



2010硕士学位研究生入学资格考试

扈志明 刘庆华 编

GCT 数学

历年真题分类精解

(2003—2009)

3-44
44



清华大学出版社

2010硕士学位研究生入学资格考试

庖志明 刘庆华 编

GCT 数学

历年真题分类精解
(2003—2009)

清华大学出版社
北京

013-44
H1644

内 容 简 介

本书对 2003—2009 年硕士学位研究生入学资格考试的数学试题按知识点进行分类解析,以帮助考生对此考试的试题形式、试题的难度以及解答试题时的方式方法有更加深入的了解,提高应试能力。另外,还汇总了 7 年的试题。

本书可供准备参加硕士学位研究生入学资格考试的备考人员以及辅导教师使用。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。滴水涂抹后标识图案消失,水干后图案再现;揭下标识表膜置于白纸上,用彩笔涂抹后图案可透印。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

2010 硕士学位研究生入学资格考试 GCT 数学历年真题分类精解:2003—2009/扈志明,刘庆华编.--北京:清华大学出版社,2010.1

ISBN 978-7-302-21916-3

I. ①2… II. ①扈… ②刘… III. 高等数学—研究生—入学考试—解题 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 000009 号

责任编辑:刘 颖

责任校对:王淑云

责任印制:李红英

出版发行:清华大学出版社

<http://www.tup.com.cn>

社 总 机:010-62770175

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

邮 编:100084

邮 购:010-62786544

印 装 者:北京鑫海金澳胶印有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185×230 印 张:8 字 数:169 千字

版 次:2010 年 1 月第 1 版 印 次:2010 年 4 月第 3 次印刷

印 数:7001~10000

定 价:15.00 元

产品编号:036720-01

出版

说明

硕士学位研究生入学资格考试

Introduction

硕士学位研究生入学资格考试(Graduate Candidate Test, GCT)是国务院学位委员会办公室组织的全国统一考试,考试始于2003年,当时名为“工程硕士专业学位研究生入学资格考试”(简称GCT-ME),考试适用范围为报考工程硕士的考生。2004年,适用范围增加了报考农业推广和兽医专业硕士的考生,考试名称去掉了“工程”二字。2005年,国务院学位委员会办公室组织专家对2003版考试指南(即考试大纲)进行了修订,同时考试适用范围又增加了报考风景园林硕士,以及高等学校教师、中等职业学校教师在职攻读硕士学位的考生,考试名称改为“硕士学位研究生入学资格考试”。GCT考试属于综合素质型考试。考试试卷由四部分构成:语言表达能力考试、数学基础能力测试、逻辑推理能力测试、外国语运用能力测试。试卷满分400分,每部分各占100分。考试时间为3个小时,每部分为45分钟。考试试题均为45分钟。考试试题均为客观选择题。

这套《硕士学位研究生入学资格考试历年真题分类精解(2003—2009)》系列,分为语文、数学、英语、逻辑4册,对设立硕士学位研究生入学资格考试以来的7次考试的考题中所考的考点,进行分类汇总和分析,并安排在年初出版,使考生较早地全面了解硕士学位研究生入学资格考试的考点分布及试题难度,以便更好地安排备考的复习计划。

清华大学出版社是最早出版GCT考前辅导用书的出版机构。2003年工程硕士专业学位研究生入学资格考试指南(大纲)发布不久,我们出版了由全国工程硕士专业学位教育指导委员会组织编写的《全国工程硕士专业学位研究生入学资格考试考前辅导教程》丛书,包括语文、数学、英语、逻辑4册,丛书全面系统

地诠释了考试大纲中所列的知识点及其难度要求。2004 年,根据 2003 年首次考试的命题和考试情况,对考前辅导教程系列进行修订再版,并且特别邀请教程系列的作者编写了《硕士专业学位研究生入学资格考试模拟试题与解析》系列,同样分为语文、数学、英语、逻辑 4 册。这个系列对考试中可能涉及的知识点以试题的形式进行诠释,作为考前辅导教程的配套资料,供考生复习时进行强化训练使用。以上的两个系列连同之后出版的《英语核心词汇精解》和《综合模拟试卷》两本书,形成了覆盖系统复习、训练提高、模拟冲刺等考生备考各阶段需求的比较完整的备考辅导书体系。

GCT 考试指南(大纲)一般在每年 4 月进行修订。为及时反映考试大纲的修订情况及 GCT 考试命题发展趋势的变化,不断提高图书质量,我们每年都要对上述图书修订改版一次,并于每年 5 月出版发行。真题解析系列由于不涉及大纲变化的影响,因此安排在每年 1 月出版。经过多年的积累和提高,清华版 GCT 考前辅导用书以其权威性、严谨性、全面性和实用性,给广大考生复习和备考提供了方便,赢得了广大考生的欢迎和信赖。

欢迎广大读者选用本系列图书,祝大家考试成功!

