青年自学读物

平面解析几何

JIEXI JIHE

辽宁省工科院校
"初等数学"编写组编

辽宁人民出版社

·青年自学读物·

平面
解析几何

辽宁省工科院校“初等数学”编写组编

辽宁人民出版社
一九七三年·沈阳

平面解析几何

（青年自学读物）

辽宁省工科院校“初等数学”编写组编

辽宁人民出版社出版

（沈阳市南京街6段1里2号）

辽宁省新华书店发行

朝阳六六七厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：5 1/4

字数：98,000 印数：1—95,000

1973年11月第1版 1973年11月第1次印刷

统一书号：7090·27 定价：0.43 元

毛主席语录

教育必须为无产阶级政治服务，必须同生产劳动相结合。

自然科学是人们争取自由的一种武装。人们为着要在社会上得到自由，就要用社会科学来了解社会，改造社会进行社会革命。人们为着要在自然界里得到自由，就要用自然科学来了解自然，克服自然和改造自然，从自然里得到自由。

出 版 说 明

为了适应广大青年自学政治和科学文化知识的需要，我们计划编辑出版一套青年自学读物。

辽宁省工科院校“初等数学”编写组编的“初等数学”就是选入青年自学读物的一种，其余将陆续出版。

编 者 的 话

编写这套“初等数学”的目的是帮助读者较系统地学习初等数学的基本知识，掌握准确而较熟练的运算方法，培养应用初等数学知识分析问题与解决问题的能力，提高自学和自己研究问题的能力。

遵照毛主席关于**“教材要彻底改革”**的指示，我们在编写过程中，力求贯彻政治与业务的统一，理论与实践相结合，以及少而精和便于自学等原则。由于我们对毛主席的教育革命思想学习得不好，书中一定会有缺点和错误，诚恳希望工农兵学员、革命教师及广大读者批评指正。

这套“初等数学”，分《代数》、《几何》、《三角》、《平面解析几何》四个分册出版，做为辽宁省各工科院校工农兵学员的文化补习教材，也适于各条战线的广大青年自学参考。

这套“初等数学”是在辽宁省教育局的领导下，经省内各工科院校共同研究讨论，由东北工学院负责执笔编写的。参加的院校有大连工学院、大连海运学院、大连铁道学院、大连轻工学院、大连水产专科学校、鞍山钢铁大学、阜新煤矿

学院、抚顺化工学院、沈阳机电学院。此外，还有哈尔滨工业大学、吉林工业大学、长春地质学院、沈阳气压机厂“七·二一”工人大学、沈阳市沈河区教师学校、沈阳冶金机械学校、沈阳有色金属学校等单位应邀参加了本书的审查工作，谨致谢意。

辽宁省工科院校“初等数学”编写组

一九七三年六月

目　录

恩格斯指出："纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系……。"我们学过的几何学所研究的对象是现实世界的空间形式，而代数学所研究的对象则是现实世界的数量关系．但是对于空间形式和数量关系的研究是不能截然分开的．解析几何就是以坐标法为桥梁，使形和数结合起来，用代数方法研究几何问题的一门数学学科．在这里，空间形式的几何性质可以通过数量关系显示出来；而数量关系的一些代数规律又可以借助几何图形得到解释．因此，解析几何主要是研究这两个方面的问题，即如何由曲线建立它的方程以及如何由方程讨论曲线的性质．

第一章　基本问题

第一节　点与坐标

1·1　点与坐标的对应关系

坐标法在代数和三角中已经学过，这里只简单复习一下．

在平面上画两条互相垂直的直线：横的叫做 x 轴（或横轴），规定向右的方向为正方向；纵的叫做 y 轴（或纵轴），

规定向上的方向为正方向．两轴的交点O叫做坐标原点，简称原点．两轴上的长度单位一般说来是相等的（也可以是不相等的）．这样，就建立了一个平面直角坐标系．

建立了坐标系之后，平面上任意一点的位置，就可以用一对有顺序的数来表示．例如，A为图 1—1 中平面上一个点，我们从A点分别作x轴和y轴的垂线，交x轴于E，则$OE=3$；交y轴于F，则$OF=4$．3和4分别叫做A点的横坐标和纵坐标．这一对有顺序的数3和4叫做A点的坐标，写为（3，4）．反过来，对于任意一对有顺序的数，例如（$-3,-4$），我们可以在平面上确定一点C，使C点的横坐标和纵坐标分别为-3和-4．

