大学专科高等数学基础简明教材系列

高等数学基础（甲）

简明微积分学习指导

JIAN MING WEI JI FEN XUE XI ZHI DAO

（经济类与管理类）

周誓达 编著

随书赠送

中国人民大学出版社

特色简介

本书密切结合经济工作的需要，充分注意逻辑思维的规律，根据大学专科培养应用型人才的要求，删去次要内容，突出重点，说理透彻，本着“打好基础，够用为度”的原则，着重讲解微积分的基本概念、基本理论及基本方法，培养学生熟练运算与解决实际问题的能力。在质量上坚持高标准，实现零差错。

大学本科经济应用数学基础特色教材系列

微积分（第二版）（配教学课件）
线性代数与线性规划（第二版）（配教学课件）
概率论与数理统计（第二版）（配教学课件）
微积分学习指导（第二版）
线性代数与线性规划学习指导（第二版）
概率论与数理统计学习指导（第二版）

大学专科高等数学基础简明教材系列

- 简明微积分（赠学习指导、配教学课件）

简明线性代数（赠学习指导、配教学课件）
简明概率论与数理统计（赠学习指导、配教学课件）

本书教学课件，请登陆www.crup.com.cn/jiaoyu获取

策划编辑 王 萌
责任编辑 王 萌
封面设计 宝隆世纪
版式设计 赵星华

ISBN 978-7-300-11822-2

9 787300 118222 >

定价：24.00元

ISBN 978-7-300-11822-2

大学专科高等数学基础简明教材系列

高等数学基础(甲)

简明微积分学习指导

（经济类与管理类）

周誓达　编著

中国人民大学出版社

·北京·

目　　录

第一章

函数与极限

一 学习要点

1. 函数奇偶性

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D,对于任意点 $x \in D$,若恒有 $f(-x) = -f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为奇函数;若恒有 $f(-x) = f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为偶函数.

当然,许多函数既不是奇函数,也不是偶函数,称为非奇非偶函数.

2. 极限的概念

极限$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 成立等价于极限

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \end{cases}$$

同时成立.

根据这个结论,极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 中只要有一个不存在,或者虽然都存在但不相等,则极限$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 不存在.

极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 成立等价于

$$\begin{cases} \text{左极限} \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A \\ \text{右极限} \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A \end{cases}$$

同时成立.

根据这个结论，左极限 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 与右极限 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 中只要有一个不存在，或者虽然都存在但不相等，则极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在.

由于在 $x \to x_0$ 的过程中，恒有 $x \neq x_0$，因而在一般情况下，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有无定义都不影响它在点 x_0 处的极限情况.

3. 极限基本运算法则

法则 1　如果极限 $\lim u$ 与 $\lim v$ 都存在，则极限

$$\lim(u \pm v) = \lim u \pm \lim v$$

法则 2　如果极限 $\lim u$ 与 $\lim v$ 都存在，则极限

$$\lim uv = \lim u \lim v$$

法则 3　如果极限 $\lim u$ 与 $\lim v$ 都存在，且极限 $\lim v \neq 0$，则极限

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}$$

法则 4　如果极限 $\lim u(x)$ 存在，且函数值 $f(\lim u(x))$ 有意义，则极限

$$\lim f(u(x)) = f(\lim u(x))$$

法则 5　如果函数 $f(x)$ 是定义域为 D 的初等函数，且有限点 $x_0 \in D$，则极限

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

推论 1　如果有限个变量 $u_1, u_2, \cdots, u_m$ 的极限都存在，则极限

$$\lim(u_1 + u_2 + \cdots + u_m) = \lim u_1 + \lim u_2 + \cdots + \lim u_m$$

推论 2　如果有限个变量 $u_1, u_2, \cdots, u_m$ 的极限都存在，则极限

$$\lim u_1 u_2 \cdots u_m = \lim u_1 \lim u_2 \cdots \lim u_m$$

推论 3　如果极限 $\lim v$ 存在，k 为常数，则极限

$$\lim kv = k \lim v$$

4. 无穷大量与无穷小量的概念

若变量 y 的绝对值在变化过程中无限增大，则称变量 y 为无穷大量；若极限 $\lim y = 0$，则称变量 y 为无穷小量，无穷小量与有界变量的积仍为无穷小量.

如果变量 y 为无穷大量，则变量 $\frac{1}{y}$ 为无穷小量；如果变量 $y \neq 0$ 为无穷小量，

则变量$\dfrac{1}{y}$为无穷大量.

如果极限$\lim u \neq 0, \lim v = 0$,且变量 $v \neq 0$,则极限

$$\lim \frac{u}{v} = \infty$$

5. 未定式极限

特征 1　角度一定趋于零；

特征 2　分子是角度的正弦函数，分母一定是这个角度本身.