清华大学出版社

2010 年 1 月

本书是《GCT 考试指南(大纲)》的配套图书,旨在帮助考生系统复习、训练提高、模拟冲刺等考生备考各阶段需求的比较完整的备考辅导书体系。本书根据 2003 年首次考试的命题和考试情况,对考前辅导教程系列进行修订再版,并且特别邀请教程系列的作者编写了《硕士专业学位研究生入学资格考试模拟试题与解析》系列,同样分为语文、数学、英语、逻辑 4 册。这个系列对考试中可能涉及的知识点以试题的形式进行诠释,作为考前辅导教程的配套资料,供考生复习时进行强化训练使用。以上的两个系列连同之后出版的《英语核心词汇精解》和《综合模拟试卷》两本书,形成了覆盖系统复习、训练提高、模拟冲刺等考生备考各阶段需求的比较完整的备考辅导书体系。

GCT 考试指南(大纲)一般在每年 4 月进行修订。为及时反映考试大纲的修订情况及 GCT 考试命题发展趋势的变化,不断提高图书质量,我们每年都要对上述图书修订改版一次,并于每年 5 月出版发行。真题解析系列由于不涉及大纲变化的影响,因此安排在每年 1 月出版。经过多年的积累和提高,清华版 GCT 考前辅导用书以其权威性、严谨性、全面性和实用性,给广大考生复习和备考提供了方便,赢得了广大考生的欢迎和信赖。

欢迎广大读者选用本系列图书,祝大家考试成功!

清华大学出版社
2010 年 1 月

前

言

Foreword

硕士学位研究生入学资格考试(Graduate Candidate Test)简称为“GCT”

考试,是国务院学位委员会办公室组织的全国统一考试,自 2003 年设立以来,已经过了 7 年时间。与起步时相比,现在的试卷结构与试题类型更趋合理,试题难度更趋稳定,这种考试形式也逐步得到了考生与社会的认可。为了更好地帮助大家进行“GCT”考试的备考工作,我们对过去 7 年的“GCT”考题进行了分析,并整理成了大家手中的这本小册子。在编写的过程中,对材料的处理主要是基于以下几点考虑来进行的:

1. 为了便于考生对试题的内容有一个总体的了解和认识,本书仍将试题按内容分成五大类,即算术、初等代数、几何与三角、一元函数微积分、线性代数来解析。

2. 为了便于考生对每部分内容中的试题进行分类、归纳和总结,对考点有充分的理解和认识,我们将每部分中的试题按知识点和类型进行了进一步的分类,如算术部分的分数运算问题、运动问题等,微积分中定积分部分的概念与性质问题、运算问题、应用问题等。对于每道试题,列出题目后,先给出答案;然后在“分析”的栏目下,具体指出此题所考查的主要知识点所在,以便读者对试题的考点及考点的分布情况有更细致的了解;最后给出详细的解析过程。

3. 为了便于考生了解与总结一些选择题的常见解法,我们对相当数量的试题都给出了多种解法。尤其是一些有效的特殊解法,像特殊值代入法、排除法、验证法等,只要考生细细品味,对大家肯定会有帮助,提升应对考试的实战能力。当一个题目给出多种解法时,一般第一种解法为常规的解法,其他解法大多具有一定的技巧性。

4. 为了便于考生对试卷形式及试题难度有一个整体的概念,我们将每年的

试题完整地附在了本书的最后。

我们参与了多年的“GCT”考试辅导工作,接触了众多的考生,深知大家在备考过程中的困难和困惑。我们也从不怀疑自己想为考生做点事情的初衷,但限于各种原因,本书肯定会有很多需要改进的地方,希望大家不吝赐教,以便我们做得更好。

作者

2009年12月

“GCT” (Graduate Candidate Test) 简称“GCT”

