学者书屋系列

实变函数

王萍 于继杰 樊丽颖◎主编

经典

HEUP 哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

学者书屋

实变函数

王　萍　于继杰　樊丽颖　主编

哈尔滨工程大学出版社

内容提要

本书是作者在多年教学经验的基础上撰写的一部实变函数教材。内容包括集合、测度论、可测函数、Lebesgue 积分、微分与积分，每章后均附典型例题与习题，以便读者学习和掌握实变函数的基础知识。

本书可供理工科高等院校应用数学专业学生使用，也可供有关研究人员、科研工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

实变函数/王萍，于继杰，樊丽颖主编．—哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2010.7

ISBN 978-7-81133-810-2

Ⅰ.①实… Ⅱ.①王… ②于… ③樊… Ⅲ.①实变函数 Ⅳ.①O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 116827 号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本 787mm×960mm　1/16
印　　张 11.75
字　　数 196 千字
版　　次 2010 年 7 月第 1 版
印　　次 2010 年 7 月第 1 次印刷
定　　价 22.80 元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前　言

本书是为理工科高等院校应用数学专业编写的实变函数课程的教材，主要内容包括集合及其基数、欧氏空间中的点集、点集的测度、可测函数、Lebesgue 积分及其性质、积分极限的三大定理、重积分化为累次积分的 Fubini 定理及 Lebesgue 微分定理.

实变函数是数学与应用数学专业的一门专业基础理论课，它的中心任务是建立 Lebesgue 测度和 Lebesgue 积分理论，运用集合论的思想方法分析、解决问题. 由于这一特点，这门课程一直是教与学较难的课程. 为了便于教与学，我们力图从学生实际出发，由浅入深地编写这本教材，编写过程中我们注意了以下几点：

1. 既注意基本理论的科学性，又充分考虑内容的启发性；

2. 既保持理论体系的相对完整性和深度，又力求深入浅出，循序渐进，便于学生自学；

3. 既注意观点与方法的现代性，又尽量与数学分析的相关内容相联系.

我们正处于从注入式教育向素质教育转变的历史时期，众所周知，学习数学的关键在于理解数学，数学教育改革的根本任务在于如何从过去的传授数学知识转向培养学生提出、分析和解决数学问题或实际问题的能力，要让学生掌握解决问题的钥匙，同时，使他们懂得该如何学习. 基于这个原则，我们力求使本书直观、通俗易懂，尽可能让读者明白为什么要引进某个概念，为什么考虑某个问题，如何得到所要的结论，如果读者阅读此书时，能轻松、准确地把握本门课程中的重要概念和定理，并从中有所收获，那么作者的努力就没有白费.

参加本书编写的有：王萍（第一章），于继杰（第四、五章），樊丽颖（第二、三章），全书由王萍统稿.

在本书编写过程中，参考了江泽坚先生和吴智泉先生合编的《实变函数论》，周民强编写的《实变函数论》及其他一些教材和数学史料. 在此，我们对所有参考过的教材与书籍的作者深表谢意！另外，感谢崔云安教授仔细阅读了全部手稿，指出了许多疏漏处. 最后还要感谢哈尔滨理工大学应用科学学院及应用数学系的领导在作者编写过程中所给予的鼓励、支持和帮助，正是由于他们的支持，才使得本书顺利完成.

编　者

2010 年 6 月

目　　录

第一章　集　　合

集合论产生于19世纪80年代,它是德国数学家Cantor(康托尔)创立的,现已发展成为一个独立的数学分支,其基本概念与方法已渗入到近代数学各个领域,成为近代数学的一个特征.集合论的观点与现代数学的发展不可分割地联系在一起,它的初期工作与数学分析的深入研究密切相关,并为完善实变函数理论奠定了基础.

集合是数学中最原始的概念,一般是不能加以精确定义的.

