安徽省高等学校“十一五”省级规划教材

离散数学

LISAN SHUXUE

主　编　孙道德　王敏生
副主编　罗　群　叶　红　汪克勤　陈万里

中国科学技术大学出版社

安徽省高等学校"十一五"省级规划教材

离散数学

主　编　孙道德　王敏生

副主编　罗　群　叶　红

江克勤　陈万里

中国科学技术大学出版社

2010·合肥

内 容 简 介

离散数学作为一门理论兼实际应用的综合性学科，既具有严谨的理论基础，又具备应用学科的特点，它是计算机科学和其他应用科学的基础理论课.

本教材以《中国计算机科学与技术学科教程(2002)》中制定的关于“离散数学”的知识结构和内容体系编写.全书分为数理逻辑、集合与关系、代数系统与布尔代数4篇，共9章.内容包括：命题逻辑，一阶谓词逻辑，集合及其运算，二元关系，函数，代数结构，格与布尔代数，无向图和有向图，基本图类的算法等.

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/孙道德，王敏生主编. —合肥：中国科学技术大学出版社，2010.1
(安徽省高等学校“十一五”省级规划教材)
ISBN 978-7-312-02603-4

Ⅰ.离…　Ⅱ.①孙…　②王…　Ⅲ.离散数学—高等学校—教材　Ⅳ.O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第204185号

出　版　中国科学技术大学出版社
地址：安徽省合肥市金寨路96号，邮政编码：230026
网址：http://press.ustc.edu.cn
印　刷　合肥现代印务有限公司
发　行　中国科学技术大学出版社
经　销　全国新华书店
开　本　787 mm×1092 mm　1/16
印　张　19.75
字　数　460千
版　次　2010年1月第1版
印　次　2010年1月第1次印刷
印　数　1—4000册
定　价　30.00元

前　言

离散数学作为一门理论兼应用的综合性学科，既具有严谨的理论基础，又具备应用学科的特点，它是计算机科学和其他应用科学的基础理论课. 读者通过本课程学习，能培养和训练抽象思维能力和严格的逻辑推理的能力，并了解离散数学在计算机学科和日常生活中的作用，为以后处理离散信息以及用计算机处理大量的日常事务和科研项目，从事计算机科学和应用打下坚实基础. 特别是对那些从事计算机科学与理论研究的高层次计算机人员来说，这更是一门必不可少的基础理论工具.

离散数学的主要内容和作用包括：① 数理逻辑：含命题逻辑、谓词逻辑和数理逻辑在计算机科学中的应用三部分. 其中命题逻辑有：命题、联结词、真值表、公式与公式解释、公式等价和蕴涵关系、范式、命题演算的方法；谓词逻辑有：谓词、量词、谓词公式等价与蕴涵关系，SKOLEM 范式、谓词演算的推理规则与推理方法；数理逻辑在计算机科学中的应用有：命题逻辑在计算机科学中的应用，谓词逻辑与数据子语言，谓词逻辑与逻辑程序设计语言，并对以后学习奠定逻辑基础. ② 集合论：集合的基本概念与各种表示、集合的运算与性质、无限集合、笛卡儿积、序列、整除、容斥原理和鸽笼原理. 二元关系、特殊关系及关系在计算机科学中的应用：关系及其表示、关系运算与性质、等价关系、偏序关系、全序关系、良序关系、函数及其特殊函数的定义与性质、关系与函数的证明方法、关系在关系数据库中的应用、关系代数与数据子语言、关系闭包与计算机程序、划分在计算机中的应用. ③ 代数系统：一般代数系统和子代数系统的基本概念及其基本性质、代数系统的同态与同构、同余关系与商代数、半群与群的基本概念与性质、特殊群、陪集与拉格朗日定理、商集、环和域的基本概念与判断方法、格的定义与基本性质、偏序关系与代数系统的关系、特殊格、布尔代数与布尔表达式、有限自动机、计数问题、纠错码和开关电路. ④ 图论：图的基本概念及其各种表示、图的通路与连通性、图的矩阵表示、特殊图（欧拉图、哈密顿图、平面图、二分图、树）的定义和判别方法以及图论在计算机科学中的应用.