一般地，在建立了坐标系之后，对于平面上的任意一点，存在一对表示这个点的顺序的数；反过来，对于任意一对有顺序的数，也存在一个以这一对数为坐标的点．这样，平面内的点和一对有顺序的数之间就建立了一一对应的关系．

通过坐标系，把平面上的点与一对有顺序的数（即点的坐标）联系起来的方法，叫做坐标法．

例　在图1—1的坐标系XOY中，求点$A(3,4)$关于x轴、y轴以及原点O的对称点的坐标．

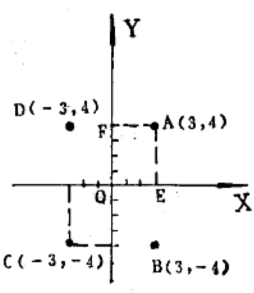


图　1—1

解：从平面几何里一个点关于轴对称和关于中心对称的概念，容易知道：点$B(3,-4)$是点$A(3,4)$关于x轴的对称点；点$D(-3,4)$是点$A(3,4)$关于y轴的对称点；点

C $(-3,-4)$ 是点 A $(3,4)$ 关于原点O的对称点。

由上例的启发，我们可总结出下面的结果：

点 (a,b) 与点 $(a,-b)$ 关于 x 轴是对称的；

点 (a,b) 与点 $(-a,b)$ 关于 y 轴是对称的；

点 (a,b) 与点 $(-a,-b)$ 关于原点是对称的。

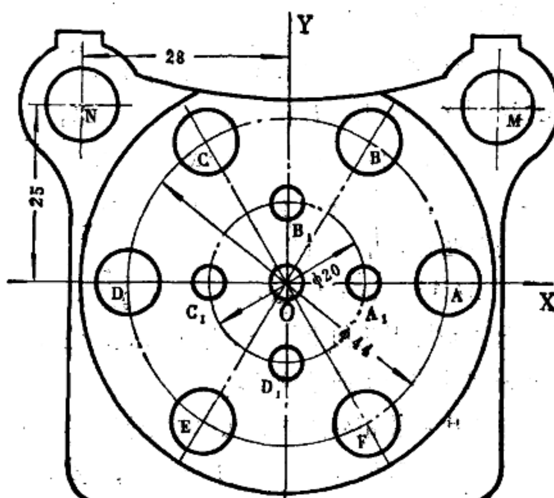
习　　题

1．在直角坐标系中，描出下列各点，并指出哪些点关于 x 轴对称？哪些点关于 y 轴对称？哪些点关于原点对称？

$(1,3)$，$(1,-3)$，$(-1,3)$，$(-1,-3)$，

$(0,-4)$，$(4,0)$，$(-4,0)$，$(0,4)$．

2、标出模具俯视图（图 1—2）上各圆孔中心的坐标，并指出对称性。



~~A(22,0) B(22, 22) C(22) D(-22,0) E(~~

图 1—2

1·2 两点间距离公式

建立了坐标系，就可用两点的坐标来表示两点间的距离。

已知两点 $M_1(x_1,y_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2)$（图1—3），求这两点间的距离公式。

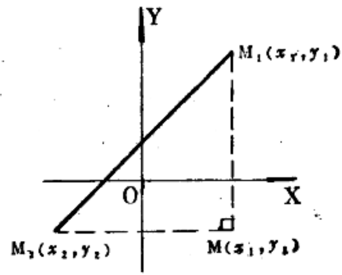


图 1—3

过 $M_1(x_1,y_1)$ 作 y 轴的平行线，过 $M_2(x_2,y_2)$ 作 x 轴的平行线，两条线交于 M。由图1—3容易知道 M 点的坐标为 (x_1,y_2)。由于 M_1M_2 是直角 $\triangle M_1MM_2$ 的斜边，根据勾股弦定理得

$$M_1M_2=\sqrt{(M_2M)^2+(M_1M)^2}.$$

因为 $M_2M=|x_1-x_2|$，$M_1M=|y_1-y_2|$，所以，

$$(M_2M)^2=|x_1-x_2|^2=(x_1-x_2)^2,$$

$$(M_1M)^2=|y_1-y_2|^2=(y_1-y_2)^2,$$

代入上面勾股弦定理中，就得

$$M_1M_2=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

距离公式是解析几何里的一个基本公式，它是用代数方法研究几何问题的一个简单例子。

例1　机床齿轮箱外壳的轴孔中心坐标是 $A(120,210)$，$B(265,530)$，$C(350,315)$（图1—4），求 A、B 两孔中心距及 A、C 两孔的中心距。