为什么要引入集合这样一种概念?一是为了考查某种事物的整体特征和结构,研究舍去事物个性后的抽象共性,对其进行归类;二是集合论的语言非常简明且能更加细致地区分研究对象的各种内涵,考查它们各种组合的可能性时还有很强的概括性.这种观点和方法早在18世纪的数学工作中就已出现,如研讨曲面上过一点的所有曲线,某力学系统中所有可能出现的运动等.不过,真正促进对集合论作系统研究的动力,是来自分析的严密化所引发的对实数集合结构的探求.例如,Cantor探讨过函数的不连续点的分类问题.

第一节　集合及其运算

一、集合的概念

集合是数学中最原始的概念之一,一般不加以精确定义.概括地说将具有某种特征或满足一定性质的所有对象或事物视为一个整体时,这一整体就称为集合,而这些事物或对象称为该集合的元素.

一般地,集合常用大写英文字母$A,B,C,\cdots,X,Y,Z,\cdots$表示,集合中的元素常用小写英文字母$a,b,c,\cdots,x,y,z,\cdots$表示.

另外,也用特殊记号表示某些特殊的集合,如自然数全体组成一个集合,常记为$\mathbf{N}$;有理数全体组成一个集合,常记为$\mathbf{Q}$;实数全体组成一个集合,常记为$\mathbf{R}$;定

义在闭区间$[a,b]$上的连续函数全体组成一个集合,常记为$\mathbf{C}[a,b]$.

1. 集合的表示方法:

列举法是将集合的所有元素都列举出来,如

$$\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}.$$

描述法是将具有某种性质p的元素全体记为

$$Z=\{x:x\text{ 具有性质 }p\}.$$

例如:$\{a_1,a_2,\cdots a_n\}$表示n个元素集合.

$\{x:|x-2|<\delta\}(\delta>0)$表示实数轴上开区间$(2-\delta,2+\delta)$.

设$y=f(x)$是定义在$E\subset\mathbf{R}^n$上的实值函数,c为某一实数,集合$E[x:f(x)\leqslant c]=\{x\in E:f(x)\leqslant c\}$表示满足$f(x)\leqslant c$且属于$E$的$x$的全体.

2. 子集:设有两个集合A,B,若$x\in A$必有$x\in B$,则称A是B的子集或B包含A,记为$A\subset B$.

若$A\subset B$,且存在$x\in B$满足$x\notin A$,则称A是B的真子集,认为$A\subsetneqq B$.

若$A\subset B$且$B\subset A$,则称A与B相等或相同,记为$A=B$.

不含任何元素的集合称为空集,记为ϕ.

设A是任一集合,集合$2^A=\{B:B\subset A\}$为A的一切子集构成的集合,称为A的幂集.

显然,①$A\subset A,\phi\subsetneqq A$. ②$\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}$.

3. 集合族:设Λ是一个非空集合,对于每个$\alpha\in\Lambda$,指定一个集合A_α,于是得到许多集合,它们的总体称为集合族,记为$\{A_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$或$\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$.

特别地,若$\Lambda=\mathbf{N}$,则称$\{A_\alpha\}$为集合列.

二、集合的运算

定义 1.1 设A,B是两个集合.

(1)称集合$A\cup B\triangleq\{x:x\in A\text{ 或 }x\in B\}$为$A$与$B$的并集,即由$A$与$B$的全部元素构成的集合.

(2)称集合$A\cap B\triangleq\{x:x\in A\text{ 且 }x\in B\}$为$A$与$B$的交集,即由$A$与$B$的公共元素构成的集合.

关于集合的交和并的运算可推广到任意多个集合的情形,设有集合族$\{A_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$,定义其并集与交集分别为

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \triangleq \{x: \exists \alpha \in \Lambda, 使 x \in A_\alpha\}.$$

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \triangleq \{x: \forall \alpha \in \Lambda, x \in A_\alpha\}.$$

特别地,当 $\Lambda=\mathbf{N}$ 时,记

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x: \exists n \in \mathbf{N}, 使 x \in A_n\},$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x: \forall n \in \mathbf{N}, x \in A_n\}.$$

例 1 若 $f(x)$ 是定义在 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的实值函数,a,b,c 为实数且 $a\leqslant b, c\geqslant 0$. 则

$E[x:a \leqslant f(x) \leqslant b] = E[x:f(x) \geqslant a] \cap E[x:f(x) \leqslant b]$;

$E[x:|f(x)| > c] = E[x:f(x) > c] \cup E[x:f(x) < -c]$.