本教材以《中国计算机科学与技术学科教程（2002）》中制定的关于离散数学的知识结构和内容体系编写，内容设计增加了帮助理解理论的习题分析，对于培养学生的抽象思维和逻辑表达能力，提高发现问题、分析问题、解决问题的能力起着引导和帮助作用. 教材编写力求体系严谨、选材适当、针对性强、有利教学，在素材组织上更加注重在计算机科学技术中的应用. 注重语言的通俗性和符号的统一性、规范性、简洁性. 注重逻辑思维能力的训练，将数理逻辑教学内容放在第一部分，在集合与关系、代数系统、图与树的教学内容中始终贯穿数理

逻辑的推理思想，以锻炼学生严谨的逻辑思维能力.

教学建议

篇 次	章节及教学内容	教学时数	自学上机学时	教学方式
第1篇 数理逻辑	第1-1章 命题逻辑（命题与命题联结词、命题公式、解释与真值表、联结词的完备集、范式、命题逻辑的推理理论）	9	2	讲授
第1篇 数理逻辑	第1-2章 谓词逻辑（谓词逻辑中的基本概念与表示、谓词公式与解释、范式、谓词演算的演绎与推理）	7	2	讲授
第1篇 数理逻辑	实验设计（通过求真值表判断公式的性质）	2	4	讲授、上机
第2篇 集合与关系	第2-1章 集合及其运算（集合的概念、基本运算、集合中元素的计数）	4	2	讲授
第2篇 集合与关系	实验设计（求集合的运算）	0	4	上机
第2篇 集合与关系	第2-2章 二元关系（二元关系及表示法、关系的运算、关系的性质、关系的闭包运算）	4	1	讲授
第2篇 集合与关系	第2-2章 特殊关系（等价关系、偏序关系）	4	2	讲授
第2篇 集合与关系	第2-3章 函数（函数的基本概念、函数的性质、函数的复合运算、函数的逆运算）	4	1	讲授
第2篇 集合与关系	实验设计（利用矩阵判断关系的对称性等）	2	4	讲授、上机
第3篇 代数系统与布尔代数	第3-1章 代数系统（代数系统、同态与同构）	4	1	讲授
第3篇 代数系统与布尔代数	第3-1章 群论（半群与含幺半群、群的基本概念和性质、特殊群、陪集与拉格朗日定理、不变子群与商群）	6	2	讲授
第3篇 代数系统与布尔代数	第3-1章 环与域（环、域）	2	1	讲授
第3篇 代数系统与布尔代数	第3-2章 格与布尔代数（格、特殊格、布尔代数）	6	1	讲授
第3篇 代数系统与布尔代数	实验设计（根据输入的代数系统运算表，求出幺元和零元，指出是否满足交换律）	2	4	讲授、上机
第4篇 图 论	第4-1章 图（图的基本概念、通路与回路、无向图连通性、有向图连通性、图的矩阵表示）	6	1	讲授

续表

篇　次	章节及教学内容	教学时数	自学上机学时	教学方式
第4篇　图　论	第4-2章　特殊图（欧拉图、哈密顿图、树、对偶图、平面图、图的着色）	6	2	讲授
第4篇　图　论	实验设计（根据输入的整数对，输出一个图形的邻接矩阵.并求出各结点的出度和入度，判定一个以邻接矩阵表示的图形是否是一棵树）	2	4	讲授、上机
合　计		68	34	

本教材由孙道德教授整体策划，提供编写大纲和编写要求.第1篇数理逻辑由淮南师范学院罗群执笔，第2篇集合论由安徽工业大学叶红、杨思春、周建平执笔，第3篇代数系统由安徽师范大学王敏生和安庆师范学院江克勤执笔，第4篇图论由安徽建筑工业学院陈万里执笔，全书由孙道德、王敏生统稿、修改，阜阳师范学院杨颖对全书进行了通读、修正.参加撰写的人员还有陈文莉、张玉州、黄师化、冯学军、张春生等.本教材的完成得到了中国科学技术大学出版社的大力帮助和悉心指导，在此一并向他们的辛勤劳动表示衷心的感谢！