第一个重要极限应用于求含三角函数的$\frac{0}{0}$型未定式极限，所求$\frac{0}{0}$型未定式极限同时满足两个特征时，极限值就等于 1.

7. 第二个重要极限

第二个重要极限为

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$

可以推广为

$$\lim_{u(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)} = \mathrm{e}$$

它也具有两个特征：

特征 1　底一定是数 1 加上无穷小量；

特征 2　指数一定是底中无穷小量的倒数.

第二个重要极限应用于求 1^∞ 型未定式极限，所求 1^∞ 型未定式极限同时满足两个特征时，极限值就等于 e.

8. 函数的连续性

已知函数 $f(x)$ 在点 x_0 处及其左右有定义，若有关系式$\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

如果函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，则函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上有界，存在最大值与最小值；

如果函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，且函数值 $f(a)$ 与$f(b)$ 异号，则在开区间(a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f(\xi) = 0 \qquad (a<\xi<b)$$

二　习题一详细解答

1.01　一块正方形纸板的边长为a，将其四角各截去一个大小相同的边长为x的小正方形，再将四边折起做成一个无盖方盒，试将无盖方盒容积V表示为所截小正方形边长 x 的函数.

解：已设所截小正方形边长为 x，从而无盖方盒底边长为 $a-2x$，如图 1—1.

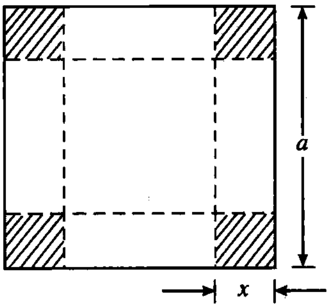

图 1—1

由于盒底面积为$(a-2x)^2$，盒高为x，所以无盖方盒容积

$$V = V(x) = x(a-2x)^2$$

由于高$x>0$；又由于底边长$a-2x>0$，得到$0<x<\frac{a}{2}$，因而函数定义域为$0<x<\frac{a}{2}$.

1.02　欲做一个容积为$250\pi\mathrm{m}^3$的圆柱形无盖蓄水池，已知池周围材料价格为a元$/\mathrm{m}^2$，池底材料价格为池周围材料价格的2倍，试将所用材料费T元表示为池底半径$r\mathrm{m}$的函数.

解：已设圆柱形无盖蓄水池池底半径为$r\mathrm{m}$，再设池高为$h\mathrm{m}$，如图1—2.

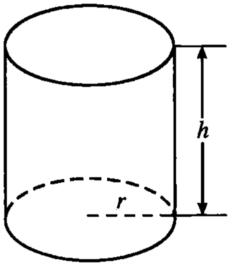

图 1—2

由于蓄水池容积为$250\pi\mathrm{m}^3$，因而有关系式$\pi r^2 h = 250\pi$，得到

$$h = \frac{250}{r^2}$$

注意到池周围材料价格为a元$/\mathrm{m}^2$，从而池底材料价格为$2a$元$/\mathrm{m}^2$. 由于池周围面积为$2\pi rh\,\mathrm{m}^2$，池底面积为$\pi r^2\,\mathrm{m}^2$，所以所用材料费

$$T = T(r) = 2\pi rha + \pi r^2 \cdot 2a = 2\pi a(rh + r^2) = 2\pi a\left(r \cdot \frac{250}{r^2} + r^2\right)$$

$$= 2\pi a\left(\frac{250}{r} + r^2\right)(\text{元}) \quad (r > 0)$$

1.03 某厂每批生产 Qt 某商品的平均单位成本函数为

$$\overline{C} = \overline{C}(Q) = Q + 4 + \frac{10}{Q}(\text{万元}/\text{t})$$

商品销售价格为 p 万元/t，它与批量 Qt 的关系为

$$5Q + p - 28 = 0$$

试将每批商品全部销售后获得的总利润 L 万元表示为批量 Qt 的函数.

解:从已知销售价格 p 与批量 Q 的关系式 $5Q + p - 28 = 0$ 得到销售价格

$$p = p(Q) = 28 - 5Q$$

每批生产 Qt 商品，以价格 p 万元/t 销售，总收益为

$$R = R(Q) = Qp(Q) = Q(28 - 5Q) = 28Q - 5Q^2$$

又生产 Qt 商品的总成本为

$$C = C(Q) = Q\overline{C}(Q) = Q\left(Q + 4 + \frac{10}{Q}\right) = Q^2 + 4Q + 10$$

所以每批商品全部销售后获得的总利润

$$L = L(Q) = R(Q) - C(Q) = (28Q - 5Q^2) - (Q^2 + 4Q + 10)$$
$$= -6Q^2 + 24Q - 10(\text{万元})$$

由于批量 $Q > 0$；又由于销售价格 $p > 0$，即 $28 - 5Q > 0$，得到 $0 < Q < \frac{28}{5}$，因而函数定义域为 $0 < Q < \frac{28}{5}$.