自2003年设立以来,“GCT”作为全国统一的入学资格考试,受到了广大考生的关注和重视。随着社会的不断发展,对人才的要求也在不断提高,“GCT”考试的内容和形式也在不断地进行改革和创新。本书作为“GCT”考试的辅导资料,旨在帮助考生了解考试的基本情况,掌握考试的重点和难点,提高考试的效率和成绩。本书的内容涵盖了“GCT”考试的所有科目,包括数学、逻辑、语言、英语等。本书的编写参考了大量的相关资料,力求做到准确、全面、实用。本书的出版得到了广大考生的支持和鼓励,我们将继续努力,为考生提供更好、更优质的辅导服务。

本书的内容分为以下几个部分: 1. 数学: 包括代数、几何、概率、统计等。2. 逻辑: 包括形式逻辑、非形式逻辑等。3. 语言: 包括汉语、英语等。4. 英语: 包括听力、阅读、写作等。5. 综合: 包括其他相关知识。本书的编写参考了大量的相关资料,力求做到准确、全面、实用。本书的出版得到了广大考生的支持和鼓励,我们将继续努力,为考生提供更好、更优质的辅导服务。

本书的编写参考了大量的相关资料,力求做到准确、全面、实用。本书的出版得到了广大考生的支持和鼓励,我们将继续努力,为考生提供更好、更优质的辅导服务。本书的内容分为以下几个部分: 1. 数学: 包括代数、几何、概率、统计等。2. 逻辑: 包括形式逻辑、非形式逻辑等。3. 语言: 包括汉语、英语等。4. 英语: 包括听力、阅读、写作等。5. 综合: 包括其他相关知识。

本书的编写参考了大量的相关资料,力求做到准确、全面、实用。本书的出版得到了广大考生的支持和鼓励,我们将继续努力,为考生提供更好、更优质的辅导服务。

目

录

Contents

2. 矩阵	75
(1) 矩阵的运算与性质	75
(2) 矩阵的秩	77
(3) 线性相关与线性无关	79
(4) 线性方程组	81
4. 线性方程组	82
(1) 线性方程组	82
(2) 非齐次线性方程组	86
5. 矩阵的特征值和特征向量	86
(1) 基本概念与运算	86
(2) 可对角化的充要条件	88
附录 2003—2009 年 GCT 数学基础题	91
第一部分 算术	1
1. 数的概念与运算	1
(1) 数的概念与性质	1
(2) 分数运算	2
(3) 比与百分数的运算	3
(4) 算术表达式求值	5
2. 简单应用问题	9
(1) 植树问题	9
(2) 运动问题	10
(3) 求单位量与求总量的问题	12
(4) 其他问题	12
第二部分 初等代数	14
1. 数与代数式	14
(1) 乘方、开方运算	14
(2) 绝对值的概念与性质	14
(3) 复数的基本概念与简单运算	15
(4) 简单代数公式	16
2. 集合与函数	18
3. 代数方程和一元二次函数	19
(1) 一元二次方程	19
(2) 二元一次方程组	22

(3) 一元二次函数	22
4. 不等式	24
5. 数列	25
6. 排列、组合、二项式定理	27
7. 古典概率问题	28
(1) 等可能事件的概率	28
(2) 简单概率公式	30
第三部分 几何与三角	31
1. 平面几何	31
(1) 求面积问题	31
(2) 求长度问题	35
(3) 求角度问题	36
2. 空间几何图形	38
3. 三角函数	41
4. 平面解析几何	43
(1) 平面直线问题	43
(2) 平面几何与平面解析几何的综合问题	46
(3) 二次曲线问题	48
第四部分 一元函数微积分	51
1. 函数、极限、连续	51
(1) 函数	51
(2) 极限	52
(3) 连续	54
2. 导数与微分的概念与运算	54
(1) 概念	54
(2) 运算	56
3. 导数的应用	57
4. 不定积分	62
5. 定积分	63
(1) 定积分的概念与性质	63
(2) 定积分的运算	66
(3) 定积分的应用	69
第五部分 线性代数	72
1. 行列式	72

