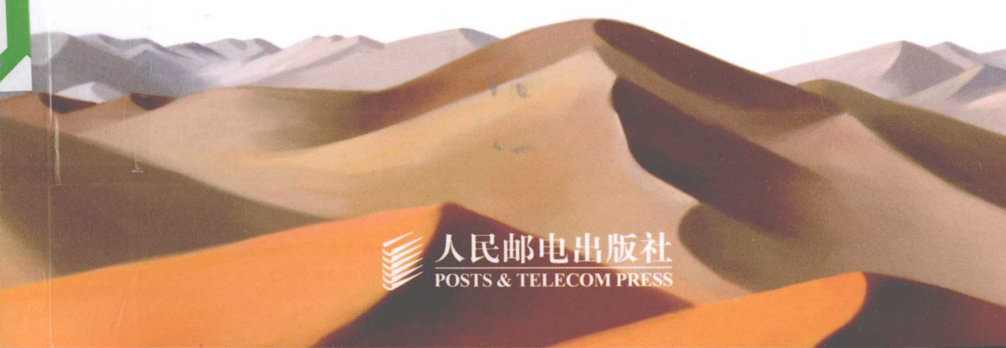
图灵新知

Trigonometric Delights

三角之美

边边角角的趣事

【以】Eli Maor 著　曹雪林 边晓娜 译



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

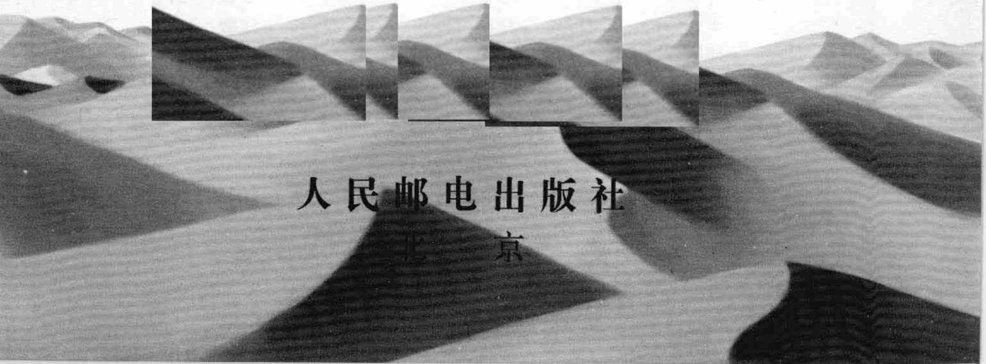
TURING 图灵新知

Trigonometric Delight

三角之美

边边角角的趣事

【以】Eli Maor 著　曹雪林 边晓娜 译



人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

三角之美：边边角角的趣事 /（以）马奥尔
(Maor, E.) 著；曹雪林，边晓娜译. -- 北京：人民邮
电出版社，2010.7
（图灵新知）
书名原文：Trigonometric Delights
ISBN 978-7-115-22445-3

Ⅰ. ①三… Ⅱ. ①马… ②曹… ③边… Ⅲ. ①三角－
普及读物 Ⅳ. ①O124-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第039650号

内容提要

本书由古埃及应用测量的发端展开，将读者首先带到六个三角函数中。书中的篇章宛如一个个引人入胜的小故事，将历史、趣闻、应用和理论融入到了迷人的故事情节当中。全书共15章，涵盖了三角学的精华部分，此外还包含6个翔实的小传记，为读者感受三角之美提供了难得一见的珍贵资料。

图灵新知

三角之美：边边角角的趣事

◆ 著　　　[以] Eli Maor
译　　　曹雪林　边晓娜
责任编辑　杨海玲
执行编辑　罗　婧

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市崇文区夕照寺街14号
邮编　100061　　电子函件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷

◆ 开本：880×1230　1/32
印张：7.875
字数：211千字　　　2010年7月第1版
印数：1－4 000册　　2010年7月北京第1次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2009-1524号

ISBN 978-7-115-22445-3

定价：29.00元

读者服务热线：(010)51095186　印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154

前 言

> 在数学领域中，可能没有其他分支学科能像三角学一样始终占据着中心位置。
>
> ——赫伯特

本书既不是一本三角学的教材（这类书已经有很多了），也不是一本全面阐述三角学历史的书（尽管目前还没有这样的书）。这本书只是尝试从历史的发展角度，向人们呈现一些精选出来的三角学方面的课题，并展示三角学与其他自然科学的联系。选择这个主题，不仅出于我对三角学的喜爱，而且还出于我对该学科在大学中的授课方式深深的失望。

