



CHUZHONG SHUXUE
JINGYAO BAIJIANG

初中数学精要百讲

陈锡志◇著

- 分析典型试题
- 教给思想方法
- 拓展解题思路
- 训练实战技能



四川出版集团 四川教育出版社

该书以初中学生和中学数学教师为对象，瞄准中考热点，以教材为中心，以数学教学和学习中的要点、难点为主线，采用专题形式深入浅出地举例讲解，既强调数学知识点的掌握，更突出数学思想方法的渗透和数学能力的培养。作者力主拓宽学生思路，增加学习深度，却大幅度降低学生学习难度，尽力超越传统思维方式，大胆引入新视角和新方法，全面培养学生分析问题和解决问题的能力，为中学生学好数学打通一条捷径。



ISBN 978-7-5408-5272-6



9 787540 852726 >

定价：28.00元



初中 CHUZHONG
SHUXUE JINGYAO BAIJIANG

数学精要百讲

陈锡志◇著

四川出版集团
四川教育出版社
· 成 都 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

初中数学精要百讲/陈锡志著. —成都: 四川教育出版社, 2010.3

ISBN 978-7-5408-5272-6

I. ①初… II. ①陈… III. ①数学课—初中—教学参考资料 IV. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 023787 号

责任编辑 谢志良

封面设计 何一兵

版式设计 张 涛

责任校对 严道丽

责任印制 黄 萍

出版发行 四川出版集团 四川教育出版社

地 址 成都市槐树街 2 号

邮政编码 610031

网 址 www.chuanjiaoshe.com

印 刷 成都福利印务有限公司

制 作 四川胜翔数码印务设计有限公司

版 次 2010 年 3 月第 1 版

印 次 2010 年 3 月第 1 次印刷

成品规格 168mm×240mm

印 张 17.25 插页 1

字 数 421 千

印 数 1-3000 册

定 价 28.00 元

如发现印装质量问题, 请与本社调换。电话: (028) 86259359

营销电话: (028) 86259477 邮购电话: (028) 86259694

编辑部电话: (028) 86259381

前 言

在我国，大部分地区实行的是九年制义务教育，学生初中毕业就将面临人生第一次升学考试。能不能考上高中，能不能考上一个教学质量好点的中学，能不能在名校就读，是摆在每年数以千万计的十四五岁的孩子和他们家长面前最大的人生课题。近年来，随着各大专院校多次扩招，高考升学率大幅度上升，但由于高级中学的规模和质量并没有得到同步提升，由于初中生的人数多于高中生，所以中考的牵涉面和社会关注度已经超过高考。

初中学生大多在12岁至16岁的年龄段，这是孩子身体发育最重要的阶段。从医学心理学的角度来看，这个年龄段的孩子需要充足的休息时间，需要保证运动的时间和强度，需要休闲娱乐和积极参加社会活动，才能保证身心健康成长。但残酷的升学压力必然带来沉重的学习负担，必然挤压孩子们的文体活动和娱乐休息时间。很多初中生在题海战术面前身心健康已经大受影响，这是我们每个教育者和家长都必须思考的问题。

初中阶段是学生形成良好学习习惯，掌握适合自身学习方法的最好时期，学会如何学习比学到具体知识更重要。掌握良好的学习方法和技巧，不但能使学生在初中阶段减轻自己的学习压力，赢得更多的文体活动、休息娱乐时间，而且能帮助他们在中考中取得好成绩，更关键的是能为随后适应繁重的高中学习打下良好的基础，为几年后的高考掌握一把金钥匙。

数学在中学课程中的地位不用赘述，尤其是3+X考试改革以来，数学的地位以及分数的比重更加突出。对于理科考生来说，学好数学更是学好物理、化学、生物的基础和工具，数学逻辑能力的提高，数学思维方式的培养，将对考生今后一生学习能力、工作能力、创新能力的形成和提高产生重大影响。

怎样学好数学？题海战术是学好数学的必经之路吗？学好数学有技巧和捷径吗？我相信每一个中学生都在思考这些问题，准备面对中考的毕业生更想知道有没有迅速提高数学成绩的捷径。

在这里我郑重告诉各位同学，我们每个人都能够学好数学，学好数学是有技巧

的,是有捷径的.再提醒那些数学基础比较差的同学别泄气,只要你紧紧围绕教材钻研,选择好的数学参考书,掌握一套好的学习方法,就能够迅速提高自己的成绩,就能够学好数学.