2. 矩阵	75
(1) 矩阵的运算与性质	75
(2) 逆矩阵	77
3. 向量组	79
(1) 线性相关与线性无关	79
(2) 秩与极大线性无关组	81
4. 线性方程组	82
(1) 齐次线性方程组	82
(2) 非齐次线性方程组	85
5. 矩阵的特征值和特征向量	86
(1) 基本概念与运算	86
(2) 可对角化的充要条件	88
附录 2003—2009 年 GCT 数学基础能力测试题	91
2003 年 GCT 数学基础能力测试题	91
2004 年 GCT 数学基础能力测试题	94
2005 年 GCT 数学基础能力测试题	98
2006 年 GCT 数学基础能力测试题	101
2007 年 GCT 数学基础能力测试题	105
2008 年 GCT 数学基础能力测试题	109
2009 年 GCT 数学基础能力测试题	112

A. 1 场

B. 2 场

C. 3 场

D. 4 场

答: B.

分析 本题主要考查了奇偶数的运算性质及选择题的一种特殊解法——排除法.

解法 1 由于两支球队进行一场比赛后,两队的比赛场次数要各加 1,所以 A、B、C、D、E 五支球队的所有比赛场次之和一定是 2 的倍数,即为偶数.已知 A、B、C、D 四队的比赛场次之和为 $4+3+2+1=10$,所以 E 队的比赛场次只能是偶数,这样就排除了选项 A、C.又因为 D 队只赛一场且已与 A 队赛完,所以 E 队的比赛场次不能是 4,这样选项 D 也被排除.

故正确选项为 B.

解法 2 本题也可以通过以下赛程表得到正确选项 B.

	A	B	C	D	E
A	×	已赛	已赛	已赛	已赛
B	已赛	×	已赛		已赛
C	已赛	已赛	×		
D	已赛			×	
E	已赛	已赛			×

第一部分 算 术

1. 数的概念与运算

(1) 数的概念与性质

1. (2003) 记不超过 10 的质数的算术平均数为 M , 则与 M 最接近的整数是[].

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

答 C.

分析 本题主要考查了质数的概念及加法、除法运算.

由于不超过 10 的质数只有 2, 3, 5, 7, 它们的算术平均数为

$$M = \frac{2+3+5+7}{4} = 4.25,$$

所以与 M 最接近的整数是 4.

故正确选项为 C.

2. (2004) A, B, C, D, E 五支篮球队相互进行循环赛, 现已知 A 队已赛过 4 场, B 队已赛过 3 场, C 队已赛过 2 场, D 队已赛过 1 场, 则此时 E 队已赛过[].

- A. 1 场 B. 2 场 C. 3 场 D. 4 场

答 B.

分析 本题主要考查了奇偶数的运算性质及选择题的一种特殊解法——排除法.

解法 1 由于两支球队进行一场比赛后, 两队的比赛场次数要各加 1, 所以 A, B, C, D, E 五支篮球队的所有比赛场次之和一定是 2 的倍数, 即为偶数. 已知 A, B, C, D 四队的比赛场次之和为 $4+3+2+1=10$, 所以 E 队的比赛场次只能是偶数, 这样就排除了选项 A, C. 又因为 D 队只赛一场且已与 A 队赛完, 所以 E 队的比赛场次不能是 4, 这样选项 D 也被排除.

故正确选项为 B.

解法 2 本题也可以通过以下赛程表得到正确选项 B.

	A	B	C	D	E
A	×	已赛	已赛	已赛	已赛
B	已赛	×	已赛		已赛
C	已赛	已赛	×		
D	已赛			×	
E	已赛	已赛			×

已知 A 队已赛过 4 场,这 4 场只能是 A 队分别与 B, C, D, E 四队进行比赛. 而 B 队已赛过 3 场,由于 D 队只赛一场且已与 A 队赛完,所以这 3 场只能是 B 队分别与 A, C, E 三队进行比赛. 至此,赛程表完成.

3. (2009) 若将正偶数 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ... 依次排成一行:

246810121416...

则从左向右数的第 101 个数码是 [].

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

答 A.

分析 本题主要考查了奇偶数的概念.

前 100 个正整数中有 50 个偶数,其中一位数字的有 4 个,即 2, 4, 6, 8;两位数字的有 45 个,即 10, 12, 14, ..., 98;三位数字的有 1 个,即 100. 将它们按要求排成一行共有 97 位,所以从第 98 位开始依次是 102104..., 故第 101 个数码是 1.

故正确选项为 A.