例 2 设 $A_n=(n-1,n], n=1,2\cdots$,则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0,+\infty), \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \phi.$$

例 3 设 $x_0\in\mathbf{R}, A_n=\{x:|x-x_0|<\frac{1}{n}, x\in\mathbf{R}\}, n=1,2\cdots$,则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (x_0-1, x_0+1),$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x_0\}.$$

定义 1.2 设 A,B 是两个集合,称集合

$$A\backslash B \triangleq \{x:x \in A 且 x \notin B\}$$

是 A 与 B 的差集,即在集合 A 中而不在集合 B 中的一切元素构成的集合. 如果 $B\subset A$,则称 $A\backslash B$ 为 B 相对于 A 的补集或余集.

通常在讨论问题的范围内,所涉及的集合总是某个给定集合 X 的子集,称 X 为全集,称集合 $B^c=X\backslash B$ 为 B 的补集或余集,B^c 也可简记为 $B^c=\{x:x\notin B\}$.

定理 1.1 (1)交换律 $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

(2)结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3)分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(4)$A\cap(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}(A\cap B_\alpha)$;

(5)$A\cup(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}(A\cup B_\alpha)$;

(6)设 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 为两集合列,有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n) = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$$

证明:仅证(4).

若 $x_0 \in A \cap (\bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha)$,则 $x_0 \in A$ 且 $x_0 \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha$. 由 $x_0 \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha$ 知,$\exists \alpha \in \Lambda$,使 $x_0 \in B_\alpha$,所以 $x_0 \in A \cap B_\alpha$,从而 $x_0 \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda}(A \cap B_\alpha)$.

反之,若 $x_0 \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda}(A \cap B_\alpha)$,则 $\exists \alpha \in \Lambda$,使 $x_0 \in A \cap B_\alpha$. 即 $x_0 \in A$ 且 $x_0 \in B_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha$,从而 $x_0 \in A \cap (\bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha)$.

所以

$$A \cap (\bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda}(A \cap B_\alpha).$$

定理 1.2 (1)$A \cup A^c = X, A \cap A^c = \phi, (A^c)^c = A, X^c = \phi, \phi^c = X$;

(2)$A \backslash B = A \cap B^c$;

(3)若 $A \subset B$,则 $A^c \supset B^c$;

(4)若 $A \cap B = \phi$,则 $A \subset B^c$;

(5)$(A \backslash B) \cap C = (A \cap C) \backslash (B \cap C)$;

(6)$(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$.

定理 1.3 (**D Morgan 法则**)

(1)$X \backslash (\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in \Lambda}(X \backslash A_\alpha)$;

(2)$X \backslash (\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda}(X \backslash A_\alpha)$.

特别地,若 X 为全集,有

(3)$(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha^c$;

(4)$(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha^c$.

证明:仅证(4).

任取 $x \in (\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha)^c$,则 $x \notin \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$,即存在 $\alpha \in \Lambda$ 有 $x \notin A_\alpha$,也即存在 $\alpha \in \Lambda$,有 $x \in A_\alpha^c$,所以 $x \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha^c$.

反之,若 $x \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha^c$,即存在 $\alpha \in \Lambda$,使 $x \notin A_\alpha$,从而 $x \notin \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$,即 $x \in (\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha)^c$.

定义 1.3 设 X 和 Y 是两个集合,称集合

$$X \times Y = \{(x,y) : x \in X, y \in Y\}$$

是 X 与 Y 的直积集,简称 X 与 Y 的直积,其中 $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ 是指 $x_1 = x_2$ 且 $y_1 = y_2$.

