

“十一五”国家重点图书出版规划项目

数学大辞典

Dictionary of Mathematics

◎ 总主编 王 元 ◎ 副总主编 文 兰 陈木法



科学出版社

www.sciencep.com

“十一五”国家重点图书出版规划项目

数学大辞典

Dictionary of Mathematics

◎ 总主编 王元 ◎ 副总主编 文兰 陈木法



科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是一部综合性的数学大辞典,涵盖数理逻辑与数学基础、数论、代数学、分析学、复分析、常微分方程、动力系统、偏微分方程、泛函分析、组合数学、图论、几何学、拓扑学、微分几何、概率论、数理统计、计算数学、控制论、信息论、运筹学等学科,以常用、基础和重要的名词术语为基本内容,提供简短扼要的定义或概念解释,并有适度展开。正文后附有数学发展历史纪要、人名译名对照表等附录,并设有便于检索的中、英文索引。

本书可供数学及相关专业的科技工作者,大专院校师生,中学数学教师,数学爱好者,以及具有大专以上文化程度的其他读者参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

数学大辞典=Dictionary of Mathematics/王元总主编;文兰,陈木法副总主编. —北京:科学出版社,2010

“十一五”国家重点图书出版规划项目

ISBN 978-7-03-027359-8

I. 数… II. ①王… ②文… ③陈… III. 数学-词典 IV. O1-61

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 077292 号

责任编辑:顾英利 刘嘉善 林 鹏/责任校对:张 琪

责任印制:钱玉芬/封面设计:黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010年8月第 一 版 开本:890×1240 1/16

2010年8月第一次印刷 印张:78 1/4

印数:1—3 000 字数:2 952 000

定价:228.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

《数学大辞典》分编委会 《数学大辞典》编委会

总主编 王 元

副总主编 文 兰 陈木法 连 金人耕 史念东

编 委 (以姓氏汉语拼音为序)

安鸿志 陈翰馥 陈木法 陈恕行

陈维桓 陈永川 方复全 冯德兴

冯 琦 葛力明 李文林 林 鹏

王斯雷 王 元 文 兰 许以超

余德浩 张英伯 章祥荪

四、代数几何分编委会

主 编 谈胜利

编 委 陈 猛 陈志杰 扶 鑫 孙笑涛

五、分析学分编委会

主 编 王斯雷

编 委 陈杰诚 陈志国 李嘉禹 李 松

施咸亮 王 伟

六、复分析分编委会

主 编 许以超

编 委 陈志华 李 忠 任福亮

十四、数理逻辑与数学基础分编委会

主 编 安鸿志 兰 天 副 主 编 安 忠家 编 委 安 忠家

《数学大辞典》分编委会

(以姓氏汉语拼音为序)