编著者

2009年10月

目　录

第1篇 数理逻辑

数理逻辑是一门应用数学方法引进一套符号系统来研究思维的形式结构和规律的学科. 它起源于公元17世纪中叶，德国数学家、哲学家莱布尼兹曾经提出"用计算机代替思维完成推理过程"的设想. 其后，由美国数学家布尔于1847年出版的《逻辑的数学分析》一书发展了逻辑代数，通常称布尔代数. 德国数学家弗雷格于1879年出版了《表意符号》，引入了量词、约束元，使逻辑演算趋于完备. 1930年出生于奥地利的美籍数学家哥德尔的完全性定理证明使数理逻辑基础得以完善，意大利数学家皮亚诺、美国数学家德·摩根、罗素等人对数理逻辑都做出了很大的贡献. 20世纪30年代数理逻辑进入了成熟时期，基本内容(命题逻辑和谓词逻辑)有了明确的理论基础，成为数学的一个重要分支，同时也是电子元件设计和性质分析的工具. 冯·诺依曼、图灵、克林等人研究了逻辑与计算的关系. 随着1946年第一台通用电子数字计算机的诞生和近代科学的发展，计算技术中提出了大量的逻辑问题，逻辑程序设计语言的研制，更促进了数理逻辑的发展. 除古典二值(真、假)逻辑外，还研究了多值逻辑、模态逻辑、概率逻辑、模糊逻辑、非单调逻辑等，不仅有演绎逻辑，也还有归纳逻辑. 计算机科学中还专门研究计算逻辑、程序逻辑、时序逻辑等. 现代数理逻辑分为四论：证明论、递归论(与形式语言语法有关)、模型论、公理化集合论(与形式语言的语义有关).

"逻辑是不可战胜的，因为要反对逻辑还得使用逻辑."

—P. Boutroux

"数学在过去几乎完全与科学相连结，而逻辑则与希腊哲学相连结. 但两者在现代都发展了. 逻辑变得更数学了，数学变得更逻辑了，无法在两者之间划分界限."

—D. Vira

人的思维活动→自然语言描述→易产生歧义→引入符号语言→在命题逻辑中以命题为基本研究单位.

学习本章的关键是要学会用形式化的方法完成逻辑推理.

第1-1章 命题逻辑

【学习要求】掌握命题、命题公式、重言式、等价式、蕴涵式等基本概念；能利用逻辑联结词或真值表，等价式与蕴涵式进行命题演算和推理.

表述客观世界的各种现象、人们的思想、各门学科的规则、理论

等,除使用自然语言外,还要使用一些特定的术语、符号、规律等"对象语言",这些是所研究学科的一种特殊的形式化语言,研究思维结构与规律的逻辑学也有其对象语言.本章就是讨论逻辑学中的对象语言——命题及其演算,它相当于自然语言中的语句.

1-1-1 命题、逻辑联结词与真值表

命题逻辑研究以命题为基本单位构成的前提和结论之间的可推导关系.研究什么是命题、如何表示命题、如何由一组前提推导一些结论.在命题逻辑中,原子命题是不可再分的.

一、命题的基本概念

首先我们从下面的例子加以分析.

【例 1-1-1.1】 人总是要死的.

【例 1-1-1.2】 苏格拉底是人.

【例 1-1-1.3】 苏格拉底是要死的.

【例 1-1-1.4】 中国人民是勤劳和勇敢的.

【例 1-1-1.5】 鸵鸟是鸟.

【例 1-1-1.6】 1 是质(素)数.

【例 1-1-1.7】 今天没有下雨.

【例 1-1-1.8】 公元 2000 年会出现生物计算机.

【例 1-1-1.9】 太阳系以外的星球上有人.

【例 1-1-1.10】 他喜欢读书也喜欢运动.

【例 1-1-1.11】 他在机房里或者在图书馆里.

【例 1-1-1.12】 电灯不亮是灯泡或线路故障,或停电所致.

【例 1-1-1.13】 如果 a 和 b 都是正数,则 ab 也是正数.

【例 1-1-1.14】 $xy>0$ 当且仅当 x 和 y 都大于零.

【例 1-1-1.15】 $101+1=110$.

【例 1-1-1.16】 天气多好啊!

【例 1-1-1.17】 他来了吗?

【例 1-1-1.18】 全体起立!

【例 1-1-1.19】 帮帮我吧!

【例 1-1-1.20】 $x=0$.