一般地,可定义任意多个集合的直积:

$$\prod_{k=1}^{n} X_k = \{(x_1,x_2,\cdots x_n):x_k \in X_k, k = 1,2\cdots n\},$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} X_k = \{(x_1,x_2,\cdots x_n,\cdots):x_k \in X_k, k \in \mathbf{N}\},$$

$$\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}:x_\alpha \in X_\alpha, \alpha \in \Lambda\}.$$

例 4 $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}\times\mathbf{R} = \{(x_1,x_2):x_i \in \mathbf{R}, i = 1,2\}$;

$\mathbf{R}^n = \underbrace{\mathbf{R}\times\mathbf{R}\cdots\times\mathbf{R}}_{n} = \{(x_1,x_2,\cdots x_n):x_i \in \mathbf{R}, i = 1,2,\cdots n\}$ 为 n 维欧氏空间.

$$\mathbf{R}^\infty = \{(x_1,x_2,\cdots x_i,\cdots):x_i \in \mathbf{R}, i \in \mathbf{N}\}.$$

三、集合列的极限集

当我们考虑一串函数 $\{f_n\}$ 及其某种意义下的极限时,就不可避免地要涉及一串集合,以及当 $n\to\infty$ 时,这些集合的极限,所以我们现在来定义集合序列的极限.

类似于数列的极限这一进行无限运算的工具,现在也把它移植于集合论中,众所周知,单调数列的极限总可以定义的,这就启发我们先来考虑单调集合列的无限运算.

定义 1.4 设 $\{A_k\}$ 是一个集合列,若 $A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_k\supset\cdots$,则称此集合列为单调递减集合列.

若 $\{A_k\}$ 满足 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_k\subset\cdots$,则称 $\{A_k\}$ 为单调递增集合列.

例 5 设在 $\mathbf{R}$ 上有单调递增的实值函数列:

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \cdots \leqslant f_n(x)\cdots,$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. 现在对于给定的实数 t,作集合列

$$E_n = \{x:f_n(x) > t\}, (n = 1,2\cdots).$$

显然有 $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots$,而且得到

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x:f_n(x) > t\} = \{x:f(x) > t\},$$

也即

$$\lim_{n\to\infty}\{x:f_n(x) > t\} = \{x:f(x) > t\}.$$

就像数列未必有极限,集合序列当然也可能没有极限. 类似数列的上下极限概念,我们可以定义集合的上下限集.

定义 1.5 假设$\{A_k\}$是一集合列,分别称集合

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k \triangleq \{x:存在无穷多个 k,使 x \in A_k\}.$$

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} A_k \triangleq \{x:只有有限个 k,使 x \notin A_k\}.$$

是集合列$\{A_k\}$的上极限集与下极限集.

如果$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k = \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k$,则称集合列$\{A_k\}$有极限或是收敛的,记此极限为

$$\lim_{k\to\infty} A_k \left(= \overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k \right).$$

显然:

(1)$x \in \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k$ 的充分必要条件是存在$\{A_k\}$的子集合列$\{A_{k_i}\}$,使$x \in A_{k_i}, i=1,2,\cdots$;

(2)$x \in \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k$ 的充分必要条件是存在 $N>0$,当 $k>N$ 时,$x \in A_k$;

(3)$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \subset \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k \subset \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.

定理 1.4 设集合列$\{A_k\}(k=1,2,\cdots)$,则

(1)$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$;

(2)$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$.

证明:仅证(1).

事实上,若 $x_0 \in \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$,则存在无穷多个 n,使 $x_0 \in A_n$,即对任意自然数 n,存在 $k_0 > n$,使 $x_0 \in A_{k_0}$,故 $x_0 \in \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k (\forall n \in \mathbf{N})$,从而 $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$;反之若 $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$,即 $\forall n \in \mathbf{N}, x_0 \in \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. 从而有无穷多个 n,使 $x_0 \in A_n$,所以 $x_0 \in \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$.

推论 1 设$\{A_k\}$为一集合列,E 是任一集合,则

(1)$E \setminus \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k = \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} (E \setminus A_k)$;

(2)$E \setminus \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} (E \setminus A_k)$.

推论 2 (1)若$\{A_k\}$是单调递增集合列,则$\lim\limits_{k\to\infty} A_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$;

(2)若$\{A_k\}$是单调递减集合列,则$\lim\limits_{k\to\infty} A_k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$,即单调集合列是收敛的.