60多年前,我和大家一样,从一个小学生开始接触数学、学习数学,后来从中学到大学数学系,一直都在学习数学、研究数学.大学毕业后,我从事中学数学教学36年,到今天我已经退休10年了,我仍然不断发表文章,进行数学学习和教学探索.我穷其一生就是在钻研两个问题:作为老师如何教导学生学好数学?作为学生如何高效率地学好数学?

这本书是我从20年(1989~2009)来为69家报纸杂志所撰写的838篇文章中精选部分文章编辑而成的,是想给我们的初中数学老师,给我们准备中考的初中同学,寻找一把打开数学中考之门的钥匙,寻找一条学好数学的捷径.借此书把我60余年来通过学习和教学所总结的经验和体会真诚地介绍给大家,希望对大家带来帮助.

学好数学首要的是掌握一套好的学习方法,形成一种好的思考问题、解决问题的模式,训练和提高数学逻辑思维能力.本书第十八章把思想方法的训练提升到前所未有的高度.我是坚决反对题海战术的愚人手段的.

学好数学必须重视能力的培养,以及解决问题手段和技巧的完善.学生要开启智慧之门,培养自己的创新意识和开放性思维.当你具备用多种技巧和手段解决同一问题的能力时,你还需要在题海战术中游荡吗?

近年各地中考为了引导培养学生的创新意识,出现了较多答案不唯一的开放性考题和探索性考题,本书专列《开放性综合题》、《探索性综合题》、《探索、发现问题》、《创新意识题》等文章就是为了积极应对中考中出现的新变化,帮助同学们适应这类考题.各地中考题中普遍有建数学模型解决生产、生活等实际问题的专题,本书中就有应有关刊物编辑之邀所写的《生活实践题》、《环保问题》、《市场经济问题》等文章,针对性很强.

为了指导广大考生应对中考,本书第19章中许多文章曾被多家报刊转载,如《今日中学生》每年都定期开辟我的专题讲座,该专题系列在全国读者群中反响较大,《展望近两年中考数学命题》一文就是考题研究系列讲座之一.

学好数学必须善于归纳总结,善于归纳和总结以及分析中考中反复出现的考试题材,善于总结考生在应试中最容易出现的错误.善于归纳总结,你就能让自己的能力快速提高,你就能事半功倍.例如近年来二次根式几乎成为必考题材,为此我专门撰写了《运用数学思想方法解二次根式》一文.除列举了课本和教辅书上运用方程的思想方法、运用分类讨论思想方法两种思路外,我还为同学们补充了运用字母代数的思想方法、运用设辅助元(变量代换)的思想方法、运用逆向思维的思想方法、运用构造多项式的思想方法、运用构造函数的思想方法、运用构造图形的思

想方法来解答同一类问题。多兵种多军种立体作战，多手段解决问题，不但能保证迅速得到答案，更能拓展同学们的数学思维能力和空间。

现在市面上课外辅导读物、中考冲刺测试卷等五花八门，加上很多老师迷信题海战术，让同学们被题海所困，大家做完题甚至没有回味、归纳、总结、反思、提升的机会和时间。我以为立足考点回归教材方为根本。注重书本上典型习题和近几年中考题无疑是中考复习的重要举措。纵观近几年全国各地中考题，可知基础题含量一直最重，选择题、填空题分值占全卷 50% 左右，我在第 18 章中就选编有《怎样解答选择题》、《怎样解答填空题》、《用化归思想解题》等文章。

本书各章节所有文章均已在各种专业报刊上公开发表过，其权威性、典型性、指导性都有保证。我真诚希望本书能成为备战中考的师生们打开数学高分之门的金钥匙。我希望阅读本书不但能提高同学们的成绩，还能让同学们从题海战术中解脱出来，回归童真，真正体会到学习的乐趣，感受到读书的轻松和快乐。这也是我编写此书的初衷。