【例 1-1-1.21】 我正在说谎.

上述例 1-1-1.1～1-1-1.4,例 1-1-1.12 是可以判断为对(真,成立)的陈述句;例 1-1-1.5,1-1-1.6 是能够判断为不对(假,不成立)的陈述句;例 1-1-1.13～1-1-1.14 作为简单陈述句时,是命题(例 1-1-1.13的真值为真,例 1-1-1.14 的真值为假),看成复合陈述句时

它不是命题(因为连接词前后是简单陈述句不是命题);例 1-1-1.7～1-1-1.9 在人类历史发展的长河中能够判断它是真或是假的陈述句;例 1-1-1.10～1-1-1.11根据“他”当时的情况能够判断出是真或是假的陈述句;例1-1-1.15在二进制计算中为真,在十进制计算中为假,也还是可以判断为真或为假的陈述句;例 1-1-1.16 是感叹句;例 1-1-1.17是疑问句;例 1-1-1.18、例 1-1-1.19 是祈使句;例 1-1-1.20 中 x 是一个未知数(变量),无法判断是真还是假;例 1-1-1.21 是无法判断真假的悖论.从以上的分析可以看出,表达思想的语句有不同的类别,数理逻辑中研究的是出现较多而又比较规范的语句——可以判断出真或假的陈述句.

悖论:一个语句 Q,如果从 Q 为真,可以推出 Q 为假;从 Q 为假,可以推出 Q 为真,我们就称 Q 是一个悖论.这类悖论往往是与语义有关的。悖论不在命题逻辑的研究范畴内.

定义 1-1-1.1 凡是能判断是真或是假的陈述句称为**命题**.

如前面的例 1-1-1.1～1-1-1.15 都是命题,例 1-1-1.16～1-1-1.21都不是命题.

命题的值为真或假.今后约定用 1 表示真,0 表示假.命题本身用大写英文字母(F,T 除外)或它们后面跟上数字表示,如 P,P_1,Q_5,….

命题的特征:一是陈述句;二是有唯一的真假值.

如 P:苏格拉底是人.A_1:今天没有下雨.P 或 A_1 称为命题标识符.当命题标识符代表一个确定的命题时,称为命题常元;当命题标识符代表非确指的命题时,称这样的命题标识符为命题变元.

注意:命题变元不是命题,只有对命题变元用一个确定的命题代入后,才能确定其值是 1 还是 0.

定义 1-1-1.2 用一个确定的命题代入一个命题标识符 P,称为对 P 进行**指派(赋值,或解释)**.

再看前面的例 1-1-1.1～1-1-1.6,这些命题不能再分解为更简单的能判断其值为 1 或 0 的陈述句了,这类命题称为**原子命题**.在例 1-1-1.7 中,如果表示今天下雨为原子命题 P,则今天没有下雨是 P 的否定;例 1-1-1.10 可分解为原子命题 P:他喜欢读书,Q:他喜欢运动,用联结词“也”联结起来;例 1-1-1.11 可分解为原子命题 P:他在机房里,Q:他在图书馆里,用联结词“或者”联系起来;例 1-1-1.13 可分解为原子命题 P:a 是正数,Q:b 是正数,R:ab 是正数,用联结词“和”与“如果……则……”联系起来;例 1-1-1.14 可分解为原子命题 P:$xy>0$,Q:$x>0$,R:$y>0$,用联结词“当且仅当”与“都”联系起来,这类用联结词、标点符号和原子命题构成的命题称为**复合命题**.

复合命题是由原子命题和联结词组成的陈述句.

二、逻辑联结词

日常生活、工作和学习中,自然语言里我们常常使用下面的一些

联结词，例如：非，不，没有，无，并非，并不等等来表示否定；并且，同时，以及，而(且)，不但……而且……，既……又……，尽管……仍然，和，也，同，与等等来表示同时；虽然……也……，可能……可能……，或许……或许……，等和“或(者)”的意义一样；若……则……，当……则……与“如果……那么……”的意义相同；充分必要，等同，一样，相同与“当且仅当”的意义一样. 即是说在自然语言中，这些逻辑联结词的作用一般是同义的. 在数理逻辑中将这些同义的联结词也统一用符号表示，以便书写、推演和讨论. 现定义常用逻辑联结词.