证明:仅证(2),(1)留作习题.

因为$\{A_k\}$为单调递减集合列，所以对任何$n\in\mathbf{N}$，有

$$\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k=A_n\qquad\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k,$$

从而

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n,$$

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k.$$

故$\{A_k\}$收敛，且$\lim\limits_{k\to\infty}A_k=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

例 6 设E,F为集合，作集合列

$$A_k=\begin{cases}E,k=2n-1,\\F,k=2n\end{cases}(n=1,2,\cdots).$$

由上、下极限集的定义有

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k=E\cup F,\underline{\lim_{k\to\infty}}A_k=E\cap F.$$

于是，集合列$\{A_k\}$收敛的充分必要件是：

$$E\cup F=\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\underline{\lim_{k\to\infty}}A_k=E\cap F,\text{也即}E=F.$$

第二节 集合的势

一、映射

在数学分析中大家知道，定义在$[a,b]$上的一个实值函数就是从集合$[a,b]$到$\mathbf{R}$中的一种对应关系. 现在，我们要把这一概念推广到一般的集合上，建立不同集合之间的联系.

定义 2.1 设X,Y为两个非空集合，如果对每个$x\in X$均存在唯一$y\in Y$与之对应，则称这种对应为映射，若用T来表示这种对应，则记为

$$T:X\to Y,$$

称T是从X到Y中的映射，称$y=Tx$为映射T下的像，称x为y的一个原像.

设$A\subset X$，称$T(A)=\{y\in Y:y=Tx,x\in A\}$为$A$在映射$T$下的像集（记

$T(\phi)=\phi$);

设 $B\subset Y$,称 $T^{-1}(B)=\{x\in X:Tx\in B\}$ 为 B 在 T 下的原像集(记 $T^{-1}(\phi)=\phi$).

如果对任何 $y\in Y$,存在 $x\in X$,使 $y=Tx$,则称 T 为从 X 到 Y 的满射或从 X 到 Y 上的映射.

如果对任何 $Tx_1,Tx_2\in Y$ 且 $Tx_1=Tx_2$,必有 $x_1=x_2$,则称 T 为从 X 到 Y 的单射.

如果 T 既是满射又是单射,则称 T 是双射或 T 是 X 到 Y 的一一映射,也称 X 与 Y 之间存在一一对应. 此时也存在 Y 到 X 的映射,即对任何 $y\in Y$,存在唯一 $x\in X$,使 $y=Tx$,称这种映射为 T 的逆映射,记为

$$T^{-1}:Y\to X$$

显然,T^{-1}是 Y 到 X 的一一映射.

特别地,如果 X,Y 为数域(实数域或复数域),则称 T 为定义在 X 上的函数. 当 $Y=\mathbf{R}$ 时,称 T 为实值函数.

显然,如果 T 为单射,则映射 T 是 X 到 $T(X)$ 的一一映射.

例 1 设 $X=[a,b]$,$Y=[c,d]$,定义映射

$$y=f(x)=\frac{d-c}{b-a}(x-a)+c,$$

则 f 是从 X 到 Y 的一一映射.

定理 2.1 设 $T:X\to Y$ 为映射,则

(1)当 $A_1\subset A_2\subset X$ 时,有 $T(A_1)\subset T(A_2)$;

(2)$T(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}TA_\alpha(A_\alpha\subset X,\alpha\in\Lambda)$;

(3)$T(\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)\subset\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}TA_\alpha(A_\alpha\subset X,\alpha\in\Lambda)$;

(4)当 $B_1\subset B_2\subset Y$ 时,有 $T^{-1}(B_1)\subset T^{-1}(B_2)$;

(5)$T^{-1}(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}T^{-1}(B_\alpha)\quad(B_\alpha\subset Y,\alpha\in\Lambda)$;

(6)$T^{-1}(\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha)=\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}T^{-1}(B_\alpha)\quad(B_\alpha\subset Y,\alpha\in\Lambda)$;

(7)$T^{-1}(B^c)=(T^{-1}(B))^c\quad(B\subset Y)$.