作者

目 录

第一章 兴趣与数学	(1)
第 1 讲 兴趣是学好数学的老师	(1)
第 2 讲 趣数	(2)
第 3 讲 数的奇趣	(4)
第 4 讲 黄金数	(4)
第 5 讲 哪些灯亮着	(5)
第 6 讲 名人找趣题	(6)
第 7 讲 巧用筛选法救妇女儿童	(7)
第 8 讲 来自生活中的趣题	(8)
第 9 讲 阿凡提分酒	(9)
第 10 讲 聪明的小旅客	(9)
第 11 讲 逻辑知识的妙用	(11)
第 12 讲 古诗中的数学题	(12)
第 13 讲 动物世界中的“数学英才”	(12)
第 14 讲 角谷变换	(13)
第 15 讲 来自生活中的补元	(14)
第 16 讲 “正难则反”策略例谈	(15)
第 17 讲 智辨颜色	(15)
第 18 讲 踢毽子·赛马·打篮球	(16)
第 19 讲 一生的执著	(17)
第 20 讲 兴趣与成功	(18)
第二章 有理数	(19)
第 21 讲 如何学好数学	(19)
第 22 讲 怎样学习初一代数	(20)
第 23 讲 开好代数学习的头	(21)
第 24 讲 怎样学好数轴	(22)
第 25 讲 数轴的作用	(23)
第 26 讲 负数导学	(24)

第 27 讲	例说相反数	(25)
第 28 讲	近似数与有效数字	(27)
第 29 讲	绝对值导学	(28)
第 30 讲	怎样学代数式	(29)
第 31 讲	去括号法则导学	(30)
第 32 讲	三个符号的读法和功能	(31)
第 33 讲	都是 0 惹的祸	(32)
第 34 讲	初一代数所蕴涵的数学思想	(33)
第 35 讲	个位数,我知道你是谁	(34)
第 36 讲	比较有理数大小的常用方法	(35)
第三章	一元一次方程、二元一次方程组	(38)
第 37 讲	如何学习二元一次方程组	(38)
第 38 讲	注意浓度问题的类型及解法	(40)
第 39 讲	设而不求巧解题	(42)
第 40 讲	钟面上的数学题	(43)
第 41 讲	如何列方程解应用题	(44)
第 42 讲	四法解一题	(45)
第 43 讲	如何解线性方程组	(46)
第 44 讲	变换思维方式解题	(47)
第 45 讲	阿 Q 学宫游记二则	(48)
第四章	图形认识初步	(50)
第 46 讲	几何入门	(50)
第 47 讲	开好几何学习的头	(51)
第 48 讲	命题	(53)
第 49 讲	怎样学“互为余角”、“互为补角”	(54)
第 50 讲	射线、线段	(55)
第 51 讲	探究性问题两例	(56)
第 52 讲	观察、度量、计算	(56)
第五章	相交线和平行线	(58)
第 53 讲	平行线导学	(58)
第 54 讲	谈谈平行线的判定和性质定理的学习	(59)
第 55 讲	例说引平行辅助线	(61)
第 56 讲	初一同学学证明	(63)
第 57 讲	注意运用,掌握方法	(64)
第 58 讲	帮你学作辅助线	(65)
第 59 讲	怎样解答几何证明题	(66)
第 60 讲	如何学习对顶角	(68)
第 61 讲	怎样学尺规作图	(69)