(2) 分数运算

1. (2003) 已知 $a = \frac{2001}{2002}$, $b = \frac{2002}{2003}$, $c = \frac{2003}{2004}$, 则 [].

- A. $a > b > c$ B. $b > c > a$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

答 D.

分析 本题主要考查了数的简单运算及判断两个数大小的常用方法.

解法 1 由于

$$\begin{aligned} b - a &= \frac{2002}{2003} - \frac{2001}{2002} = \frac{2002^2 - 2001 \times 2003}{2003 \times 2002} \\ &= \frac{2002^2 - (2002 - 1) \times (2002 + 1)}{2003 \times 2002} \\ &= \frac{1}{2003 \times 2002} > 0, \end{aligned}$$

所以 $b > a$. 类似地可知 $c > b$.

故正确选项为 D.

解法 2 由于 $\frac{b}{a} = \frac{2002^2}{2001 \times 2003} = \frac{2002^2}{(2002-1)(2002+1)} = \frac{2002^2}{2002^2-1} > 1$, 所以 $b > a$. 类似地可知 $c > b$.

解法 3 考虑函数 $f(x) = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$, 易知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是单调递增函数, 故

$$f(2002) < f(2003) < f(2004),$$

即 $c > b > a$.

2. (2008) $\frac{a}{b} = -\frac{3}{5}, \frac{b}{c} = -\frac{7}{9}, \frac{d}{c} = -\frac{5}{2}$, 则 $\frac{a}{d} = [\quad]$.

A. $-\frac{14}{75}$

B. $\frac{14}{75}$

C. $\frac{75}{14}$

D. $-\frac{75}{14}$

答 A.

分析 本题主要考查了分数的乘除运算.

因为 $\frac{a}{b} = -\frac{3}{5}, \frac{b}{c} = -\frac{7}{9}, \frac{d}{c} = -\frac{5}{2}$, 所以 $\frac{a}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \left(-\frac{3}{5}\right) \left(-\frac{7}{9}\right) \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{14}{75}$.

故正确选项为 A.

(3) 比与百分数的运算

1. (2006) 某型号的变速自行车主动轴有 3 个同轴的齿轮, 齿数分别为 48, 36 和 24, 后轴上有 4 个同轴的齿轮, 齿数分别是 36, 24, 16 和 12, 则这种自行车共可获得 [] 种不同的变速比.

A. 8

B. 9

C. 10

D. 12

答 A.

分析 本题主要考查两个数的比的大小.

主动轴上的三个齿轮的齿数分别与从动轴(后轴)上的四个齿轮的齿数做比, 得

$$\frac{48}{36} = \frac{4}{3}, \frac{48}{24} = 2, \frac{48}{16} = 3, \frac{48}{12} = 4;$$

$$\frac{36}{36} = 1, \frac{36}{24} = \frac{3}{2}, \frac{36}{16} = \frac{9}{4}, \frac{36}{12} = 3;$$

$$\frac{24}{36} = \frac{2}{3}, \frac{24}{24} = 1, \frac{24}{16} = \frac{3}{2}, \frac{24}{12} = 2.$$

由于 $\frac{48}{16} = \frac{36}{12}, \frac{48}{24} = \frac{24}{12}, \frac{36}{36} = \frac{24}{24}, \frac{36}{24} = \frac{24}{16}$, 所以这种自行车共可获得 $12 - 4 = 8$ 种不同的变速比.

故正确选项为 A.

2. (2007) 图 1.1 中, 大长方形被平行于边的直线分成了 9 个小长方形. 其中位于角上的 3 个长方形的面积已经标出, 则第 4 个角上的小长方形面积等于 [].

A. 22

B. 20

C. 18

D. 11.25

答 B.

分析 本题是一道算术与几何的简单综合题, 考查了长方形面积公式与比的计算.

解法 1 设第 4 个角上的小长方形面积为 x , 则有比例关系式 $\frac{9}{12} = \frac{15}{x}$. 解得 $x = 20$.

故正确选项为 B.

解法 2 如图 1.2 所示, 由于 $\frac{b}{d} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}, \frac{a}{c} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$, 所以 $\frac{ab}{cd} = \frac{9}{20}$. 又 $ab = 9$, 所以 $cd = 20$. 即所求面积为 20.

9		15
12		?

图 1.1

a	9	15
	b	d
c	12	?