证明:仅证(6),其余留作习题.

任取 $x\in T^{-1}(\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha)$,则存在 $y\in\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha$,使 $y=T(x)$. 于是,对任意 $\alpha\in\Lambda$,有 $y\in B_\alpha$,从而,对任意 $\alpha\in\Lambda$,有 $x\in T^{-1}(B_\alpha)$,也即 $x\in\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}T^{-1}(B_\alpha)$,于是

$$T^{-1}(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha)\subset\bigcap_{\alpha\in\Lambda}T^{-1}(B_\alpha).$$

另一方面,任取 $x \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} T^{-1}(B_\alpha)$,则对任意 $\alpha \in \Lambda, x \in T^{-1}(B_\alpha)$. 由映射的定义知,存在唯一 $y \in B_\alpha$,使 $y = T(x)$,由 α 的任意性,故 $x \in T^{-1}(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha)$, 即

$$T^{-1}(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha) \supset \bigcap_{\alpha \in \Lambda} T^{-1}(B_\alpha),$$

从而

$$T^{-1}(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} T^{-1}(B_\alpha).$$

定义 2.2 设

$$T_1: X \to Y, T_2: Y \to W,$$

则由

$$Tx = T_2(T_1 x)(x \in X),$$

定义映射 $T: X \to W$,称为 T_2 与 T_1 的复合映射,记为 $T = T_2 \circ T_1$.

二、集合的势

对于一个集合来说,集合中元素的多少是最基本的问题之一. 如果有两个集合 A 与 B,我们要问 A 的元素比 B 的元素多还是少? 或者一样多,集合所含元素的个数也是集合的一个重要的特征.

怎样表示集合所含元素的多少呢? 有限个元素组成的集合自然不成问题,把它的元素一个一个数出来就行了,但我们将要讨论的是无穷集,也就是集合所含的元素个数不是有限的. 对于无穷集,"个数"一词实际上是没有意义的,然而,不同的无穷集之间可有明显的差别. 比如自然数全体与实数全体显然不同,直觉上,实数当然比自然数多得多,那么自然数与有理数集呢? 此时直觉可能会发生错误,如果我们认为有理数比自然数多,那就大错特错了. 因此,我们有必要了解如何对无穷集进行计数,使我们得以分清有哪些集有相同的"个数",哪些不然.

现在还是让我们暂且回过头来,看看对有限集是如何计数的,设想有一堆石子,我们要知道它有多少个,当我们拿起第一粒石子时,心里默数着 1,拿起第二粒石子时,心里默数着 2,直到拿起最后一粒石子时,心里默数的最后一个数字就是石子的个数. 在这个过程中,我们不知不觉间将每粒石子都编了号,第一粒石子就是一号,不妨记作 e_1,第二粒石子就是二号,不妨记作 e_2,如果有 n 个石子,则最后一个石子就是第 n 号,记作 e_n,于是这堆石子可记作 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$. 这个过程实际上建立了石子与自然数 1 到 n 之间的一一对应关系. 如果我们想知道两堆石子是否有相同的个数,我们其实不必将这两堆石子的个数一一数出来,只要每次从两堆

石子中各拿一粒,最后各剩下一粒石子,则它们的个数就是一样的,否则就不同. 这说明,我们想知道两个集合是否有相同个数的元素,只需看能否在这两个集合之间建立一种一一对应关系,只要能建立这种关系,我们就有理由认为,它们有相同的数量. 现在我们把这个思路推广于无限集,以此比较其元素的多少.

定义 2.3 设 A 和 B 为两集合,若存在从 A 到 B 的一一映射,则称集合 A 与 B 对等,记为 $A \sim B$. 规定空集与其自身对等.

对等关系有如下基本性质:

(1)反射性:$A \sim A$;

(2)对称性:若 $A \sim B$,则 $B \sim A$;

(3)传递性:若 $A \sim B, B \sim C$,则 $A \sim C$;

(4)设

$$\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}, \{B_\alpha : \alpha \in \Lambda\},$$

其中$\{A_\alpha\}$两两互不相交,$\{B_\alpha\}$两两互不相交. 若任意 $\alpha \in \Lambda$,有 $A_\alpha \sim B_\alpha$,则

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \sim \bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha.$$

例 2 证明$(0,1) \sim \mathbf{R}$.