首先谈一下我对三角学的热爱。在初中的时候，我有幸遇到了一位很优秀的老师，他年轻且精力充沛，教我们数学和物理。他是一位严肃认真、要求非常苛刻的老师，不能容忍上课迟到或者缺考现象。（你最好保证你不会这样做，否则这些不良记录都会在你的成绩单上得以体现。）如果你没有完成家庭作业或者某次测验的成绩很糟糕，那么就更伤脑筋了。我们个个都怕他，挨训时会吓得发抖，生怕他通知我们的父母。然而，我们都很尊敬他，他成为了我们许多人的榜样。更为重要的是，他给我们展现了数学与现实世界的联系，特别是与物理学的联系。因此，我们自然而然地学到了大量的三角学知识。

多年以来我和他一直保持通信，并且后来又见过几次面。他非常固执己见，不论你谈起什么话题（数学或其他学科），他总会和你争辩，并且通常都会让你哑口无言。在我大学毕业后的很多年里，我一直都认为他依然是我的老师。他父母在二战前从欧洲辗转到中国躲避战乱，他出

生在中国，后来随父母移民到以色列，进入耶路撒冷的希伯来大学学习，随后在第一次中东战争期间应招入伍。后来他在特拉维夫大学任教，并被授予终身教职（他是全校获此殊荣的两位教师之一），尽管他没有博士学位。1989年，他正在讲授每周都有的数学历史课时，突然倒下，就这样与世长辞了。他就是伊利欧索夫。我非常想念他。

现在谈些让我失望的事情吧。20世纪50年代后期，随着前苏联在太空领域的胜利——史波尼克一号卫星在1957年10月4日成功发射，我记得这个日子，因为那天正好是我20岁的生日——对整个教育体系改革，特别是对自然科学教育改革的呼声随之高涨。人们纷纷提出新的想法和计划，旨在缩小与前苏联之间表面上的科技差距（尽管也有些人勇敢地质疑这种差距是否真的存在，但是在这种大众的狂热中人们对这些声音置之不理）。这些年是美国自然科学教育的黄金年代。如果你对如何教授一门学科有一个创新的想法（甚至只是一个粗浅的想法），那么几乎可以保证你能申请到一笔经费开展工作。因此，所谓的“新数学”运动诞生了，“新数学”运动的目的在于使学生们理解他们所学的知识，而不是像前面几代人一样，只是采取机械学习和死记硬背的方式。我们花费了大量的时间和经费来发展新的数学教学方法，这些方法强调抽象的概念，比如集合论、函数（定义为有序对的集合）以及形式逻辑。人们行色匆匆地组织研讨班、学术研讨会，开发新课程以及新教材。成百上千的教育工作者开始致力于向困惑不解的广大教师和家长传授这些新的理念，更有一些人开始周游世界向发展中国家传播这些新的主张，有些发展中国家的大部分民众连大字都还不识几个。

如今，40年过后，大多数教育工作者认为“新数学”弊大于利。我们的学生可能学习到集合论的语言和符号，但是当他们遇到最简单的数值计算时却容易出错，无论他们有没有用计算器。因此，许多高中毕业生缺少基本的运算技能，结果他们中大约一半的人在初进大学后的微积分水平考试中不及格。学院和大学投入了巨大的资源开展补救项目，而

且为了更易于为大家所接受，他们给这些项目起了一些委婉的名字，如“发展计划”或者“数学实验室”，但收效并不显著。

几何学和三角学就是在“新数学”运动中的两门课程。作为在自然科学和工程学中都至关重要的一门学科，三角学首当其冲成为变革的牺牲者。打着数学严谨的旗号，形式化的定义和冗长的逻辑推导取代了对三角学的真正理解。人们不再谈论角，而是角的度量；不再讨论在几何环境中定义正弦和余弦函数（三角形中两条边的比率，或者单位圆在x轴和y轴上的投影），而是谈论着从实数到区间［-1, 1］上的函数。集合符号和语言已经遍及所有的讨论，酿成的后果就是一个相对简单的学科被毫无意义的形式主义搞得晦涩难懂。