联结词与自然语言之间的对应并非一一对应. 比如：合取联结词“$\wedge$”对应了自然语言的“既…又…”、“不仅…而且…”、“虽然…但是…”、“并且”、“和”、“与”等；条件联结词“$\rightarrow$”，“$P\rightarrow Q$：对应了自然语言中的“如 P，则 Q”、“只要 P，就 Q”、“P 仅当 Q”、“只有 Q，才 P”、“除非 Q，否则 $\neg P$”等；等价联结词“$\leftrightarrow$”对应了自然语言中的“等价”、“当且仅当”、“充分必要”等；符号化时应根据实际语义，选择合适的逻辑联结词.

定义 1-1-1.3 在命题 P 的适当地方插入“不”或者“没有”产生的新命题称为 P 的否定，记为 $\neg P$，读成“非 P”，“$\neg$”称为否定联结词.

$\neg P$ 的取值依赖于 P 的取值，否定的运算表为

命题	P	$\neg P$
真值	1	0
	0	1

例如，P：2 是一个质数. (值为 1)

$\neg P$：2 不是一个质数(或 2 是一个和数). (值为 0)

注意：(1) 不同的陈述句可能确定同一个命题；

(2) 否定是一元运算.

定义 1-1-1.4 两个命题 P 和 Q 产生的一个新命题记为 $P\wedge Q$，读成“P 与 Q”或“P 和 Q 的合取”，“$\wedge$”称为合取联结词.

合取的运算表为

命题	P	Q	$P\wedge Q$
真值	1	1	1
	1	0	0
	0	1	0
	0	0	0

如例 1-1-1.10，P：他喜欢读书，Q：他喜欢运动，P 和 Q 的合取为 $P\wedge Q$：他喜欢读书也喜欢运动.

又如，A：猫吃鱼，B：$2+2=0$，则 $A\wedge B$：猫吃鱼而且 $2+2=0$.

注意：(1) 数理逻辑中的联结词“合取”只考虑命题之间的形式关系，不考虑命题内容的实际含义，只有在研究取值时才加以考虑.

(2) 合取是一个二元运算，$P\wedge Q$ 真值为 1，当且仅当 P，Q 的真值同时为 1.

定义 1-1-1.5 两个命题 P 或 Q 产生一个新命题，记为 $P\vee Q$，

读成"P 或 Q"或"P 析取 Q"，"$\vee$"称为析取联结词.

析取的运算表为

命题	P	Q	$P\vee Q$
真值	1	1	1
	1	0	1
	0	1	1
	0	0	0

如例 1-1-1.12，P：他在机房里，Q：他在图书馆里，$P\vee Q$：他在机房或图书馆里.

又如，P_1：他是游泳冠军，P_2：他是百米赛跑冠军，$P_1\vee P_2$：他是游泳冠军或百米赛跑冠军.

A：猫吃鱼，B：$2+2=0$，$A\vee B$：猫吃鱼或者 $2+2=0$.

注意：(1) 析取可细分为两种，一种是"不可兼或"如例 1-1-1.11；一种是"可兼或"，如例 1-1-1.12. 将不可兼或记为"$\bar{\vee}$"，可兼或记为"$\vee$". 显然"$\vee$"包含"$\bar{\vee}$"为其特殊情况. 我们着重考虑"$\vee$"的情形.

(2) 在自然语言或形式逻辑中，用来析取联结的对象往往要求属于同一类事物，但是在数理逻辑中不作这种限制，例如 $A\vee B$：猫吃鱼或者 $2+2=0$ 是允许存在的命题.

(3) 析取是一个二元运算，$P\vee Q$ 真值为 0，当且仅当 P，Q 真值同时为 0.

> 真值表是逻辑运算的基础，也是逻辑推演的基本理论，读者应熟练掌握.

定义 1-1-1.6　设 P，Q 是两个命题，"若 P，则 Q"是一个新命题，记为 $P\to Q$，读成 P 推出 Q（或 Q 是 P 的必要条件，P 是 Q 的充分条件），P 称为条件联结词"$\to$"的前件，Q 为"$\to$"的后件，"$\to$"称为条件联结词.