图 1.2

3. (2004) 甲、乙两种茶叶以 $x:y$ (重量比) 混合配制成一种成品茶, 甲种茶 50 元/kg, 乙种茶 40 元/kg, 现甲种茶价格上涨 10%, 乙种茶价格下降 10% 后, 成品茶的价格恰好仍保持不变, 则 $x:y$ 等于 [].

A. 1:1

B. 5:4

C. 4:5

D. 5:6

答 C.

分析 本题主要考查了比与百分数的概念和简单运算.

在甲、乙两种茶的价格变化前后每千克成品茶的价格分别为 $50x+40y$ (元) 和 $(50+50 \times 10\%)x + (40-40 \times 10\%)y$ (元). 根据题意可知

$$50x + 40y = (50 + 50 \times 0.1)x + (40 - 40 \times 0.1)y,$$

即 $50 \frac{x}{y} + 40 = 55 \frac{x}{y} + 36$. 解得 $\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$.

故正确选项为 C.

4. (2005) 2005 年, 我国甲省人口是全国人口的 $c\%$, 其生产总值占国内生产总值的 $d\%$; 乙省人口是全国人口的 $e\%$, 其生产总值占国内生产总值的 $f\%$, 则 2005 年甲省人均生产总值与乙省人均生产总值之比是 [].

A. $\frac{cd}{ef}$

B. $\frac{ce}{df}$

C. $\frac{cf}{de}$

D. $\frac{de}{cf}$

答 D.

分析 本题主要考查了比与百分数的概念和简单运算.

解法 1 设 2005 年全国人口为 p , 全国国内生产总值为 h , 则甲省人口是 $pc\%$, 生产总值是 $hd\%$, 乙省人口是 $pe\%$, 生产总值是 $hf\%$. 所以甲省人均生产总值为 $\frac{dh}{cp}$, 乙省人均生产总值为 $\frac{fh}{ep}$, 从而甲省人均生产总值与乙省人均生产总值之比是 $\frac{de}{cf}$.

故正确选项为 D.

解法 2 由于甲省与乙省的生产总值之比是 $\frac{d}{f}$, 而人口之比是 $\frac{c}{e}$, 所以人均生产总值之比是 $\frac{d}{f} : \frac{c}{e} = \frac{de}{cf}$.

5. (2003) 某工厂产值三月份比二月份增加 10%, 四月份比三月份减少 10%, 那么 [].

A. 四月份与二月份产值相等

B. 四月份比二月份产值增加 $\frac{1}{99}$

C. 四月份比二月份产值减少 $\frac{1}{99}$ D. 四月份比二月份产值减少 $\frac{1}{100}$

答 D.

分析 本题主要考查了百分比的概念及数的简单运算.

设二月份的产值为 a , 则三月份的产值为 $a + a \times 10\% = 1.1a$, 四月份的产值为 $1.1a - 1.1a \times 10\% = 0.99a$. 所以四月份的产值比二月份的产值少

$$\frac{a - 0.99a}{a} = \frac{1}{100}.$$

故正确选项为 D.

6. (2006) 一个容积为 10L 的量杯盛满纯酒精, 第一次倒出 a L 酒精后, 用水将量杯注满并搅拌均匀, 第二次仍倒出 a L 溶液后, 再用水将量杯注满并搅拌均匀, 此时量杯中的酒精溶液浓度为 49%, 则每次的倒出量 a 为 []L.

A. 2.55 B. 3 C. 2.45 D. 4

答 B.

分析 本题主要考查了百分比的概念及数的简单运算.

第一次倒出 a L 酒精后剩余的纯酒精是 $(10-a)$ L, 而第二次倒出的 a L 溶液中含有的纯酒精是 $\frac{10-a}{10}a$ L, 所以根据题意可知

$$\frac{(10-a) - \frac{(10-a)}{10}a}{10} = 0.49,$$

整理得 $(10-a)^2 = 49$. 解得 $a = 3$.

故正确选项为 B.

7. (2008) 把浓度为 50% 的酒精溶液 90kg 全部稀释为 30% 的酒精溶液, 需要加水 []kg.

A. 60 B. 70 C. 85 D. 105

答 A.

分析 本题主要考查了百分比的概念及数的简单运算.

设需要加水 x kg, 则根据题意可知 $90 \times 50\% = (90+x) \times 30\%$, 解得 $x = 60$.

