爲二對稱部分.

定　理　一

23. 通徑等於焦點與頂點距離之四倍.

設 LL' 爲通徑.

求證:
$$LL' = 4\,AF.$$



[證] 作 $LD \perp DH$,

則 $LF = LD$, § 19

而 $LD = HF$.

$\therefore \quad LF = HF$

$= 2\,AF$. ($\because\ AF = AH$, § 19)

同理 $L'F = HF$

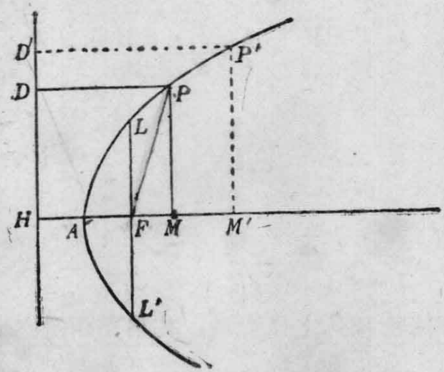
$= 2\,AF$.

$\therefore \quad LL' = LF + L'F$

$= 4\,AF$。

定理二

24. 拋物線上任意一點之縱線，爲其橫線及通徑之比例中項.



設 P 爲拋物線上之任意一點，PM 爲其縱線，AM 爲其橫線；LL' 爲通徑.

求證：　$\overline{PM}^2=LL'\cdot AM=4\,AF\cdot AM.$

[證]　$\overline{PM}^2=\overline{PF}^2-\overline{FM}^2$

$=\overline{PD}^2-\overline{FM}^2$　§ 19

$=\overline{HM}^2-\overline{FM}^2$

$=(AM+AF)^2-(AM-AF)^2$

$=2\,AM\cdot AF+2\,AM\cdot AF$

$$=4\,AF\cdot AM$$

$$=LL'\cdot AM.$$

25.　**推論一**　曲線上一點之橫線長者，其縱線亦長.

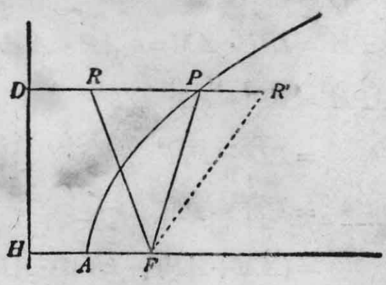
26.　**推論二**　兩縱線之平方比等於其兩橫線之比.

$$\frac{\overline{PM}^2}{\overline{P'M'}^2}=\frac{4\,AF\cdot AM}{4\,AF\cdot AM'}$$

$$=\frac{AM}{AM'}.$$

定　理　三

27.　在拋物線外之任意點，其焦點距離必大於其與準線之距離.在拋物線內之任意點，其焦點距離必小於其與準線之距離.



(1)　設 R 爲拋物線外之任意點；RD 垂直於準線.