条件联结词的运算表为

命题	P	Q	$P\to Q$
真值	1	1	1
	1	0	0
	0	1	1
	0	0	1

例如，P：河水泛滥，Q：周围的庄稼被毁. $P\to Q$：若河水泛滥，则周围的庄稼被毁.

又如,A:2<3,B:今天阳光明媚.$A \to B$:若2<3,则今天阳光明媚.

注意:(1) 条件联结词联结的前件与后件不限定于同一类事物.

(2) 从真值表定义可知,前件取假值时无论后件的取值是真还是假,条件联结词产生的新命题都取为真,即采取的是"善意的推定".

(3) 条件联结词为一个二元运算,$P \to Q$ 真值为 0,当且仅当 P 真值为 1,Q 真值为 0.

定义 1-1-1.7 设 P,Q 是两个命题,"P 当且仅当 Q"是一个新命题,记为 $P \leftrightarrow Q$,"$\leftrightarrow$"称为双条件联结词.

双条件联结词的运算表为

命题	P	Q	$P \leftrightarrow Q$
真值	1	1	1
	1	0	0
	0	1	0
	0	0	1

双条件是数学上考虑最多,也是大家比较熟悉的,可以举出许多例子.例如,我没有收到信当且仅当没有人给我写信,它的值为1.约定在整数范围内讨论,P:2+2=0,Q:IBM-PC是一种微型计算机,$P \leftrightarrow Q$:2+2=0当且仅当IBM-PC是一种微型计算机,此命题取值为0.

熟练掌握这五个基本逻辑联结词的运算规则,及运算真值表.

注意:(1) 双条件联结词联系的命题不限定属于同一类事物.

(2) 双条件是一个二元运算,$P \leftrightarrow Q$ 真值为 1,当且仅当 P,Q 真值相同.

这五种逻辑联结词也可以称为逻辑运算,与一般数的运算一样,可以规定运算的优先级,我们规定的优先级顺序依次为 $\neg$,$\wedge$,$\vee$,$\to$,$\leftrightarrow$.如果出现的逻辑联结词相同,又没有括号时,从左到右顺序运算.如果遇到有括号时就先进行括号中的运算.

考察例 1-1-1.12,令 P:电灯亮,Q:灯泡有故障,R:线路有故障,S:停电.则可将该语句符号化为 $Q \vee R \vee S \to \neg P$.

三、命题运算的真值表

定义 1-1-1.8 在命题中,对于命题变元指派的各种可能组合,即确定了该命题的各种真值情况,把它汇列成表格,就是命题真值表.

任意给定一个复合命题后,用原子命题和逻辑联结词表示出来,再利用真值表就可以计算出复合命题的真值.当复合命题用原子命

题变元、逻辑联结词和括号组成时,可以求出该复合命题的真值表.

【例 1-1-1.22】 求 $P\vee(P\wedge Q)$,$P\wedge\neg P$,$P\vee\neg P$ 的真值表.

解:

P	Q	$P\wedge Q$	$P\vee(P\wedge Q)$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	0

P	$\neg P$	$P\wedge\neg P$
1	0	0
0	1	0

P	$\neg P$	$P\vee\neg P$
1	0	1
0	1	1

【例 1-1-1.23】 求 $Q\vee R\wedge S\rightarrow\neg P$ 的真值表.

解:

P	Q	R	S	$R\wedge S$	$Q\vee R\wedge S$	$\neg P$	$Q\vee R\wedge S\rightarrow\neg P$
1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	1	1

【例 1-1-1.24】 求 $\neg(P\vee Q)\leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q$ 的真值表.

解:

P	Q	$P\vee Q$	$\neg(P\vee Q)$	$\neg P\wedge\neg Q$	$\neg(P\vee Q)\leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q$
1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1

习 题

1. 结合日常生活,举出五个以上原子命题和复合命题的例子.

2. 将下列命题符号化.

(1) 张亮和李林是好朋友;

(2) 我一边看书一边听音乐;

(3) 天下雨了,我不去上街;

(4) 实函数 $f(x)$ 可微当且仅当 $f(x)$ 连续. 此命题的真值是什么?

(5) 除非你努力,否则你就会失败;

(6) 合肥到北京的列车是中午十二点半或下午五点五十分开;

(7) 优秀学生应做到学习、身体、工作都好.