更糟糕的是，由于众多的高中毕业生缺乏基本的运算技能，典型三角学教材的水准和深度正在日益下降。示例和练习题通常都是最简单和最常规的类型，只需要记住一些基本的公式即可解决所有的运算。诸如代数学中大家熟知的“文字题”，多数都枯燥无味，无法引起兴趣，只会让学生产生一种“不以为然”的感觉。学生们很少有机会去处理真正具有挑战性的，并足以带给他们成就感的恒等式。下面举两个例子。

1. 证明：对任意数x，

$$\frac{\sin x}{x}=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdot\cdots$$

这个公式是欧拉首先发现的。令$x=\frac{\pi}{2}$，利用$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，并重复使用余弦函数的半角公式，我们就可以得到如下优美的公式：

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\cdots$$

数学家韦达1593年用纯几何的方法发现了这个公式。

2. 证明在任意三角形中，

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = -4\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{3\beta}{2}\cos\frac{3\gamma}{2}$$

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

（最后一个公式具有一些意想不到的重要意义，我们将会在第12章进行讨论。）这些公式由于它们的对称性而引人注目，你甚至可以说它们“漂亮”（对于一门以枯燥和专业性著称的学科来说，这个词是它少有的荣誉）。在附录C，我收集了另外一些漂亮的公式，当然“漂亮”的评判标准相当主观。

克雷默在《现代数学的本质与发展》（*The Nature and Growth of Modern Mathematics*）一书中提到：“有些学生认为，三角学是将折磨人的计算美化了的几何学。”本书将试图消除这种印象。我采用历史发展的观点来编写这本书，部分原因是我认为这对学生喜爱数学（或者广泛的自然科学）大有帮助。然而，我没有严格按照历史时间顺序来选择题材，而是根据它们美学上的感染力或者与其他科学的相关性来选择。当然，对这些题材的选择在很大程度上只反映了我自己的偏好，可选的题材其实还有很多。

阅读前9章只需要用到基本的代数学和三角学知识即可，其他章节则要依赖一些初级微积分的知识（不超过微积分II的程度）。书中内容对高中生和大学生来说是很容易理解的。由于我很清楚这本书的读者群，因此我把讨论的重点限制在平面三角学，不涉及球面三角学。（尽管从历史的角度上看，后者首先主宰着这门学科。）另外，我把一些额外的历史资料（多为人物传记）独立放在8个章后的“辅助章节”里，供读者参考。即使只有几个读者从这些内容中受到启发，我的付出也就值得了。

非常感谢我的儿子伊亚，他绘制了书中的所有插图；非常感谢宾夕法尼亚州阿兰顿市穆冷博格学院的威廉·邓汉姆和新罕布什尔大学的保罗·J. 纳宁，他们非常认真地阅读了我的初稿；非常感谢普林斯顿大学

出版社的工作人员，他们一丝不苟地完成了该书的出版工作；非常感谢斯科基公共图书馆的工作人员，他们极力地帮助我找到了一些珍贵的和绝版的资源；最后，特别感谢我亲爱的妻子Dalia，她始终如一地支持我完成这本书。没有他们的帮助，这本书将永远不可能问世。

说明：本书经常引用《科学传记辞典》（*Dictionary of Scientific Biography*，共16卷，Charles Coulston Gillispie编）。为简单起见，本书在提到该辞典时将使用其英文简写DSB。

1997年2月20日于伊利诺伊州斯科基

目　录

开篇语

书吏阿梅斯，公元前1650年

> 士兵们，在远方金字塔的顶上，四千年的岁月在俯视你们！
>
> ——拿破仑，1798年7月21日在埃及

1858年，苏格兰律师兼文物收藏家莱因德（A. Henry Rhind，1833—1863）在前往尼罗河谷的旅途中买了一份文献，这份文献是几年前在上埃及底比斯城（现在的卢克索附近）的一个小建筑废墟中出土的。这份文献现在被称为《莱因德纸草书》（*Rhind Papyrus*），是包含84个数学问题的文集，内容涉及算术、早期代数和几何[1]。由于莱因德30岁时英年早逝，这批文献随后为大英博物馆所拥有，成为永久馆藏。这份纸草书最初被发现时是18英尺①长、13英寸②宽的卷轴，但是当大英博物馆得到它时，一些部分已经遗失。然而，十分幸运的是，后来发现这些遗失的部分由纽约历史协会所保存，因此现在可以看到完整的文献。

