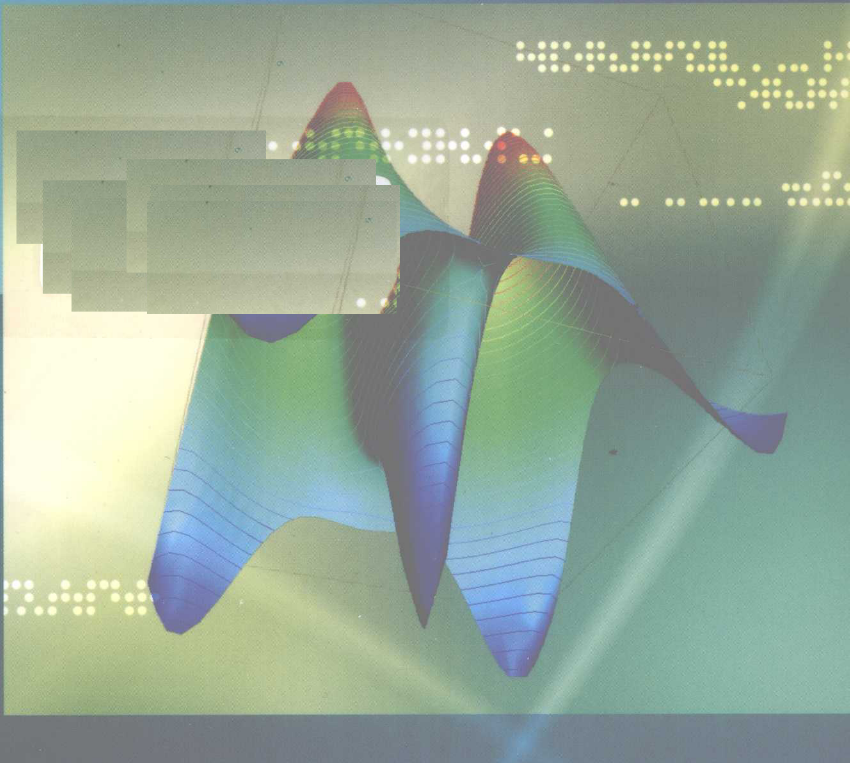
普通高等学校信息与计算科学专业系列丛书

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

最优化方法

（第二版）

孙文瑜　徐成贤　朱德通



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等学校信息与计算科学专业系列丛书
普通高等教育"十一五"国家级规划教材

最优化方法

Zuiyouhua Fangfa

（第二版）

孙文瑜　徐成贤　朱德通

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是为高等学校理工科和管理类本科生编写的一学期使用的“最优化方法”教材，主要内容包括：基本概念、线性规划、线性搜索与信赖域方法、无约束最优化方法、线性与非线性最小二乘问题、二次规划、约束最优化的理论与方法等。全书深入浅出，理论、计算与应用相结合，尽可能避免较深的数学推导和证明。每章后面都有一个小结，并附有习题，易于教学。

本书可作为信息与计算科学、数学与应用数学、统计学、运筹学、管理科学与工程、计算机、经济与金融，以及有关理工科专业的本科生和研究生作为教材或教学参考书。具有高等数学和线性代数基础的科技人员可自学本书。

图书在版编目（CIP）数据

最优化方法/孙文瑜，徐成贤，朱德通编著．—2版
北京：高等教育出版社，2010.7
ISBN 978-7-04-029763-8

Ⅰ．①最…　Ⅱ．①孙…②徐…③朱…　Ⅲ．①最优化算法-高等学校-教材　Ⅳ．①O224

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第109945号

策划编辑　兰莹莹　**责任编辑**　张耀明　**封面设计**　王凌波
责任绘图　杜晓丹　**版式设计**　马敬茹　**责任校对**　殷　然
责任印制　毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京中科印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
		版　　次	2004年8月第1版
开　　本	787×960　1/16		2010年7月第2版
印　　张	17.5	印　　次	2010年7月第1次印刷
字　　数	320 000	定　　价	26.70元