第六章 三角形	(71)
第 62 讲 三角形内角和定理导学	(71)
第 63 讲 等腰三角形析	(72)
第 64 讲 特殊角的三角函数值	(74)
第 65 讲 2005 年中考中的奇趣三角形	(76)
第 66 讲 三角形开放性题赏析	(78)
第 67 讲 角平分线的作法	(79)
第 68 讲 角平分线定理的应用	(80)
第 69 讲 一道中考题的探索	(82)
第七章 不等式与不等式组	(84)
第 70 讲 解不等式中的数学思想	(84)
第 71 讲 一元一次不等式学法四则	(85)
第 72 讲 对折优惠问题	(87)
第 73 讲 不等式错解寻根	(88)
第 74 讲 利用中间未知数解题例谈	(89)
第 75 讲 不等式助你决策	(90)
第八章 实数和整式	(91)
第 76 讲 减少运算量的八个举措	(91)
第 77 讲 名画·中考题	(93)
第 78 讲 漫谈平方根与算术平方根	(95)
第 79 讲 因式分解纵横谈	(96)
第 80 讲 因式分解的其他方法	(97)
第 81 讲 无理数趣谈	(99)
第 82 讲 “数的开方”学习指导	(100)
第 83 讲 平方差公式导学	(102)
第 84 讲 灵活运用乘法公式	(103)
第 85 讲 为多项式相乘续两法	(104)
第 86 讲 多项式除法公式在解题中的应用	(105)
第 87 讲 整式加减运算中常见错误剖析	(106)
第 88 讲 有趣的完全平方数	(107)
第 89 讲 推理题的归类解析	(108)
第九章 数据与分析	(110)
第 90 讲 统计知识题解析	(110)
第 91 讲 统计图导学	(111)
第 92 讲 例谈四种统计图	(112)
第 93 讲 如何捕获信息	(115)
第十章 分 式	(117)
第 94 讲 怎样学习分式运算	(117)

第 95 讲	正确掌握分式概念	(118)
第十一章	相似三角形和全等三角形	(120)
第 96 讲	构造全等三角形证题	(120)
第 97 讲	比例线段证法	(122)
第 98 讲	证明比例线段的基本方法	(124)
第 99 讲	怎样判定相似三角形	(126)
第 100 讲	相似形的应用	(127)
第 101 讲	怎样证不等	(129)
第 102 讲	怎样证线段不等	(132)
第 103 讲	谈谈角不等的证明	(132)
第 104 讲	从一道试题看辅助线的作法	(134)
第 105 讲	开拓思路,多种证法	(135)
第十二章	勾股定理	(136)
第 106 讲	话说勾股定理	(136)
第 107 讲	正、逆勾股定理错解剖析	(137)
第十三章	四边形	(138)
第 108 讲	利用面积巧解题	(138)
第 109 讲	四边形中的动点问题	(140)
第 110 讲	梯形辅助线作法的新思路	(142)
第 111 讲	和梯形有关的中考题	(144)
第 112 讲	折叠问题赏析	(145)
第 113 讲	利用中心对称巧解题	(147)
第 114 讲	一道中考题的发散思考	(148)
第 115 讲	平面几何最值问题的求解方法	(150)
第十四章	二次根式	(153)
第 116 讲	运用数学思想方法解二次根式	(153)
第 117 讲	师生共话二次根式	(155)
第 118 讲	二次根式	(156)
第 119 讲	化简二次根式导学	(157)
第 120 讲	错解·正解·巧解	(159)
第 121 讲	二次根式的隐含条件	(160)
第 122 讲	巧用隐含条件解题数例	(161)
第十五章	一元二次方程和二元二次方程组	(162)
第 123 讲	一元二次方程的概念及其解法	(162)
第 124 讲	一元二次方程根与系数关系的应用	(163)
第 125 讲	判别式的应用若干	(165)
第 126 讲	应用韦达定理解方程组	(167)
第 127 讲	有一根为 -1 的一元二次方程	(168)