证明:因为映射

$$f(x) = \tan\left(\frac{2x-1}{2}\pi\right)$$

是从$(0,1)$到 $\mathbf{R}$ 的一一映射,所以$(0,1) \sim \mathbf{R}$.

例 3 设集合 A 和集合 B 是有限集,则 $A \sim B$ 的充要条件是集合 A 与集合 B 有相同个数的元素.

证明:必要性 设 $A = \{a_1, a_2, \cdots a_k\}$,若 $A \sim B$,则存在从 A 到 B 的一一映射

$$T: A \to B$$

于是,$B = \{T(a_1), T(a_2), \cdots, T(a_k)\}$,因此集合 A 与集合 B 有相同个数的元素.

充分性 若集合 A 与集合 B 有相同个数的元素,不妨设 $A = \{a_1, a_2, \cdots a_k\}$, $B = \{b_1, b_2, \cdots b_k\}$. 作映射

$$T: A \to B$$

显然,T 是 A 到 B 的一一映射,即 $A \sim B$.

定义 2.4 如果 $A \sim B$,则称 A 与 B 有相同的势或基数,记为$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$(其中$\overline{\overline{A}}$表示 A 的势或基数).

显然,凡是互相对等的一切集合均具有相同的势.

定义 2.5 设集合 A 与 B,记$\overline{\overline{A}}=\alpha,\overline{\overline{B}}=\beta$. 如果 $A\sim B_1\subset B$,则称 α 不大于 β,记为

$$\overline{\overline{A}}=\alpha\leqslant\beta=\overline{\overline{B}};$$

如果 $\alpha\leqslant\beta$ 且 $\alpha\neq\beta$,则称 α 小于 β,记为

$$\overline{\overline{A}}=\alpha<\beta=\overline{\overline{B}}$$

引理 若 $A_2\subset A_1\subset A$,且 $A\sim A_2$,则 $A\sim A_1\sim A_2$.

证明:因为 $A\sim A_2$,所以存在双射

$$f:A\leftrightarrow A_2$$

于是

$$A_1\sim f(A_1)\subset A_2,\text{记 }A_3=f(A_1)(\text{因 }A_1\subset A)$$
$$A_2\sim f(A_2)\subset A_3,\text{记 }A_4=f(A_2)(\text{因 }A_2\subset A_1).$$

按此方法继续下去,一般有

$$A_{2n-1}\sim f(A_{2n-1})\subset A_{2n},\text{记 }A_{2n+1}=f(A_{2n-1})(\text{因 }A_{2n-1}\subset A_{2n-2}),$$
$$A_{2n}\sim f(A_{2n})\subset A_{2n+1},\text{记 }A_{2n+2}=f(A_{2n})(\text{因 }A_{2n}\subset A_{2n-1}),$$
$$\cdots\cdots$$

于是得到一列单调递减集合列

$$A\supset A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$$

显然

$$A\sim A_2,A_1\sim A_3,A_2\sim A_4,\cdots$$
$$A\setminus A_1\sim A_2\setminus A_3,A_1\setminus A_2\sim A_3\setminus A_4,\cdots$$
$$A_2\setminus A_3\sim A_4\setminus A_5,A_3\setminus A_4\sim A_5\setminus A_6,\cdots$$

令

$$D=A\cap A_1\cap A_2\cdots=A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n,$$

由于

$$A=D\cup(A\setminus A_1)\cup(A_1\setminus A_2)\cup(A_2\setminus A_3)\cup(A_3\setminus A_4)\cup\cdots$$

$$A_1=D\cup(A_1\setminus A_2)\cup(A_2\setminus A_3)\cup(A_3\setminus A_4)\cup(A_4\setminus A_5)\cup\cdots$$

且分解均为不交分解,于是按箭头所示的对等及对等的性质(4)和 $A\sim A_1$,从而 $A\sim A_1\sim A_2$.