物料号　29763-00

第二版前言

最优化是一门应用十分广泛的学科，它研究在有限种或无限种可行方案中挑选最优方案，构造寻求最优解的计算方法。由于最优化在科学、工程、国防、交通、管理、经济、金融、计算机等领域的广泛应用，现在许多高校理科、工科、管理科学、经济与金融等学科都把最优化开设为一门必修或选修课程。

为了给我国高等院校理工科和管理类本科生提供一本现代、实用、简洁的“最优化方法”教材，我们根据“教育部信息与计算科学专业系列教材编委会”的要求，结合我们自己在最优化领域的科研和教学体会，把这个领域的最基本、最重要、最实用、最有效的现代最优化方法的内容介绍给学生，使本科生对最优化方法有一个基本的和较全面的了解，为进一步从事最优化和应用最优化打下一个较好的基础。

本书是一本最优化和运筹学方面的入门性教材，适合作为高等院校理工科和管理类本科生和研究生的一学期使用的教材。本书深入浅出，通俗易懂。我们尝试努力讲清每种方法的动机、算法、性质、收敛性及数值例子，尽可能避免较深较难的数学推导和证明，力争把所需要的数学知识降到最低。对于个别有一定难度的章节，为了全书的连贯性，我们仍然给出，但用 $*$ 号表示，表示仅供教师和感兴趣的学生参考。例如，§2.4 线性规划的内点法，§3.6 不精确线性搜索方法的收敛性，§3.8 信赖域方法的收敛性，§4.5 拟牛顿法的收敛性，小节 5.2.2 解线性等式约束的线性最小二乘问题，§7.3 内点障碍函数法，§7.4 序列二次规划方法等。对于这些章节，教师可根据具体情况考虑是否予以跳过。总之，对于一学期的课程而言，本书提供了足够的教学内容，教师可根据具体情况组织教学。

本书包含最优化领域的核心内容。第一章介绍最优化问题的基本概念；第二章介绍在实际中有最广泛应用的线性规划；第三章讨论线性搜索与信赖域方法，它们提供了最优化方法的总体收敛策略；第四章研究无约束最优化方法，这一章是全书的一个中心，这不仅因为无约束最优化本身的重要性，而且众多约束最优化问题也都是转化为无约束问题来处理。第五章讨论一类特殊的最优化问题 —— 线性与非线性最小二乘问题。这些问题在实际中广泛存在，我们向大家提供解这类问题的基本的现代方法，相信这对大家今后的工作是相当有益的。第六和第七两章讨论约束最优化，其中我们将一类特殊的和重要的约束优化类型 —— 二次规划单独构成一章，其重要意义自不必说。对约束最优化的理论与算法我们进行了简单的讨论，介绍了最优性条件以及两类重要的求解算法：罚函

数法与序列二次规划方法。

由于本书主要是作为本科生教材编写的，我们希望它选材适当，叙述和推导严谨，强调算例和应用 MATLAB 软件；同时，我们不希望本书内容太多、太全、太深。这就是说，我们希望学生了解与掌握最优化这门学科中基本的方法、理论与算法软件。本书可供一学期 48 课时 (每周 3 课时 ×16 周) ~ 72 课时 (每周 4 课时 ×18 周) 的各类学校采用。教师可根据本校具体情况适当增删内容。本书适用面较广，既适用于重点院校，也适用于一般院校；既适用于信息与计算科学、数学与应用数学、统计与运筹等数学类专业，也适用于其他理科、计算机、工程类、管理类、金融经济等学科。我们建议这门课在三年级讲授，使学生预先具有高等数学和线性代数的基本知识。同时，在讲授这门课时，最好要求学生上机编程做练习，因为用这些方法解题都需要在计算机上完成。此外，根据我们的授课经验，对于理工科和管理类研究生一学期的最优化或运筹学课程，本书也是非常适用的。

本书每章后面都有一个小结，概述了这一章的主要内容、背景以及一些进展。同时每章给出了一些习题供教师选择使用。全书后面附有两个附录和参考文献。附录 I 中给出了求解无约束最优化和约束最优化的一些标准试验函数，这些试验函数供数值试验用。附录 II 中给出了几类主要优化方法的 MATLAB 应用程序。书末列出的参考文献供教师和感兴趣的学生作进一步深入研究探讨时参考。