第 128 讲	谈二元二次方程组的解法	(169)
第 129 讲	解方程中的增根与遗根	(171)
第 130 讲	应用方程巧解题	(171)
第 131 讲	回过头来看看	(173)
第 132 讲	自学·观察	(174)
第十六章 圆		(176)
第 133 讲	怎样学习圆幂定理	(176)
第 134 讲	如何证四点共圆	(178)
第 135 讲	切割线定理解题两例	(179)
第 136 讲	重点精析垂径定理	(180)
第 137 讲	圆心角与圆周角	(182)
第十七章 函数		(184)
第 138 讲	函数中自变量的取值范围	(184)
第 139 讲	二次函数最值的应用	(185)
第 140 讲	有关二次函数知识的中考题	(187)
第 141 讲	一道中考题的多种解法	(188)
第 142 讲	抛物线系数和位置关系	(189)
第 143 讲	一道题的拓展	(190)
第 144 讲	生活实践题一例	(191)
第 145 讲	题好容量大	(191)
第十八章 思想方法		(193)
第 146 讲	用化归思想解题	(193)
第 147 讲	用数学思想解 2006 年中考填空题、选择题	(197)
第 148 讲	怎样解答填空题	(200)
第 149 讲	怎样解答选择题	(202)
第 150 讲	综合法与分析法	(205)
第 151 讲	反证法简介	(207)
第 152 讲	用裂项法解难题	(208)
第 153 讲	数形结合解中考题例说	(209)
第 154 讲	分类讨论解题例说	(210)
第 155 讲	不完全归纳法	(211)
第 156 讲	配方法解题例谈	(212)
第 157 讲	整体思维的功能	(214)
第 158 讲	用整体思维来解数学题	(215)
第 159 讲	巧用特殊赋值解题	(216)
第 160 讲	待定系数法	(218)
第 161 讲	列举法助你解题	(218)
第 162 讲	构造图形巧解题	(219)

第 163 讲	构造方程巧解题	(221)
第十九章	中考压轴题赏析和热点试题评析	(224)
第 164 讲	展望近两年中考数学命题	(224)
第 165 讲	中考数学新题型赏析	(225)
第 166 讲	开放性综合题	(228)
第 167 讲	条件和结论都不唯一的开放性题	(231)
第 168 讲	社会热点问题	(231)
第 169 讲	政策类问题	(233)
第 170 讲	新题型新亮点	(234)
第 171 讲	创新意识题	(235)
第 172 讲	与方程有关的综合题	(237)
第 173 讲	动手操作问题	(239)
第 174 讲	运动型问题	(241)
第 175 讲	几何证明综合题	(244)
第 176 讲	平面镶嵌题	(245)
第 177 讲	平面直角坐标系应用问题	(247)
第 178 讲	最优化问题	(248)
第 179 讲	环保问题	(250)
第 180 讲	探究性综合题	(251)
第 181 讲	探索、发现类问题	(253)
第 182 讲	最值问题	(254)
第 183 讲	阅读理解题	(256)
第 184 讲	生活实践题	(258)
第 185 讲	古典名题	(259)
第 186 讲	市场经济问题	(261)
第 187 讲	代数、几何综合题	(262)
第 188 讲	怎样解数形结合题	(264)
后记		(266)

第一章 兴趣与数学

本章通过趣味数学的鲜活实例,激发同学们学习数学的兴趣.兴趣是学好数学的老师,比如阅览室职员阿当斯对“幻方”感兴趣,花去 52 年时间最终完成“六角幻方”的排列(见《一生的执著》一文).英国哲学家罗素说:数学具有至高的美.只有对数学产生浓厚的兴趣,才能学好数学,获得巨大成功(见《兴趣与成功》一文).

第 1 讲 兴趣是学好数学的老师

“数学之所以让那么多人如痴如醉,就是因为其中有着很多奇妙无比的思想方法.”下面我们看看法国数学家泊松小时候用奇妙的方法解决的一道数学题.

某人有 8 品脱啤酒,想从中倒出 4 品脱,但他没有 4 品脱的容器,只有一个 3 品脱和一个 5 品脱的容器.利用这些容器怎样才能把 8 品脱啤酒分成相等的两份呢?

小泊松昼思夜想,找到了下面解题方法:

他把 8 品脱、5 品脱、3 品脱的容器分别编成代号 1, 2, 3.

第一次:把 1 号中的啤酒倒满 3 号,1 号还剩 5 品脱啤酒;

第二次:把 3 号中的啤酒全部倒入 2 号;

第三次:把 1 号中的啤酒倒满 3 号,1 号还剩 2 品脱啤酒;

第四次:把 3 号中的啤酒倒满 2 号,3 号中还剩 1 品脱啤酒;

第五次:把 2 号中的啤酒全部倒入 1 号,1 号中有 7 品脱啤酒;

第六次:把 3 号中的 1 品脱啤酒倒入 2 号;

第七次:把 1 号中的 7 品脱啤酒倒满 3 号,1 号中还有 4 品脱啤酒;

第八次:把 3 号中的全部啤酒(3 品脱)倒入 2 号,2 号中有 4 品脱啤酒.