3. 写出下列逻辑表达式的真值表.

(1) $P\to(Q\vee\neg P)$;

(2) $(P\vee(Q\to R))\leftrightarrow((P\vee\neg R)\to Q)$;

(3) $(P\to(Q\to P))\leftrightarrow(\neg P\to(P\to Q))$;

(4) $(P\to(Q\vee R))\leftrightarrow(P\to Q)\vee(P\to R)$;

(5) $(P\to Q)\wedge(R\to Q)\leftrightarrow(P\vee R)\to Q$;

(6) $P\to(Q\to(R\to(\neg P\to(\neg Q\to\neg R))))$;

(7) $\neg P\vee Q$.

4. 设命题 A_1,A_2 的真值为 1, A_3,A_4 两命题的真值为 0,求下列命题的真值.

(1) $(A_1\wedge(A_2\wedge A_3))\vee\neg((A_1\vee A_2)\wedge(A_3\vee A_4))$;

(2) $\neg(A_1\wedge A_2)\vee\neg A_3\vee(((\neg A_1\vee A_2)\vee\neg A_3)\wedge A_4)$;

(3) $\neg(A_1\wedge A_2)\vee\neg A_3\vee((A_3\leftrightarrow\neg A_1)\to(A_3\vee\neg A_4))$;

(4) $(A_1\vee(A_2\to(A_3\wedge\neg A_1)))\leftrightarrow(A_2\vee\neg A_4)$.

5. 将下列语句符号化.

(1) 占据空间的，有质量的而且不断变化的称之为物质；

(2) 占据空间的，有质量者称为物质，而物质是不断变化的；

(3) 如果你来了，那么他唱歌与否要看你是否伴奏而定；

(4) 我们不能既划船又跑步.

1-1-2　命题公式与真值函数

在研究命题的时候，通常并不关心命题的具体内容，而重点研究命题之间的关系. 因此命题公式是基础和关键.

由命题变元、逻辑联结词和括号按下列规定形成的符号串是命题逻辑讨论的主要对象.

一、命题演算公式

定义 1-1-2.1　由命题变元、逻辑联结词和括号构成的下述表达式称为命题合式公式(Well-Formed Formula)或命题演算公式，简称公式，记为 WFF：

(1) 单个原子命题变元是 WFF；

(2) 若 P,Q 是 WFF，则 $(\neg P)$，$(P\wedge Q)$，$(P\vee Q)$，$(P\rightarrow Q)$，$(P\leftrightarrow Q)$ 都是 WFF；

(3) 只有有限次使用(1)，(2)得到的表达式才是 WFF.

为了书写和输入计算机，以及进行运算方便起见，规定：

(1) $(\neg P)$ 的括号，整个 WFF 的最外层括号可以省略；

(2) 已定好逻辑联结词的优先级后，优先级的括号可省略.

$\neg(P\wedge Q)$，$P\vee\neg Q$，$(P\rightarrow Q)\rightarrow R$，$(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R)\leftrightarrow(P\rightarrow R)$ 等都是 WFF. 但 $RS\rightarrow T$，$\neg P\rightarrow Q)\rightarrow(Q\rightarrow P)$ 就不是 WFF，因为前一表达式 R 与 S 之间没有逻辑联结词，后一表达式中括号不配对，故不符合定义 1-1-2.1.

按 BNF(Backus-Naur Form)符号，WFF 的语法定义为：

WFF∷=〈命题〉|¬〈命题〉|〈命题〉〈二元运算符〉〈命题〉

其中：〈命题〉∷=〈原子公式〉|〈WFF〉，

〈二元运算符〉∷=∧|∨|→|↔.

定义 1-1-2.2　令 A 为 WFF，对 A 中出现的全部原子命题变元 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 分别赋以真值 0 或 1 所得到的一组真值(n 个)称为 A 的一个**指派或解释**.

从 1-1-1 的例 1-1-1.22～1-1-1.24 可以看出，对命题变元作指派，再利用逻辑联结词的真值表(即逻辑运算规则)可以演算出 WFF 的真值表.

真值表技术是一种很有效的手段，在命题逻辑中应用较广。因此，应能准确画出给定命题公式的真值表.