古埃及的神殿及宝藏，总是令欧洲的旅行者们神往不已。1799年拿破仑率领军队入侵埃及，虽然以失败告终，但是却为大批的学者、文物研究者和探险者们打开了通往埃及的大门。拿破仑对文化和科学有着浓厚的兴趣，他的幕僚中有众多各个领域的学者，其中就有数学家傅里叶（我们在后面还会谈到他）。这些学者在整个埃及搜罗古代的宝藏，凡是

---

① 1英尺=30.48厘米。——编者注

② 1英寸=2.54厘米。——编者注

能带走的都带回了欧洲。他们最著名的发现，就是在尼罗河三角洲最西端的小镇拉希德（欧洲人称之为罗塞塔）附近发掘出的一块巨大玄武岩石碑。

和莱因德纸草书一样，罗塞塔石碑最后也是由大英博物馆收藏，上面刻有托勒密五世王朝（公元前195年）由埃及僧侣组成的议会所颁布的一项法令，分别用3种文字写成：希腊文、古埃及通用文字和象形文字。英国物理学家托马斯·杨（Thomas Young，1773—1829）是第一个破译出石碑上文字的人。（托马斯兴趣广泛，最著名的成就是他关于光的波理论。）通过比较3种文字中相似符号的重复部分，他能够编纂出一部关于古埃及文字的初级字典。这部字典最后于1822年由法国著名的埃及古物学者商博良（Jean François Champollion，1790—1832）完成，商博良还在刻文中辨识出了埃及艳后克利奥帕特拉的名字。商博良具有划时代意义的工作，使得学者们得以译出大量写在莎草纸、木片以及石碑上的古埃及文献，其中就有几卷是有关数学的文献。最长最完整的数学文献就是莱因德纸草书。

德国学者埃森洛尔最先将莱因德纸草书翻译成现代语言，英译版则由皮特所译，1923年在伦敦出版[2]。但是影响最广泛的版本则是由蔡斯于1929年完成的。蔡斯原本是一个美国商人，1910年的埃及之行使他成为一位埃及古物学者。正是通过他的版本，莱因德纸草书才被普通大众所知道[3]。

纸草书上的文字是用僧侣体从右向左写成的，这与较早的象形文字截然相反。全文用黑红两种颜色写成，并配有几何图形。它是由一位名叫阿莫斯的书吏所写下的，现代的作者一般称他为阿梅斯。但是纸草书上所记载的内容不是他自己的著作，他只是将它们从更古老的手稿中抄录下来而已，这可以从他自己的序文中看出：

本书是在第33年洪水泛滥季节的第四个月所抄录的，时值

> 上下埃及统治者阿屋赛瑞法老时代，以相似的形式，为上下埃及统治者奈马特瑞时代的文献赋予新的生命。抄录者是阿梅斯[4]。

上面提到的第一位法老阿屋赛瑞，已经确认是希克索斯王朝的君王之一，大约生活在公元前1650年左右。第二位法老奈马特瑞是阿美尼赫特三世，统治时期是公元前1849年至公元前1801年，这一时期被称为中王国时代。因此我们可以确定出原著和抄录的确切时间，这份文献写于将近四千年前，是目前所知年代最早、内容最广泛的古代数学文献之一[5]。

这本著作在一开始就展现了作者的宏大愿景：计划向读者提供一个“对所有事物全面而彻底的研究，洞察所有存在的事物，知晓所有的秘密”[6]。即使这些愿望未能很好地实现，这本著作仍然使我们能够对古埃及数学有非常深刻的领悟。文献中所列出的84个问题涵盖算术、口述代数（verbal algebra，求出未知的量）、测量（面积和体积计算），甚至还有等差及等比数列。那些习惯于希腊数学形式结构（定义、公理、定理和证明）的人，一定会对莱因德纸草书的内容感到失望，因为这里既没有提出可以应用到某一类问题上的一般规则，也没有根据先前事实逻辑推导出来的结果。相反，问题都是给出特定值的特定例子。它们几乎都是“叙述型问题”，处理的都是很平凡的事物，比如求出一块田地的面积，一个粮仓的容积，或者是如何在许多人当中分配一定数量的面包等。显然，这本著作是书吏学校的一本习题集，因为当时只有皇室书吏阶级才能从事文字工作，包括阅读、书写和算术，也就是我们现在的“3R”[7]。该纸草书还包含了一个看上去没有实际用途的问题，其目的显然是挑战和娱乐读者（见本章后的“古埃及的数学娱乐”）。