一、数理逻辑与数学基础分编委会

主 编 冯 琦

编 委 丁德成 高 速 金人麟 史念东

喻 良

二、数论分编委会

主 编 王 元

编 委 贾朝华 徐 飞 宗传明

三、代数学分编委会

主 编 张英伯

编 委 邓邦明 韩 阳 胡 峻 李慧陵

编 委 孟道骥 唐国平 唐忠明

四、代数几何分编委会

主 编 谈胜利

编 委 陈 猛 陈志杰 扶 磊 孙笑涛

五、分析学分编委会

主 编 王斯雷

编 委 陈杰诚 陈志国 李嘉禹 李 松

施咸亮 王 伟

六、复分析分编委会

主 编 许以超

编 委 陈志华 李 忠 任福尧

七、常微分方程与动力系统分编委会

主 编 文 兰

编 委 甘少波 李伟固 柳 彬 杨家忠

八、偏微分方程分编委会

主 编 陈恕行

编 委 陈祖墀 程 晋 刘宪高 苗长兴

王明新 周 忆 周子翔

九、泛函分析分编委会

主 编 葛力明

编 委 步尚全 侯成军 阮颖彬 吴文明

十、组合数学与图论分编委会

主 编 陈永川

编 委 范更华 葛根年 康庆德 李学良

刘桂真 王 军

十一、拓扑学与几何学分编委会

主 编 方复全

编 委 雷逢春 刘晓玫 吕 志 潘建中

邱瑞锋 赵学志

十二、微分几何学分编委会

主 编 陈维桓

编 委 李海中 莫小欢

十三、概率论分编委会

主 编 陈木法

编 委 李增沪 王凤雨 杨振明

十四、数理统计分编委会

主 编 安鸿志
编 委 陈 敏 崔恒健 冯士雍 石 坚
孙六全 于 丹 周 勇

十五、计算数学分编委会

主 编 余德浩
编 委 白中治 洪佳林 徐国良 许学军
袁 礼 张建中

十六、控制论与信息论分编委会

主 编 冯德兴
编 委 陈文德 方海涛 贾沛璋 林东岱
席在荣 章照止

十七、运筹学分编委会

主 编 章祥荪
编 委 赖炎连 刘 克 王建方 俞 建
张汉勤

英文王 毕兴王 林星王 操王 朴王 雷洪王 宝斗王

即文吴 半 《数学大辞典》编撰人员名单 结群王

平小梅 转 肖 (以姓氏汉语拼音为序) 王保田 戴为吴

安恒斌	安鸿志	白承铭	白峰杉	白洁静	白琪峰	白中治
毕春加	蔡开元	曹道民	曹海涛	曹晋华	常彦勋	车翔玖
陈波	陈伯勇	陈传淼	陈发来	陈光亚	陈翰馥	陈江荣
陈杰诚	陈金如	陈克军	陈猛	陈敏	陈木法	陈绍春
陈恕行	陈维桓	陈文斌	陈文德	陈锡康	陈小山	陈永川
陈志国	陈志华	陈祖墀	程代展	程晋	程乾生	崔恒建
崔晋川	戴华	戴彧虹	邓邦明	邓建松	丁德成	丁帆
堵丁柱	杜文学	段志生	方复全	方海涛	方述诚	冯德兴
冯琦	冯仁忠	冯士雍	扶磊	付梅	干丹岩	甘少波
高速	高卫国	高占恒	葛根年	葛力明	龚成	谷同祥
顾春燕	顾桂定	郭龙	韩彬	韩厚德	韩力文	韩阳
韩友发	何辉	洪佳林	洪文明	洪奕光	侯成军	侯庆虎
胡峻	胡磊	胡晓东	黄建国	黄廷祝	黄一	霍伟
季利均	贾沛璋	姜宁宁	金人麟	赖炎连	雷逢春	雷建国
雷娜	李炳仁	李郴良	李崇君	李海中	李慧陵	李嘉禹
李景华	李磊	李强	李莎莎	李松	李伟固	李玮
李文林	李新亮	李学良	李增沪	李忠	梁恒	林东岱
林海涛	刘宝光	刘宝康	刘成明	刘丹	刘凤霞	刘建熙
刘克	刘太顺	刘西民	刘宪高	刘小雷	刘晓玫	刘新国
刘兴平	刘秀丽	柳彬	楼红卫	卢琳璋	罗钟铉	吕金虎
吕志	马红平	毛剑琴	毛永华	孟道骥	孟兆良	苗长兴
莫小欢	潘东东	潘建瑜	潘建中	庞兴梅	彭帆	齐波
齐民友	秦化淑	邱建贤	邱瑞锋	曲晓英	任福尧	任玉新
阮颖彬	邵井海	施咸亮	石东洋	石坚	史济怀	史念东
史应光	史永堂	舒适	舒通	宋京生	苏仰锋	孙浩
孙慧	孙六全	孙跃方	谈胜利	谭琳	谭天众	檀结庆
汤华中	唐国平	唐忠明	田英杰	万德成	汪国昭	王凤雨
王国瑾	王国亮	王建方	王健	王健敏	王金德	王明新