本书第一版问世后，受到广大教师、学生和读者的好评，这对我们是很大的激励。我们在第一版的基础上，结合自己的教学体会和同行的建议，对第一版作了修改，主要体现在精简了一些内容，增加了一些算例和调用 MATLAB 软件程序的例子，如调用 MATLAB 中的单纯形法、共轭梯度法、拟牛顿法、二次规划方法等的程序，增加了一些习题，改写了部分内容，并纠正了第一版中的一些错误。这些修正使得本教材更能适应目前的教学情况，更方便教师组织教学和学生进行学习。

在本书写作和录入的过程中，作者的研究生们提供了不少建议，并协助做了许多工作，谨致谢意。

南京航空航天大学理学院院长倪勤教授认真审阅了第一版全书手稿，并提出了宝贵的修改意见。作者谨向他致以衷心的感谢。

信息与计算科学专业系列教材编委会、高等教育出版社的王瑜编辑、李蕊编辑、张长虹编辑、兰莹莹编辑等对本书的写作给予了热情指导和关心，谨向他们致谢。

作者还要感谢国家自然科学基金委员会多年来对作者科研工作的资助，感

谢南京师范大学、西安交通大学和上海师范大学对作者工作的一贯支持。

尽管本书作者多年来一直从事最优化方法的研究和教学，但限于水平和时间，本书难免有不妥和错误之处，欢迎读者批评指正。

孙文瑜　于 南京师范大学
徐成贤　于 西安交通大学
朱德通　于 上海师范大学

2010 年 2 月 14 日

第一版前言

最优化是一门应用十分广泛的学科，它研究在有限种或无限种可行方案中挑选最优方案，构造寻求最优解的计算方法。由于最优化在科学、工程、国防、交通、管理、经济、金融、计算机等领域的广泛应用，现在许多高校理科、工科、管理科学、经济与金融等学科都把最优化开设为一门必修或选修课程。

为了给我国高等院校理工科和管理类本科生提供一本现代、实用、合适的“最优化方法”教材，我们根据教育部信息与计算科学教材编写组的要求，结合我们自己在最优化领域的科研和教学体会，把这个领域最基本、最重要、最实用、最有效的现代最优化方法的内容介绍给学生，使本科生对最优化方法有一个基本的和较全面的了解，为进一步从事最优化方法的理论、算法、软件与应用打下一个较好的基础。

本书深入浅出，通俗易懂。我们尝试努力讲清每种方法的动机、算法、性质、收敛性及数值例子，尽可能避免较深较难的数学推导，力争把所需要的数学知识降到最低。对于个别难度较大的章节，为了全书的连贯性，我们仍然给出，但用 * 号表示，仅供教师和感兴趣的学生参考。例如小节 4.4.3 拟牛顿法的收敛性，小节 5.1.3 解线性不等式约束的线性最小二乘问题等。对于这些章节，教师可根据具体情况予以跳过。对于 §1.2 凸集与凸函数中后面部分的理论内容教师可以选讲。

本书为本科生一学期用教材，材料覆盖最优化领域的核心内容。第一章介绍最优化问题的基本概念；第二章介绍在实际上有最广泛应用的线性规划；第三章讨论线性搜索与信赖域方法，它们提供了最优化方法的总体收敛策略；第四章研究无约束最优化方法，这一章是全书的一个中心，这不仅因为无约束最优化本身的重要性，而且众多约束最优化问题也都是转化为无约束问题来处理；第五章讨论一类特殊的最优化问题 —— 线性与非线性最小二乘问题。这些问题在实际中广泛存在。我们向大家提供解这类问题的基本的现代方法，相信这会对大家今后的工作是相当有益的。第六和第七两章讨论约束最优化，其中我们将一类特殊的和重要的约束优化类型 —— 二次规划单独构成一章，对约束最优化的理论与算法我们进行了简单的讨论。

由于这本书是作为本科生教材编写的，我们不希望本书内容太多、太全、太深，但也必须使学生了解这门学科的全貌，了解与掌握必要的方法、理论与算法软件。应该说，本书包含的内容是最优化的核心部分，特别是实际中用得较多的内容，我们力求多讲一些。这本书可供一学期 48 课时 (每周 3 课时 $\times 16$ 周) ~ 72