经过八次折腾,终于如愿以偿.小泊松的

内心有说不出的惊奇、喜悦和陶醉,并从此对数学产生了浓厚的兴趣,终生迷上了数学.兴趣成了他学习、钻研数学的老师.他一生在数学的很多领域都作出了杰出的贡献,终于成为举世闻名的数学家,被许多国家科学院选为院士.

有的同学如果对数学尚缺乏兴趣,可以有意去寻找一些趣味数学题进行钻研,慢慢建立和数学的感情,天长日久,就会对数学产生兴趣,甚至产生浓厚的兴趣.这里提供两题供同学们思考.

1. 某人带了两只貂、两只鸡、两升米来到河边,河边仅有一只很小的渔船,渔翁只能让这个人最多带一样东西上船,否则船可能沉.他想先把貂带过河,但鸡要吃米,又想先带米过河,貂又要吃鸡,他该怎么办呢?

2. 某人有 4 个容器可装白糖,有两个可装 10 千克,另两个分别装 5 千克和 4 千克.现在两个装 10 千克的容器里装满了白糖.在不用秤的情况下,如何在另两个较小的容器内各倒入 3 千克白糖?

原载《初中生学习之友》1998 年第 10 期

第2讲 趣 数

数学王国里有很多精彩有趣的数.

一、朋友数

毕达哥拉斯曾说:“数字是万物之本.”

有人问他:“什么是朋友?”

毕达哥拉斯回答道:“朋友就是你的另一个我,其关系就如 220 和 284.”

220 和 284 这对数究竟是一种什么关系呢?

我们探究一下:

220 的约数有 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, 220.

284 的约数有 1, 2, 4, 71, 142, 284.

把 220 中的约数 220 去掉,其他的约数之和是 $1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$.

把 284 中的约数 284 去掉,其他的约数之和是 $1+2+4+71+142=220$.

从上面结果可以看出,这对数之间有一种亲密关系:一个数除它本身外的所有约数之和等于另一个数,反之亦然.真像两个朋友一样,你中有我,我中有你,像这样的一对数,就称为朋友数.

请同学们检查 5 020 和 5 564, 6 232 和 6 368 是不是朋友数.

二、魔术数

将正整数 n 接写在每一个正整数的后面,如果得到的新数都能被 n 整除,那么正整数 n 就叫做魔术数.

如正整数 5 接写在任何正整数的后面,所得到的新数,显然都是 5 的整数倍,所以 5 是魔术数.

同学们可以验证 1, 2, 10, 20, 25, 50, 100 都是魔术数.这就是 100 以内的魔术数.

三、水仙花数(芙蓉花数)

如果一个三位数恰好等于它的三个数字

的立方和,那这个数就叫水仙花数,又叫芙蓉花数,如 $407=4^3+0^3+7^3$.

自然数中全部的水仙花数只有以下四个: 153, 370, 371, 407.

四、西西弗斯数

123 叫西西弗斯数.大家知道宇宙中有一种叫黑洞的天体,它由高密度的物质组成,连光线射到这个天体上都会被吸收掉,不能反射,人们看不见这个天体,所以称它为黑洞,而 123 就是数字黑洞.

我们任取一个数字,如 81 872 115 378,其中有 4 个偶数,7 个奇数,是 11 位数,又组成一个新的数 4 711;重复上面程序,4 711 中有 1 个偶数,3 个奇数,是 4 位数,又组成一个新的数 134;134 中有 1 个偶数,2 个奇数,是 3 位数,便得到 123.

再重复上面程序,始终得到 123 黑洞,就再也逃不出去,得不到新的数了,对任何一个数字反复运用以上程序,最后都得到 123 黑洞,同学们可以举任意一个数试一试.