王仁宏	王斯雷	王伟	王慰	王星炜	王兴华	王彦英
王颖喆	王元	魏木生	魏益民	文兰	吴佃华	吴文明
吴武清	伍渝江	席在荣	夏先伟	夏尊铨	肖锋	谢小平
修乃华	徐光辉	徐国良	徐琳	徐瑞恩	徐树方	徐伟宣
许传炬	许可康	许学军	许以超	许志强	薛军工	杨翠红
杨桂玉	杨家忠	杨立波	杨晓光	杨跃	杨振明	姚鹏飞
姚祥妹	姚振汉	殷剑兴	于丹	余德浩	余家荣	俞建
喻良	袁礼	袁亚湘	张彩明	张汉勤	张建中	张梅
张平	张强	张琴	张胜元	张通	张文生	张英伯
张余辉	章祥荪	章照止	赵金熙	赵千川	赵修利	赵学志
钟玲平	周彤	周文礼	周忆	周勇	周子翔	朱功勤
朱萍	祝家麟	祝坤福	全夏衣	王志刚	李天林	孙丁
彭少甘	岑长干	韩松	龚林	崔士恒	李斗	何高
符同谷	姜美	阳代喜	辛野	刘占高	国江高	彭高
胡特	文代梓	黎早梓	洪文彬	陈封彬	安封祿	燕春祿
焦太尉	覃为尉	洪奕彬	即文彬	林封彬	群封	黄太梓
朴雪	一黄	路致黄	国致黄	宋卿	森卿	刘保
国致雷	春至雷	王炎赫	魏人金	宁宁姜	郭帆贾	杜保李
禹嘉李	朝慧李	中燕李	甄崇李	身琳李	刁斌李	柳景李
程李	固朴李	公辛	范范李	殿李	磊李	半景李
翁永林	卧渠	忠辛	毛敏李	真学李	亮潘李	林天李
照数侯	霞凤侯	长侯	即海侯	泉宝侯	洪宝侯	新徽侯
国德侯	姪翔侯	雷小侯	高奕侯	月西侯	麒太侯	京侯
刘金玉	静特男	郭根马	王瑞赫	琳琳	丽泰侯	平兴侯
兴安苗	身兆孟	郭彭孟	毕永主	琴隆主	平珍且	志吕
茹永	聘建	薛兴	申致	俞致	未东	放小莫
潘正升	美醉升	英卿曲	韩淑平	贺致平	琳升秦	衣月衣
宋念戈	朴振戈	望五	书来五	亮海	薇井那	淋群洲
蔡怀	韩叶菽	史京末	邱想	彭勃	堂永史	洪宜史
刘懿	众天	根	陈想	衣短保	全六保	慧保
雨凤王	国玉	海勤王	杰英田	即忠	平国	中平
潘阳王	封金王	海勤王	封王	衣勤王	亮国王	勤国王

《数学大辞典》校阅人员名单

(以姓氏汉语拼音为序)

安鸿志	白峰杉	白琪峰	白中治	步尚全	蔡 宁	曹海涛
常彦勋	陈发来	陈翰馥	陈 宏	陈杰诚	陈克军	陈 猛
陈木法	陈恕行	陈维桓	陈文德	陈锡康	陈永川	陈志国
陈志华	陈志杰	陈祖墀	程代展	程乾生	崔恒建	崔俊芝
戴 华	戴建岗	戴或虹	邓建松	邓乃扬	丁德成	丁文兴
方复全	方海涛	冯德兴	冯果忱	冯 琦	冯仁忠	扶 磊
付 梅	傅俊义	甘少波	高红铸	高 速	高维东	葛根年
葛力明	谷同祥	韩力文	韩友发	何启明	洪佳林	洪家兴
洪文明	洪奕光	侯庆虎	侯宗义	胡 磊	胡晓东	胡永建
季利均	贾朝华	贾沛璋	江 松	金人麟	赖炎连	雷逢春
雷建国	雷天刚	黎 稳	李炳仁	李海中	李厚彪	李慧陵
李嘉禹	李 良	李 强	李 松	李同柱	李伟固	李文林
李新亮	李学良	李翊神	李增沪	李 忠	梁 恒	梁学章
林东岱	刘成明	刘 克	刘伟俊	刘西民	刘兴平	马延文
毛永华	孟兆良	苗长兴	莫小欢	牛 强	潘建中	齐民友
秦厚荣	秦化淑	任福尧	任玉新	沈纯理	施咸亮	石生明
史济怀	史念东	史应光	史永堂	宋京生	苏育才	孙宏伟
孙笑涛	谈胜利	檀结庆	汤华中	陶跃钢	王凤雨	王国瑾
王建方	王健敏	王敬庚	王恺顺	王仁宏	王瑞省	王斯雷
王 伟	王 慰	王颖喆	王 元	魏公毅	魏益民	文 兰
吴佃华	吴新元	席南华	席在荣	修乃华	徐 飞	徐 岗
徐国良	徐明曜	徐树方	徐伟宣	徐志霞	许传炬	许学军
许以超	杨翠红	杨家忠	杨立波	杨士林	杨晓光	杨兴强
杨振明	杨自强	姚大卫	姚海楼	姚鹏飞	叶其孝	殷剑兴
应隆安	于 丹	余德浩	喻 良	袁 礼	袁 巍	袁亚湘
曾紫婷	张彩明	张汉勤	张建中	张胜元	张英伯	张余辉
章祥荪	赵修利	赵以强	周才军	周 恒	周 忆	周 勇
周子翔	朱 彬	朱功勤	祝家麟	宗传明	邹国华	