莱因德纸草书的开头是两个表：一个是2被3到101之间所有奇数除的除法表，另一个则是整数1到9被10除的除法表。所有答案都是以单位分

数（分子是1的分数）的形式给出的。不知道是出于什么原因，这是古埃及人所知道的用来处理分数的唯一方式，2/3是一个例外，它本身被视作一个基本的分数。他们花费大量的功夫和技巧将一个分数分解成单位分数的和。例如，6被10除的结果是1/2+1/10，7被10除的结果是2/3+1/30[8]。当然，古埃及人并没有使用我们现代的符号来表示分数，他们在整数上加一个点（或者在象形文字上加一个椭圆圈）来表示该整数的倒数。他们也没有表示加法的符号，单位分数简单地并列写在一起就表示它们相加[9]。

该文献接下来处理的是包含减法（称为“求全”）和乘法的算术问题，以及求解未知量的问题。这些问题统称为“啊哈”（aha）问题，因为它们通常以字母h（发音aha或者hau）开头，所代表的意思可能就是要找出的“未知量”[10]。例如，第30个问题问：“如果问，什么数的2/3+1/10是10，请告诉他。”文献中记载的答案是13+1/23，并且在后面列出一个证明过程（我们现今称之为“验证”），来证明这确实是一个正确答案。

用现代的语言来说，第30题等同于解方程$(2/3+1/10)x=10$。这类线性方程用所谓的“试位法”来求解：假设用一个合适（容易算）的数字表示x（比如30），代入到方程中。则等式左边变成23，不等于10。又因为23必须乘以10/23才能得到10，所以正确的解应该是10/23乘以假设的值，也就是$x=300/23=13+1/23$。可见，在现代代数符号出现之前约3 500年，埃及人就已经掌握了一种能够有效求解线性方程的方法[11]。

第41到60题实质上是几何问题。第41题说：“求出一个直径为9，高度为10的圆柱形粮仓的容积。”解答如下：“减去9的1/9（也就是1），得到8。将8乘以8，得到64。将64乘以10，得到640立方腕尺（cubit）。”（作者然后将此结果乘以15/2，转换成“赫卡”（hekat），这是当时用来测量谷物容积的标准单位。1赫卡等于292.24立方英寸，或者4.789公升。）[12]显然，为了计算出圆柱的底面积，书吏将圆形的底用边长为直径之8/9的正方形来代替。如果用d来表示直径，则面积公式为$A=[(8/9)d]^2=(64/81)d^2$。

如果将此公式与 $A=\pi d^2/4$ 相比较，我们可以发现埃及人使用的π值是π=256/81=3.160 49，这与真实值的误差只有0.6%。精确度之高让人惊叹，真是非常了不起的成就！[13]

❖ ❖ ❖

我们特别感兴趣的是第56题到第60题，这几道题都与埃及最著名的名胜古迹金字塔有关，并且所有的问题都用到了单词“塞克特”（seked，参见图1）[14]。这个单词的意思我们随后就会知道。