1.04 某产品总成本 C 为月产量 x 的函数

$$C = C(x) = \frac{1}{5}x^2 + 4x + 20$$

产品销售价格为 p，需求函数为

$$x = x(p) = 160 - 5p$$

试将：

(1) 平均单位成本 $\overline{C}$ 表示为月产量 x 的函数；

(2) 每月产品全部销售后获得的总收益 R 表示为销售价格 p 的函数.

解:(1) 平均单位成本

$$\overline{C} = \overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{1}{5}x + 4 + \frac{20}{x} \quad (x > 0)$$

(2) 每月生产 x 产品，以价格 p 销售，所以每月产品全部销售后获得的总收益

$$R = R(p) = px(p) = p(160 - 5p) = 160p - 5p^2$$

由于销售价格 $p>0$；又由于产量 $x>0$，即 $160-5p>0$，得到 $0<p<32$，因而函数定义域为 $0<p<32$.

1.05　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}10^{\frac{1}{x}}$

解：根据极限基本运算法则 4，得到极限

$$\lim_{x\to\infty}10^{\frac{1}{x}}=10^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=10^0=1$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)$

解：根据极限基本运算法则 4 与法则 1，得到极限

$$\lim_{x\to\infty}\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lg\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lg(1+0)=\lg1=0$$

(3) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x+4}+3}$

解：根据极限基本运算法则 5，得到极限

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x+4}+3}=\frac{\sqrt{5-1}+2}{\sqrt{5+4}+3}=\frac{2}{3}$$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+\cos x}$

解：根据极限基本运算法则 5，得到极限

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{1+\cos0}=\frac{1}{2}$$

1.06　已知分段函数

$$f(x)=\begin{cases}3x-1, & x<1\\ x^2+1, & x>1\end{cases}$$

求极限 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

解：注意到分段函数 $f(x)$ 在分界点 $x=1$ 左右的数学表达式不一样，因而应分别计算左极限 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$ 与右极限 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$，只有左极限 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$ 与右极限 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$ 都存在且相等，极限 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 才存在.

考虑到 $x\to1^-$ 意味着点 x 从点 1 的左方无限接近于点 1，从而在 $x\to1^-$ 的过程中，恒有 $x<1$，这时函数 $f(x)=3x-1$，因此左极限

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(3x-1)=2$$

考虑到 $x\to1^+$ 意味着点 x 从点 1 的右方无限接近于点 1，从而在 $x\to1^+$ 的过程中，恒有 $x>1$，这时函数 $f(x)=x^2+1$，因此右极限

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(x^2+1)=2$$

由于左极限 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$ 与右极限 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$ 都等于 2，所以极限

$$\lim_{x\to1}f(x)=2$$

1.07 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-9}{x+3}$

解：$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-9}{x+3}\quad\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(x-3)}{x+3}=\lim_{x\to-3}(x-3)=-6$$

(2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$

解：$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}\quad\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x-1)=1$$

(3) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-5x}{x^2-25}$

解：$\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-5x}{x^2-25}\quad\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

$$=\lim_{x\to5}\frac{x(x-5)}{(x+5)(x-5)}=\lim_{x\to5}\frac{x}{x+5}=\frac{1}{2}$$

(4) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}$

解：$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}\quad\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-1)(x-3)}{(x+2)(x-3)}=\lim_{x\to3}\frac{x-1}{x+2}=\frac{2}{5}$$

1.08 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-3}{x-2}$

解：$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-3}{x-2}\quad\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{5x-1}-3)(\sqrt{5x-1}+3)}{(x-2)(\sqrt{5x-1}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{5(x-2)}{(x-2)(\sqrt{5x-1}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{5}{\sqrt{5x-1}+3}=\frac{5}{6}$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\quad\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1$$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{3-x}}$

解: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{3-x}}\quad\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{3-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x})}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}}{2}=\sqrt{2}$$

(4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{x+1}-2}$

解: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{x+1}-2}\quad\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{x-2}+1)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{x-2}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x-2}+1}=2$$

1.09 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-x^2+1}{3x^2+2x}$

解: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-x^2+1}{3x^2+2x}\quad\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$

$=\infty$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^3+1)(5x-2)}{(x^2+1)^2}$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^3+1)(5x-2)}{(x^2+1)^2}\quad\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$

$=5$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{x^2+1}\sin x$

解：当 $x\to\infty$ 时，有理分式$\dfrac{x+2}{x^2+1}$的极限为$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式极限，其极限等于零，说明有理分式$\dfrac{x+2}{x^2+1}$为无穷小量，这时由于角度 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大而使得变量 $\sin x$ 振荡无极限，但恒有 $|\sin x|\leqslant 1$，说明变量 $\sin x$ 为极限不存在的有界变量. 根据无穷小量的性质，积$\dfrac{x+2}{x^2+1}\sin x$ 仍为无穷小量，所以极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x^2+1}\sin x=0$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n}{7n^2-3}$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n}{7n^2-3}\quad\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$