首先,《数学大辞典》的水平定位于理工科大学二年级或有相应数学水平的科技人员

前言

数学的重要性,已为众所周知,不会有很多争议。另一方面,由于数学的抽象及其分支领域的繁杂,文献浩如烟海,又会使人对数学感到望而生畏,这一点不奇怪。即便是专业数学家,对他专业以外的数学领域,往往也了解有限。

在这种情况下,各种层次的数学辞书的出版就很有必要。数学强国对这项工作都很重视。层次最高的当推专业百科全书,这种书由该领域的权威一至数人撰写,分章节写,对该领域的历史、进展及重大成果作一个全面介绍,有些方法与重要结果的证明线索也将摘要阐述。例如,马宁与潘奇什金著的《近代数论导引》和诺维科夫著的《拓扑学》等,最初由俄文出版,后经修订,由施普林格出版社出英文版。又如,前苏联曾组织几百位数学家编写《数学百科全书》,该书是以条目为单元编写的,以普及为主,供读者查考;不久即被 180 余位数学家共同翻译并作补充,用英文出版;由于撰写条目的人数众多,可以看出写作的风格各异,这是很自然的。再一种层次如各种“手册”(Handbook),大体上是结果罗列,不过也有些学科,大概是本身的范围与体系尚不成熟,以“手册”名义出版辞书,但实质是专业百科全书性质,如美国出版的《组合数学手册》。

辞书的出版应不分国家,可以互相借鉴与使用。我国曾影印过部分施普林格出版社出版的专业数学百科全书,如前述两本(即马宁和诺维科夫等的书)。也翻译出版过苏联的《数学百科全书》和日本的《岩波数学辞典》等。这些书的出版都对我国的数学发展与普及起过重要作用。但这不等于说,我们可以不从事这方面的编著工作了。实际上,辞书的出版,是我国数学事业的一项基础工作,也是我国数学水平的反映与检验。过去我国曾对这项工作做过相当努力。如华罗庚为德国 Teubner 出版社撰写的专业百科全书一册《指数和的估计及其在数论中的应用》(德文),后来又被译成中文与俄文出版,虽历经五十年,仍是这个领域的基本文献。改革开放后,历时十年,经全国数学家的努力编成我国自己的百科全书《中国大百科全书·数学》,这是我国自己完成的第一部大型数学辞书。从中,我们积累了好的编写辞书的经验。

近三十年来,数学在我国有了较大发展,年轻数学家辈出,已具备编写一本大型数学辞典的条件。科学出版社曾委托南开大学数学系编写过《简明数学词典》,有好的经验;他们顺应形势,组织全国部分数学家编写一本大型的以辞条为单元的数学辞典,这是一个较大的系统工程,它的出版对我国数学的发展与普及有重要的意义。

首先,《数学大辞典》的水平定位于理工科大学二年级或有相应数学水平的科技人员

能了解本书的大部分内容大意,可以作为进一步学习的导引。初等数学内容不含于本书之中。数学史不适宜用条目形式撰写,所以由李文林教授写一篇大事记。由于20世纪刚过,关于20世纪的数学成就如何评价需待一定时间检验之后,才能较为明确,因此大事记的编写的截止时间为19世纪末,但辞条中可以涉及20世纪的相关工作。

第二,本书力求做到严谨,内容可靠。同时注意普及性与可读性及趣味性。还希望尽量做到内容的现代化。

第三,全书正文共分17个部分,每一部分设一个分编委会,基本上由一个单位(数学研究所或数学院系)来承担,分编委会确定该领域应设置的条目,以及条目的撰稿人与审稿人。这样便于工作与讨论。由分编委会主任等组成辞典的编委会,编委会的职责为确定编撰方针、组织、协调与工作安排等,总之,使工作有条不紊地进行。

最后,我们对参与这项工作的数学家所在单位的大力支持致以衷心感谢。我们盼望通过这次工作,能为我国编写辞书积累一些经验,作为以后工作之借鉴。由于本书规模较大,编写人较多,不足之处在所难免,我们很希望得到读者的批评与指正。