为什么把 123 黑洞称为西西弗斯数呢?相传希腊国王西西弗斯被天神惩罚,要他将一块巨石推到一座山上.西西弗斯用力去推石头,可是,不管西西弗斯怎样努力,那巨石总在到达山顶之前不可避免地滚下山坡,他被迫重新推,永无休止.因此,人们把 123 黑洞叫做西西弗斯数.

五、陷阱数

任意一个四位数(四个数字不完全相同),把它打乱重新排列,用可以排成的最大数减去最小数,得到新的四位数.重复以上运算过程,最后得到 6 174.

如 2 005,按以上运算程序陆续计算: $5\ 200 - 2\ 005 = 3\ 195$, $9\ 531 - 1\ 359 = 8\ 172$, $8\ 721 -$

$1\ 278 = 7\ 443, 7\ 443 - 3\ 447 = 3\ 996, 9\ 963 - 3\ 699 = 6\ 264, 6\ 642 - 2\ 466 = 4\ 176, 7\ 641 - 1\ 467 = 6\ 174.$

再重复施行这种运算,始终出现6 174,怎么也无法“跳”出这个数,就像掉入陷阱一样,因此称6 174为陷阱数.

六、完全数

如果一个自然数的所有约数的和(不包括自身)正好等于这个自然数,那么这个数就叫做完全数.

最小的完全数是6,因为6的约数是1,2,3,而 $1+2+3=6$.

除6外,还有28,496,8 128,...

完全数可以写成以下形式:

$$M = 2^{n-1}(2^n - 1).$$

$$\text{如 } 6 = 2^{2-1}(2^2 - 1), 28 = 2^{3-1}(2^3 - 1),$$

$$496 = 2^{5-1}(2^5 - 1), 8\ 128 = 2^{7-1}(2^7 - 1).$$

但形如 $M = 2^{n-1}(2^n - 1)$ 的数,并不一定都是完全数,如 $120 = 2^3(2^4 - 1)$.

只有当 $2^n - 1$ 是质数时, M 才是完全数.

七、史密斯数

如果一个数的各位数字之和等于它的所有质因数的各位数字之和,这个数就叫做史密斯数.

如 $4\ 937\ 775 = 3 \times 5 \times 5 \times 65\ 837$,则有 $4 + 9 + 3 + 7 + 7 + 7 + 5 = 3 + 5 + 5 + 6 + 5 + 8 + 3 + 7$.

再如 $4 = 2 \times 2, 4 = 2 + 2$.

还有22,27,...

在0~1 000之间,共有376个史密斯数.

为什么称为史密斯数呢?原来,美国数学家威尔斯基的电话号码是4 937 775.他的亲戚史密斯对这个数非常感兴趣,经过思索,终于找到了这个数的秘密.人们钦佩史密斯的探索精神,将这个数取名为史密斯数.

八、回文数

如果将一个自然数的各位数字的顺序倒过来,所得到的数与原数相同,这个数就叫做回

文数,如11,88,101,...

这里有一个著名的回文数猜想:任取一个自然数,将其数字倒过来写成一个新的自然数,将两数相加,然后把这个和数倒过来写,再与原和数相加,重复这个运算过程,经过有限次运算可以得到回文数.

例如: $2\ 005 + 5\ 002 = 7\ 007$ (一步得到), $78 + 87 = 165, 165 + 561 = 726, 726 + 627 = 1\ 353, 1\ 353 + 3\ 531 = 4\ 884$ (四步得到).

到目前为止,世上还没有人能够证明这个回文数猜想的对错,有人将196用电子计算机进行数十万步的计算,仍没有得到回文数,但不能证明它永远不会获得回文数.

九、数字黑洞 153

“黑洞”原指非常奇怪的天体,它体积小,密度大,吸引力强,任何物体到了它那里都别想再“爬”出来.

无独有偶,数字中也有类似的“黑洞”.满足某种条件的所有数,通过一种运算,都能被它“吸”进去,无一能逃脱它的魔掌.

比如:任意找一个3的倍数的数,先把这个数的每一个数位上的数字都立方,再相加,得到一个新数,然后把这个新数的每一个数位上的数字再立方,求和.重复运算下去,就能得到一个固定的数 T .我们称它为数字“黑洞”.