故正确选项为 A.

(4) 算术表达式求值

$$1. (2003) \frac{\sum_{i=1}^{11} i}{\sum_{i=1}^{11} (-1)^{i-1} i} = [].$$

A. 10 B. 11 C. 12 D. 13

答 B.

分析 本题主要考查了对数学运算符号的了解及拆项分组的数字计算方法,用到了简

单公式 $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$.

因为

$$\sum_{i=1}^{11} i = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11 = \frac{1}{2} \times 11 \times (11+1) = 66,$$

$$\sum_{i=1}^{11} (-1)^{i-1} i = 1-2+3-4+5-6+7-8+9-10+11$$

$$= (1-2) + (3-4) + (5-6) + (7-8) + (9-10) + 11$$

$$= -5 + 11 = 6,$$

所以

$$\frac{\sum_{i=1}^{11} i}{\sum_{i=1}^{11} (-1)^{i-1} i} = \frac{66}{6} = 11.$$

故正确选项为 B.

2. (2004) 设 $S_n = 1-2+3-4+\dots+(-1)^{n-1}n$, 则 $S_{2004} + S_{2005} = [\quad]$.

A. 2

B. 1

C. 0

D. -1

答 B.

分析 本题考查的知识点与上一试题相同,只是更强调了问题的一般性.

解法 1 由于

$$S_{2004} = (1-2) + (3-4) + \dots + (2003-2004) = -1002,$$

$$S_{2005} = S_{2004} + 2005,$$

所以

$$S_{2004} + S_{2005} = 2S_{2004} + 2005 = 2 \times (-1002) + 2005 = 1.$$

故正确选项为 B.

解法 2 特殊值代入法.

本题对所有的正整数 k , $S_{2k} + S_{2k+1}$ 的值都是一样的. 特别地, 当 $k=1$ 时, $S_2 + S_3 = (1-2) + (1-2) + 3 = 1$. 故 $S_{2004} + S_{2005} = 1$.

3. (2005) $\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\dots\left(1-\frac{1}{9}\right)}{0.1+0.2+0.3+\dots+0.9}$ 的值是 [$\quad$].

A. $\frac{2}{81}$

B. $\frac{2}{9}$

C. $\frac{9}{2}$

D. $\frac{81}{2}$

答 A.

分析 本题主要考查了分数的运算及简单的代数公式.

因为

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{9} = \frac{1}{9},$$

$$0.1 + 0.2 + 0.3 + \cdots + 0.9 = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9}{10} = \frac{5 \times 9}{10} = \frac{9}{2},$$

所以

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{9}\right)}{0.1 + 0.2 + 0.3 + \cdots + 0.9} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{9}{2}} = \frac{2}{81}.$$

故正确选项为 A.

$$4. (2006) 11 + 22 \frac{1}{2} + 33 \frac{1}{4} + 44 \frac{1}{8} + 55 \frac{1}{16} + 66 \frac{1}{32} + 77 \frac{1}{64} = [\quad].$$

A. $308 \frac{15}{16}$

B. $308 \frac{31}{32}$

C. $308 \frac{63}{64}$

D. $308 \frac{127}{128}$

答 C.

分析 本题主要考查了拆项分组的数字计算方法, 用到了等差数列与等比数列的求和公式.

$$\begin{aligned} \text{解法 1} \quad & 11 + 22 \frac{1}{2} + 33 \frac{1}{4} + 44 \frac{1}{8} + 55 \frac{1}{16} + 66 \frac{1}{32} + 77 \frac{1}{64} \\ &= (11 + 22 + 33 + 44 + 55 + 66 + 77) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{11+77}{2} \times 7 + \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}} = 308 + \frac{63}{64} = 308 \frac{63}{64}.$$

故正确选项为 C.

解法 2 由于本题的四个选项中的整数部分相同, 因此只须计算分数部分的值便能找

出正确选项. 因为 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{63}{64}$, 所以正确选项为 C.

$$5. (2007) \frac{1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + 7^2 - 8^2 + 9^2 - 10^2}{2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7} \text{ 的值是 } [\quad].$$

A. $\frac{11}{51}$

B. $-\frac{11}{51}$

C. $\frac{22}{51}$

D. $-\frac{22}{51}$

答 B.

分析 本题主要考查了拆项分组的数字计算方法, 用到了等差数列与等比数列的求和