王元

2010年6月

《辞海》是新中国成立以来出版的一部大型综合性辞书,它的出版对于我国辞书事业的发展和社会主义精神文明建设都具有重大的意义。《辞海》的出版,是党和政府重视知识、尊重知识、尊重人才、尊重创造的体现,也是我国知识界、文化界、出版界共同努力的结果。《辞海》的出版,对于我国知识界、文化界、出版界都具有重大的意义。《辞海》的出版,是党和政府重视知识、尊重知识、尊重人才、尊重创造的体现,也是我国知识界、文化界、出版界共同努力的结果。

《辞海》的出版,是党和政府重视知识、尊重知识、尊重人才、尊重创造的体现,也是我国知识界、文化界、出版界共同努力的结果。《辞海》的出版,对于我国知识界、文化界、出版界都具有重大的意义。《辞海》的出版,是党和政府重视知识、尊重知识、尊重人才、尊重创造的体现,也是我国知识界、文化界、出版界共同努力的结果。

目 录

使用说明

1. 本辞典为数学科学方面的专业性辞典,正文共分 17 个部分,内容按学科知识体系编排,词条以逻辑关系为序。
2. 书中词条一般由以下三部分顺序组成:中文词目、英文词目、释文。
3. 中文词目以黑体字列出,并注以相应的英文词目。所有中英文词目,在索引中作为主条目;释文中带下划线的名词术语及其相应的英文译名在索引中作为次条目。
4. 一个词条的内容涉及其他词条,或需由其他词条补充的,一般采用“参见”形式。在释文中的楷体字表示的即是希望读者进一步参阅的词条。
5. 括号的用法:方括号中的文字是可以省略的,圆括号中的文字是解释说明性文字或者可以替换括号前面的紧邻文字。

6. 为便于查阅,正文后附有按汉语拼音排序的中文名索引,以及按英文字母排序的英文名索引。

3.4 型	103	5.3 可测函数与积分	317
3.5 模论	117	5.4 积分变换	322
3.6 交换代数	123	5.5 位势论	325
3.7 环论	131	5.6 变分法	331
3.8 范畴论	145	5.7 凸分析	336
3.9 同调代数	148	六、复分析	344
3.10 代数 K 理论	152	6.1 单复变函数论	344
3.11 群论	158	6.2 多复变函数论	356
3.12 代数群	186	七、常微分方程与动力系统	373
3.13 拓扑群	205	7.1 常微分方程	373
3.14 李群	210	7.2 动力系统	388
3.15 量子群	215	八、偏微分方程	400
四、代数几何	223	九、泛函分析	466
4.1 一般理论	223	9.1 泛函和空间理论	466
4.2 代数曲线	238	9.2 算子	480
		9.3 谱理论	485
		9.4 算子代数	489
		9.5 非线性泛函分析	497

目 录

前言

使用说明

一、数理逻辑与数学基础	1
1.1 模型论	1
1.2 证明论	15
1.3 集合论	19
1.4 递归论	39
1.5 数学基础	49
二、数论	55
三、代数学	83
3.1 域论	83
3.2 多项式	87
3.3 线性代数	90
3.4 型	103
3.5 模论	117
3.6 交换代数	123
3.7 环论	131
3.8 范畴论	145
3.9 同调代数	148
3.10 代数 K 理论	152
3.11 群论	158
3.12 代数群	186
3.13 拓扑群	205
3.14 李群	210
3.15 量子群	215
四、代数几何	223
4.1 一般理论	223
4.2 代数曲线	238

4.3 代数曲面	252
4.4 高维代数簇的极小模型理论	257
4.5 阿贝尔簇	259
4.6 算术代数几何	263
4.7 霍奇理论	265
4.8 模空间理论	270
4.9 概形理论	275
五、分析学	285
5.1 分析学基础·实分析	285
5.2 测度论	314
5.3 可测函数与积分	317
5.4 积分变换	322
5.5 位势论	325
5.6 变分法	331
5.7 凸分析	336
六、复分析	344
6.1 单复变函数论	344
6.2 多复变函数论	356
七、常微分方程与动力系统	373
7.1 常微分方程	373
7.2 动力系统	388
八、偏微分方程	400
九、泛函分析	466
9.1 泛函和空间理论	466
9.2 算子	480
9.3 谱理论	485
9.4 算子代数	489
9.5 非线性泛函分析	497