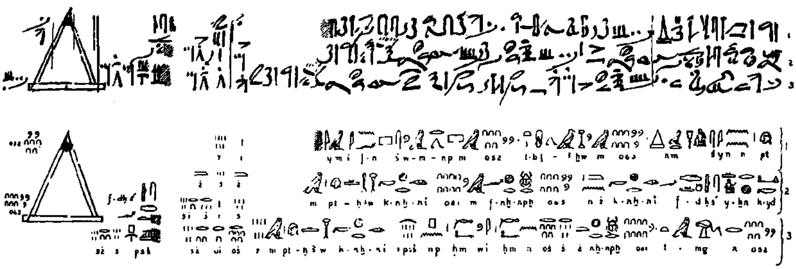


图1　莱因德纸草书第56题

第56题说：“如果一个金字塔高250腕尺，底边的边长360腕尺，则它的‘塞克特’是多少？”阿梅斯的解答如下：

取360的1/2为180，为了得到180，乘以250，得到1/2 1/5 1/50腕尺。1腕尺等于7掌（palm），用7乘以1/2 1/5 1/50：

1	7		
1/2	3	1/2	
1/5	1	1/3	1/15
1/50		1/10	1/25

则塞克特是 $5\frac{1}{25}$ 掌即 $[(3+1/2)+(1+1/3+1/15)+(1/10+1/25)=5\frac{1}{25}]$[15]。

让我们来分析一下这个解。显然，360的1/2（即180），是金字塔正方形底边长的一半（参见图2）。“为了得到180，乘以250”的意思是，找出一个数x，使得250乘以x等于180，因此可得x= 180/250=18/25。但是埃及数学家要求所有的答案都必须以单位分数的形式给出，而1/2、1/5和1/50的和正好是18/25，所以这个数值是金字塔底边长的一半与金字塔的高之比，也就是金字塔侧面的横宽对纵高（run-to-rise）之比。事实上，阿梅斯发现的这个量（塞克特），就是金字塔的底面与侧面夹角的余切值[16]。

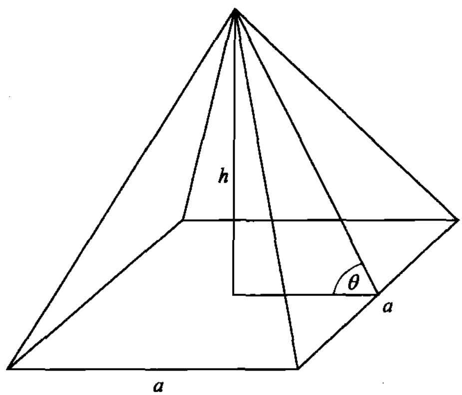


图2　正方形底的金字塔

有读者可能马上会产生两个疑问。首先，为什么他不像我们今天的做法一样求出这个比率的倒数，也就是纵高对横宽之比呢？答案是，人们在建造垂直建筑物时，会很自然地去度量当高度增加一单位时，水平方向与垂线的偏离程度，也就是横宽对纵高之比。这确实是建筑学的实际做法，他们用“直倾斜”（batter）来度量一面想象中的竖直墙的内倾斜率。

其次，为什么阿梅斯要把他的答案乘以7呢？其原因是，金字塔的建造者们在测量水平距离时常用“掌”或者“手”作为单位，而测量垂直

距离则用腕尺作为单位。1腕尺等于7掌，因此所求出的“塞克特”值$5\frac{1}{25}$是以每腕尺的“掌数”为单位给出的横宽对纵高之比。当然，我们今天只是将这些比率视作纯数字。

为什么横宽对纵高之比被认为如此重要，以至于被赋予一个专有名词，并且在纸草书中占用了四个题目？原因在于，金字塔建造者必须保持每个面相对水平面的倾斜度是一致的。这可能在纸上看着非常容易，但是一旦开始实际建造，建筑工人就必须经常检查他们的进度，以确保在施工过程中保持所需的倾斜度。也就是说，每一个面的“塞克特”值必须一样。

第57题是第56题的相反问题：给出“塞克特”的值和底边的边长，然后求高。第58题和59题与56题类似，得到“塞克特”的值是$5\frac{1}{4}$掌（每腕尺），所不同的是，答案以5掌1指（finger，1掌等于4指）来表示。最后，第60题是求一个高30腕尺、底15腕尺的柱子的“塞克特”。我们不知道该柱子是金字塔形状，还是圆柱形（如果是此情形，15则是底面的直径）。然而不论是哪种情况，答案都是1/4。

第56题中求出的“塞克特”是18/25（无量纲单位），对应着底与面的夹角是$54^\circ15'$。第58题和59题所求出的“塞克特”，转换成无量纲单位就是$5\frac{1}{4}$：7，即3/4，对应的角是$53^\circ8'$。将这些数字与吉萨的一些金字塔的实际角度相比较，可以得到以下有趣的结果[17]。

基奥普斯金字塔：　$51^\circ52'$

切夫伦金字塔：　$52^\circ20'$

迈锡里努斯金字塔：$50^\circ47'$

这些数字与例题中算出的结果非常接近。至于第60题中的柱子，它的角度则大多了，当然也和我们对这种建筑的预期相吻合：$\phi=\cot^{-1}(1/4)=75^\circ58'$。

如果因此说埃及人发明了三角学，这未免有些可笑了。在埃及的文献中，没有一处谈到角的概念，因此埃及人尚没有能力去构造三角形中