$=\dfrac{2}{7}$

1.10 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}\quad\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\sin x=1\times 0=0$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}\quad\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}3\,\dfrac{\sin 3x}{3x}=3\times 1=3$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\sin x}{2x+\sin x}$

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\sin x}{2x+\sin x}\quad\left(\dfrac{0}{0}\text{ 型}\right)$

（分子、分母同除以 x）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-\dfrac{\sin x}{x}}{2+\dfrac{\sin x}{x}}=\frac{1}{3}$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sin x}{x}$

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sin x}{x}\quad\left(\dfrac{0}{0}\text{ 型}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\,\frac{\sin\sin x}{\sin x}=1$$

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}$

解： $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}\quad\left(\dfrac{0}{0}\text{ 型}\right)$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)\sin(x^2-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}(x+1)\,\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}=2$$

(6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2+2x-8}$

解： $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2+2x-8}\quad\left(\dfrac{0}{0}\text{ 型}\right)$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{(x+4)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+4}\,\frac{\sin(x-2)}{x-2}=\frac{1}{6}$$

1.11　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+5}$

解： $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+5}\quad(1^\infty\text{ 型})$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5}=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{5x}$

解： $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{5x}\quad(1^\infty\text{ 型})$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{5}=\mathrm{e}^{5}$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{x}\right)^{x}$

解: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{x}\right)^{x}$ (1^{∞} 型)

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^{\left(-\frac{x}{5}\right)(-5)}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{5}{x}\right)^{-\frac{x}{5}}\right]^{-5}=e^{-5}$$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$

解: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$ (1^{∞} 型)

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{6}=e^{6}$$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{3}{x}}$

解: $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{3}{x}}$ (1^{∞} 型)

$$=\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot 9}=\lim_{x\to 0}\left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^{9}=e^{9}$$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{n}\right)^{2n}$

解: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{n}\right)^{2n}$ (1^{∞} 型)

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{n}\right)^{\left(-\frac{n}{4}\right)(-8)}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{4}{n}\right)^{-\frac{n}{4}}\right]^{-8}=e^{-8}$$

1.12 已知极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=3$,求常数 k 的值.

解:根据已知条件,显然常数 $k\neq 0$,计算极限

$$\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}\quad (1^{\infty}\text{ 型})$$

$$=\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{kx}\cdot k}=\lim_{x\to 0}\left[(1+kx)^{\frac{1}{kx}}\right]^{k}=e^{k}$$

再从已知条件得到关系式 $e^{k}=3$,所以常数

$$k=\ln 3$$

1.13 已知分段函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x^{2}+3x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$$

在分界点 $x=0$ 处连续,求常数 a 的值.

解:注意到函数值 $f(0)=a$;又注意到分段函数 $f(x)$ 在分界点 $x=0$ 左右的数学表达式一样,因而直接计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$. 考虑到在 $x\to 0$ 的过程中,恒有 $x\neq 0$,这时函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2+3x}$,因此极限

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2+3x}\quad\left(\frac{0}{0}\text{ 型}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+3}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{3}$$

由于分段函数 $f(x)$ 在分界点 $x=0$ 处连续,意味着极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 等于函数值 $f(0)$,所以常数

$$a=\frac{1}{3}$$

1.14 已知分段函数

$$f(x)=\begin{cases}ke^{2x}, & x<0\\ 1-3k\cos x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

在分界点 $x=0$ 处连续,求常数 k 的值.

解:由于分段函数 $f(x)$ 在分界点 $x=0$ 处连续,从而极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在. 注意到分段函数 $f(x)$ 在分界点 $x=0$ 左右的数学表达式不一样,因而应分别计算左极限 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ 与右极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$,它们都存在且相等.

考虑到 $x\to 0^-$ 意味着点 x 从原点的左方无限接近于原点,从而在 $x\to 0^-$ 的过程中,恒有 $x<0$,这时函数 $f(x)=ke^{2x}$,因此左极限

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}ke^{2x}=k$$

又考虑到 $x\to 0^+$ 意味着点 x 从原点的右方无限接近于原点,从而在 $x\to 0^+$ 的过程中,恒有 $x>0$,这时函数 $f(x)=1-3k\cos x$,因此右极限

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(1-3k\cos x)=1-3k$$

由于左极限 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ 等于右极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$,即有关系式 $k=1-3k$,所以常数

$$k=\frac{1}{4}$$

1.15 填空题

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-x+3)=$ ______.

解:根据极限基本运算法则 5,得到极限