9.6 遍历理论	504	15.2 数值代数	852
十、组合数学与图论	510	15.3 数值积分、数值微分与常微分方程数值解	888
10.1 组合数学	510	15.4 偏微分方程数值解 —— 有限元与边界元	899
10.2 组合设计	543	15.5 偏微分方程数值解 —— 差分法、谱方法与计算流体	917
10.3 图论	558	15.6 函数逼近与计算几何	931
十一、拓扑学与几何学	585	15.7 统计计算与蒙特卡罗方法	957
11.1 一般拓扑学	585	十六、控制论与信息论	971
11.2 代数拓扑学	598	16.1 控制论	971
11.3 微分流形	638	16.2 信息论	1000
11.4 射影几何学·仿射几何学	644	16.3 密码学	1021
11.5 初等几何学	660	十七、运筹学	1036
十二、微分几何学	689	17.1 数学规划理论	1037
十三、概率论	720	17.2 线性规划	1047
13.1 概率空间	720	17.3 非线性规划	1053
13.2 随机变量	725	17.4 多目标规划	1061
13.3 极限定理	735	17.5 动态规划	1063
13.4 随机过程通论	741	17.6 组合优化	1065
13.5 随机分析	746	17.7 对策论	1071
13.6 马尔可夫过程	753	17.8 排队论	1078
13.7 无穷维马尔可夫过程	764	17.9 可靠性理论·更新论	1092
13.8 平稳过程	768	17.10 库存论·供应链管理	1098
十四、数理统计	771	17.11 决策论·搜索论	1101
14.1 样本·统计量	771	17.12 其他运筹学方法	1108
14.2 假设检验	780	附 I 数学发展历史纪要	1116
14.3 非参数统计	790	附 II 人名译名对照表	1121
14.4 统计决策	793	II.1 中文—外文译名	1121
14.5 抽样与统计过程控制	796	II.2 外文—中文译名	1129
14.6 试验设计	806	英文名索引	1139
14.7 回归分析	810	中文名索引	1189
14.8 生存分析	827		
14.9 时间序列分析	838		
十五、计算数学	847		
15.1 基本概念与误差理论	847		

数理逻辑与数学基础

符号体系 [symbolism] 由一系列符号和它们的组合规则构成, 用来替代自然语言对某些知识系统进行描述、分析和研究。

(执笔: 金人麟 校阅: 史念东)

数理逻辑 [mathematical logic] 亦称**符号逻辑**(symbolic logic), 处于数学和数学哲学的交叉部分。数理逻辑一方面使用形式逻辑的思想方法研究数学及数学推理的基本原则和规律; 另一方面使用数学工具来表示和研究形式逻辑的性质和结构。数理逻辑包含了很多分支和研究方向, 其中最主要的分支为模型论、证明论、集合论和递归论(即可计算理论)。这四个分支的发展都和哥德尔(K. Gödel)在 20 世纪 30 年代完成的工作有着密切的联系。

数理逻辑是伴随着数学公理化进程而不断发展的。在 19 世纪后期到 20 世纪初, 弗雷格(G. Frege)和罗素(B. Russell)致力于用符号逻辑替代自然语言来描述数学原理和数学推理, 他们发展了命题演算和谓词演算, 使得数学更加系统化和严格化, 从而使得数学和逻辑成为一体。他们的工作也使得人们更加了解了数学推导中逻辑语义和逻辑语法的差别。这推动了数学公理化的进程。但在此发展中产生了对数学公理化过于乐观的倾向, 即认为最终可以找到一个相容的、完备的公理系统使得所有的数学定理, 包括这个公理系统的相容性, 都成为这个公理系统的推论。这就是所谓的希尔伯特计划。但是这个倾向却被哥德尔所否定。

哥德尔关于一阶逻辑的完全性定理表明数学中基于语法上的推导和基于语义上的推理是等价的。基于语法上的推导是一个按照一定规则进行的机械过程, 它不依赖于原因、结果、以及中间过程的具体含义; 基于语义上的推理则通过对每一语句在每个数学结构(模型)中的语义解释和真假值来确立原因和结果的关系。哥德尔完全性定理深刻地揭示出数学理论中语法形式推导和语义内容分析推理之间的一致性。哥德尔完全性定理也因此展现了模型在数学推理中的作用, 促进了模型论的发展。

哥德尔第一不完全性定理成功地应用数学推理来分析逻辑的内涵和其局限性, 并证明了希尔伯特计划的不可行性, 即对于任意一个相容的, 包含了弱算术公理的, 可判定的公理系统, 总存在一个语句使其不能从这公理系统出发来证明或反证。这成为另一分支证明论的起点。