解：利用两点间距离公式，得

$$
\begin{aligned}
AB &= \sqrt{(265-120)^2+(530-210)^2} \\
&= \sqrt{145^2+320^2} \\
&= \sqrt{21025+102400} \\
&= \sqrt{123425} \\
&= 351 \text{（毫米）},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
AC &= \sqrt{(350-120)^2+(315-210)^2} \\
&= \sqrt{230^2+105^2} \\
&= \sqrt{63925} \\
&= 253 \text{（毫米）}.
\end{aligned}
$$

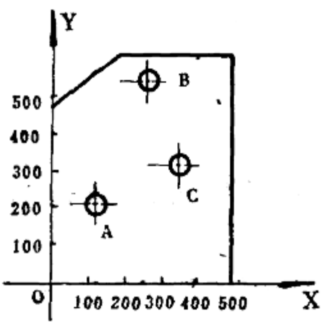


图 1—4

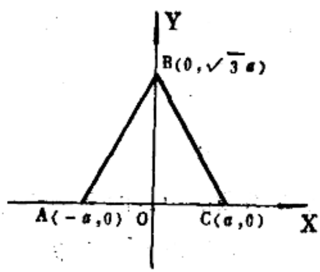


图 1—5

例 2　已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点是 $A(-a,0)$，$B(0,\sqrt{3}a)$，$C(a,0)$（图 1—5）. 求证这个三角形是等边三角形.

证明：$CA=\sqrt{(-a-a)^2+(0-0)^2}=2a$,

$BC=\sqrt{(a-0)^2+(0-\sqrt{3}a)^2}=2a$,

$AB=\sqrt{[0-(-a)]^2+(\sqrt{3}a-0)^2}=2a$.

$\therefore$ $AB=BC=CA$，即 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

习　题

1. 求下列两点间距离：

(2,1)，(5,1)；　$\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$；

(－1,6)，(2,1)；(1,1)，$(\cos\theta_1,\sin\theta_1)$。

2. 在 y 轴上找一点，使它与点 (4,－6) 的距离为 5．

3. 已知 $\triangle ABC$ 的三顶点 $A(1,4)$，$B(-5,0)$，$C(-2,-1)$。求这个三角形的周长。

4. 证明顶点为 (1,4)，(4,1)，(5,5) 的三角形是一个等腰三角形。

5. 甲船在一港口的东 50 浬、北30浬；乙船在同一港口的东 17 浬、南26浬，求两船间的距离。

1·3　两点间中点公式

所谓中点公式，就是利用线段的两个端点的坐标来表达这个线段的中点的坐标公式。

已知两点 $M_1(x_1,y_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2)$（图 1 — 6），求线段M_1M_2 中点的坐标。

先设中点M的坐标为 (x,y)，过 M_1、M、M_2 分别作 x 轴的垂线，垂足分别为 P_1、P、P_2．根据几何中关于平行线截得比例线段定理，就有

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{M_1M}{MM_2}=1。$$

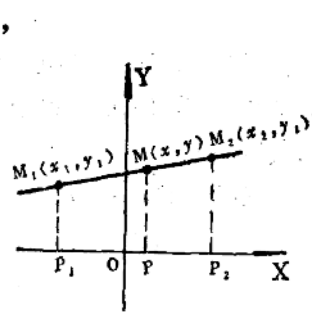


图　1—6

因为

$P_1P=|x-x_1|$，$PP_2=|x_2-x|$，所以，

$$\frac{|x-x_1|}{|x_2-x|}=1.$$

由于M是线段 M_1M_2 的中点，从而P也是线段 P_1P_2 的中点，于是 $x-x_1$ 和 x_2-x 的符号相同且数值相等，因此上式左端的绝对值符号可以去掉，而写成

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=1.$$

由此解出 x，即得中点M的横坐标

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

同样，可得中点M的纵坐标

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

所以两点 $M_1(x_1,y_1)$和 $M_2(x_2,y_2)$ 间的中点公式为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

例 1　已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标分别为 $A(3,7)$、$B(5,-1)$、$C(-2,-5)$，如图 1—7，求中线CD的长。

解：首先求中点D的坐标 (x,y)，由中点公式得

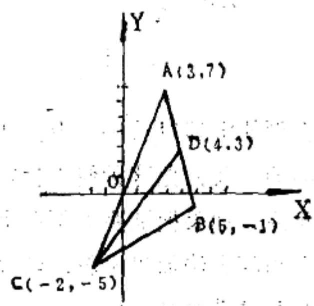


图　1—7

$$x=\frac{3+5}{2}=4,\qquad y=\frac{7+(-1)}{2}=3.$$

再由距离公式得