现在来探究数字“黑洞” T .

$$\text{如 } 21, 2^3 + 1^3 = 9, 9^3 = 729, 7^3 + 2^3 + 9^3 = 1\ 080, 1^3 + 8^3 = 513, 5^3 + 1^3 + 3^3 = 153, 1^3 + 5^3 + 3^3 = 153.$$

$$\text{再如 } 15, 1^3 + 5^3 = 126, 1^3 + 2^3 + 6^3 = 225, 2^3 + 2^3 + 5^3 = 141, 1^3 + 4^3 = 66, 6^3 + 6^3 = 432, 4^3 + 3^3 + 2^3 = 99, 9^3 + 9^3 = 1\ 458, 1^3 = 4^3 + 5^3 = 702, 7^3 + 2^3 = 351, 3^3 + 5^3 + 1^3 = 153.$$

$$T = 153.$$

原载《中学数学教学参考》2005年第8期

第3讲 数的奇趣

在我们的学习中,有很多数非常有趣,如下面六个数,分成两组,其和相等:

$$123\ 789 + 561\ 945 + 642\ 864 \\ = 242\ 868 + 323\ 787 + 761\ 943.$$

每个数平方,其和仍相等:

$$123\ 789^2 + 561\ 945^2 + 642\ 864^2 \\ = 242\ 868^2 + 323\ 787^2 + 761\ 943^2.$$

每个数去掉左边第一位其和仍相等:

$$23\ 789 + 61\ 945 + 42\ 864 \\ = 42\ 868 + 23\ 787 + 61\ 943, \\ 23\ 789^2 + 61\ 945^2 + 42\ 864^2 \\ = 42\ 868^2 + 23\ 787^2 + 61\ 943^2.$$

每个数再去掉左边第一个数其和仍有:

$$3\ 789 + 1\ 945 + 2\ 864 \\ = 2\ 868 + 3\ 787 + 1\ 943,$$

$$3\ 789^2 + 1\ 945^2 + 2\ 864^2 \\ = 2\ 868^2 + 3\ 787^2 + 1\ 943^2.$$

还可以继续下去,得:

$$789 + 945 + 864 = 868 + 787 + 943, \\ 789^2 + 945^2 + 864^2 = 868^2 + 787^2 + 943^2; \\ 89 + 45 + 64 = 68 + 87 + 43, \\ 89^2 + 45^2 + 64^2 = 68^2 + 87^2 + 43^2; \\ 9 + 5 + 4 = 8 + 7 + 3, \\ 9^2 + 5^2 + 4^2 = 8^2 + 7^2 + 3^2.$$

同学们还可以试一试从右边依次去掉一位、两位、三位、四位、五位仍有以上性质吗?这六个数是否有趣呢?在自然界中的数学王国里还有很多奥秘,等待着同学们去发现和探索.

原载《中学生学习报》2006年8月14日

第4讲 黄金数

古希腊学者亚里士多德说:“思维自疑问和惊奇开始.”英国著名哲学家、逻辑学家罗素说:“数学,如果正确地看它,不但拥有真理,而且具有至高的美.”

现在让我们来揭秘黄金数.

一、何谓“黄金数”

希腊欧多克斯(前408—前355)曾提出:能否用一个点把一条线段分成大小两段,使小段与大段的长度之比恰好等于大段长度与全长之比,这个比值为 $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \approx 0.618$.意大利画家达·芬奇称为“黄金分割比”,此数又名“黄金数”.

二、“黄金数”与中考题

例1(2005年贵州省毕节地区初中毕业统一考试第25题) 如图1,已知 $\triangle ABC$ 中, D 是 AC 边上一点, $\angle A = 36^\circ$, $\angle C = 72^\circ$, $\angle ADB$

$= 108^\circ$,求证:

- (1) $AD = BD = BC$;
- (2) 点 D 是线段 AC 的黄金分割点.

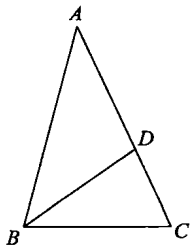


图1