为了解决在引进了无限集合后产生的各种超出当时想象

的问题, 康托尔(G. Cantor)建立了朴素集合论。但在罗素发现了著名的罗素悖论后, 对朴素集合论进行改造就迫在眉睫。在策梅洛(E. Zermelo)、弗伦克尔(A. Fraenkel)及其他数学家的努力下, 集合论的公理系统如策梅洛-弗伦克尔公理系统, 在数理逻辑的框架下得以建立。策梅洛-弗伦克尔公理系统的引入避免了罗素悖论。因为策梅洛-弗伦克尔公理系统是作为整个数学的基础理论而引进的, 它的相容性就得到数学家们的重视。哥德尔对集合论发展的贡献存在于两个方面。一方面, 哥德尔第二不完全性定理证明了从任意一个相容的, 包含了弱算术公理的, 可判定的公理系统出发不可能证明其自身的相容性。所以在策梅洛-弗伦克尔公理系统中不可能证明该系统的相容性, 从而使人们避免了在策梅洛-弗伦克尔公理系统内寻找本系统相容性的无谓努力。另一方面, 哥德尔引入了可构造性和可构造域, 从而建立了选择公理和连续统假设和策梅洛-弗伦克尔公理系统的相对相容性。这和以后科恩(P. Cohen)利用力迫法证明的非选择公理以及非连续统假设和策梅洛-弗伦克尔公理系统相对相容的结果一起成了现代公理集合论的独立性证明的样本。

哥德尔第一不完全性定理证明中的一个重要步骤是分析可证明语句的计算复杂性。哥德尔证明了在一个相容的、包含了弱算术公理的、可判定的公理系统中, 所有可证明语句的集合是不可判定的, 所以一定存在一个不在这集中的语句使得这语句的否定也不在这集中。为了完善对可判定性的描述, 丘奇(A. Church), 图灵(A. M. Turing)等提炼出递归函数和图灵可计算性等概念。对这些概念的深入研究促发了递归论的产生和发展。

数理逻辑是一个广泛的领域, 以上四个分支并不包含所有数理逻辑的内容。另外如多值逻辑、模糊逻辑、模态逻辑等, 都是数理逻辑有趣的组成部分。

(执笔: 金人麟 校阅: 史念东)

1.1 模型论

模型论 [model theory] 数理逻辑的一个分支, 它主要研究形式语言及其在模型中的语义解释之间的关系。例如, 群论公理是形式语言中有关一个乘法符号 $\cdot$ 和一个常元符号 e 的三个语句, 即 ① $\forall x(x \cdot e = x)$; ② $\forall x \exists y(x \cdot y = e)$; ③ $\forall x \forall y \forall z((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$ 。关于群论公理的一个模型则是一个具体的群, 如整数加群、正方形可逆矩阵乘法群、 n 个元素上的置换群等。群论公理在一个群, 如可逆矩阵乘法群中的解释可以叙述为: ① e 是一个右单位矩阵; ② 对每个可逆矩阵都存在一个右逆矩阵; ③ 矩阵乘法满足结合律。模型论中的基本定理有哥德尔完全性定理、紧致性定理、勒文海姆-斯科伦定理等。

从 20 世纪初以来, 模型论得到了蓬勃发展, 而且模型论

的纯理论研究和其在其他数学领域中的应用已经相互交织在一起。稳定性理论(stability theory)是模型论中的一个重要研究方向。它从最初的对理论和模型的分类研究,发展出了很多方法和技巧。这些方法和技巧被应用于解决代数及代数几何中的问题。强极小理论和序极小理论也是模型论中有趣的研究领域。分析利用强极小和序极小模型中可定义集的良好性质,代数闭域,实数域和其他数学结构中的很多新的有趣的现象被揭示出来。非标准分析也是模型论的一部分。利用模型论中的紧致性定理,人们可以构造一个实数域的扩张,使在其中存在无穷大和无穷小的正实数。这些无穷大和无穷小数可以作为工具来帮助人们发现数学中新的现象和定理。模型论中还有很多有趣的研究领域,如抽象模型论、有限模型论、概率模型论、递归模型论等。

(执笔:金人麟 校阅:史念东)

逻辑演算 [logical calculus] 各个逻辑系统的总称,如命题演算、谓词演算等都是逻辑演算。有时逻辑演算还指逻辑推导的一些法则。各种形式语言可被用于描述各种不同的知识系统,但是逻辑推导的法则应该独立于这些系统的个性。比如从“甲是真”和“甲推出乙”可以推出“乙是真”,就是逻辑演算的一个法则。

(执笔:金人麟 校阅:史念东)

逻辑符号 [logical symbol] 在形式语言中用以表示一些逻辑联结词的符号。比如 $\neg$ (其语义一般为“不”或“否定”), $\rightarrow$ (其语义一般为“如果...,那么...”或“推出”), $\leftrightarrow$ (其语义一般为“当且仅当”或“等价于”), $\wedge$ (其语义一般为“和”或“合取”), $\vee$ (其语义一般为“或”或“析取”),等等。

(执笔:金人麟 校阅:史念东)

形式语言 [formal language] 各种有严格定义的人工语言的总称,每一种形式语言都包括一个预先设定的词汇表和一些组成公式或语句的形成规则或语法规则。形式语言是人类自然语言的抽象化和理想化。用形式语言来讨论数学和逻辑问题可以避免自然语言中一词多义或一语多义现象带来的不确定性。

(执笔:金人麟 校阅:史念东)

符号语言 [symbolic language] 一种形式语言。它的词汇表是由一些符号组成。比如命题逻辑所使用的符号语言词汇表包含了 $\neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee, A_1, A_2, \dots$ 等符号,其中 $A_1, A_2, \dots$ 被称为命题符号。

(执笔:金人麟 校阅:史念东)

形成规则 [formation rule] 一些在形式语言中组成公式的语法规则。比如命题逻辑中的形成规则包含了以下法则:“对每个正整数 k, A_k 是一个公式”,“如果 p 是一个公式,那么 $\neg p$ 就是一个公式”,“如果 p 和 q 是两个公式,那

么 $p \rightarrow q, p \leftrightarrow q, p \wedge q, p \vee q$ 也都是公式”。

(执笔:金人麟 校阅:史念东)

出现 [occurrence] 如果一个符号或一串符号被用在了一个公式中的某个部位,这个符号或这串符号就被称为在这个公式中在这个部位的一次“出现”。比如在公式 $(A_2 \wedge (A_2 \rightarrow A_1)) \rightarrow A_1$ 中符号 A_1 “出现”了两次。

(执笔:金人麟 校阅:史念东)

规矩 [的] [well-formed] 在形式语言中如果一个符号序列是按照形成规则而构造得来的,这个符号序列的构造就被称为规矩的。

(执笔:金人麟 校阅:史念东)

规矩公式 [well-formed formula] 在形式语言中如果一个符号序列(表达式)是按照形成规则而构造出来的,那么这个符号序列(表达式)被称为一个规矩公式。

注 规矩公式以前的别名为“良构公式”或“合式公式”。

(执笔:金人麟 校阅:史念东)

辖域 [scope] 辖域概念常被用在谓词逻辑的公式中。一个量词(如全称量词 $\forall x$)的辖域指的是公式中和这个量词相关的部分。例如,在公式 $(\varphi(0) \wedge (\forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1)))) \rightarrow \forall y \varphi(y)$ 中带下划线的部分是第一个全称量词 $\forall x$ 的辖域。

(执笔:金人麟 校阅:史念东)

逻辑运算 [logical operation] 当逻辑符号被赋予实际意义时,它们可被看成一种运算。例如,在 0-1 布尔代数中通常可定义 $x \wedge y = \min\{x, y\}$, 所以 $\wedge$ 可以被看作一个在 0-1 布尔代数中的二元运算。这样的运算可以被推广到所有(有限或无限) 0-1 序列上。这些和逻辑符号对应的运算被称为逻辑运算。

(执笔:金人麟 校阅:史念东)

矢列式 [sequent] 矢列式是形式为 $A \rightarrow B$ 的公式。在某些逻辑系统中 A 可以是一个公式或一串公式。

(执笔:金人麟 校阅:史念东)

语法 [syntax] 在形式语言中语法指的是语言、公式和语句组成的规则以及对规则的研究。这些规则通常独立于公式和语句的具体意义。在命题逻辑和谓词逻辑中基于一个公理系统上的一个形式证明可以被定义为按照一些规则构造的一个有着有限个公式的序列,而这样的构造是机械的,不依赖于公理系统和所要证明结论的具体意义。这样的证明被称为一个语法上的证明。

(执笔:金人麟 校阅:史念东)

语义 [semantics] 在形式语言中语义指的是语言、公