课时 (每周 4 课时 ×18 周) 的各类学校采用。教师可根据本校具体情况适当增删内容。本书适用面较广, 既适用于重点院校, 也适用于一般院校; 既适用于信息与计算科学、数学与应用数学、统计与运筹等数学类专业, 也适用于计算机、理学类、工程类、管理类、金融经济等学科。我们建议这门课在三年级讲授, 使学生预先具有高等数学和线性代数的基本知识。同时, 在讲授这门课时, 最好要求学生上机编程序做练习, 因为用最优化方法解题都需要在计算机上完成。

本书每章后面都有一个小结, 概述了这一章的主要内容、背景, 及一些进展。同时每章给出了一些习题供教师选择使用。全书后面附有一个附录和参考文献。附录中给出了求解无约束最优化和约束最优化的一些标准试验函数, 这些试验函数供数值试验用。书末列出的参考文献供教师和感兴趣的学生作进一步深入研究探讨时参考。

在本书写作和录入的过程中, 作者的研究生们提供了不少建议, 并协助做了许多工作, 谨致谢意。

南京航空航天大学理学院院长倪勤教授认真审阅了全书手稿, 并提出了宝贵的修改意见。作者谨向他致以衷心的感谢。

教育部信息与计算科学教材编委会、高等教育出版社的领导及王瑜编辑对本书的写作给予了热情指导和关心, 谨向他们致谢。

作者还要感谢国家自然科学基金委员会多年来的资助, 感谢南京师范大学、西安交通大学和上海师范大学对作者工作的一贯支持。

尽管本书作者多年来一直从事最优化方法的研究和教学, 但限于水平和时间, 本书难免有不妥和错误之处, 欢迎读者批评指正, 以便再版时修改更正。

孙文瑜　徐成贤　朱德通

2004 年 2 月 15 日

目　　录

第一章　基本概念

§1.1　最优化问题简介

最优化技术在国民经济的许多领域如国防、工农业生产、交通运输、金融、贸易、管理、科学研究中有广泛的应用. 所谓最优化就是在众多可行的方案或方法中找到最好的方案或方法. 例如在确定投资项目时希望选择期望收益最大或风险最小的项目; 空间飞船的设计要求在有限的空间放置尽可能多的设备; 一个建筑在满足设计要求的条件下建筑费用应尽可能少; 两地之间的输送管道或运输路线在满足要求的条件下应尽可能短. 为应用最优化技术确定最优的方案, 需要针对具体的实际问题建立相应的最优化模型, 再根据模型的具体形式和特性选择适当的最优化方法求解. 本书旨在介绍最优化的基本理论和常用的最优化方法.

在生产管理和经济活动中, 很多问题都可以归结为最优化问题, 尤其是线性规划问题. 一类是如何合理使用有限资源, 我们举例介绍一类如何合理使用有限资源, 以获得最大效益的线性规划问题.

例 1.1.1　*某公司生产甲、乙两种商品, 每件甲商品要耗 A 种原料 3 kg, B 种原料 3 kg, 产值为 180 元; 每件乙商品要耗 A 种原料 4.5 kg, B 种原料 1.5 kg, 产值为 150 元. 现该公司共有 A 种原料 900 kg, B 种原料 600 kg, 试确定甲、乙两种商品各生产多少件, 使得该公司总产值最大.*

建立模型　设该公司生产甲商品 x_1 (件), 生产乙商品 x_2 (件), 则该公司的总产值为 $180x_1 + 150x_2$. 甲、乙两种商品的产量受到 A 种原料和 B 种原料总量的限制, 即 x_1, x_2 要满足一下一组不等式约束条件:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4.5x_2 \leqslant 900, \\ 3x_1 + 1.5x_2 \leqslant 600. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

此外, x_1, x_2 还应该是非负数.

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \tag{1.1.2}$$

因此, x_1, x_2 应该在满足资源约束条件 (1.1.1) 和非负约束条件 (1.1.2) 下, 该公

司的总产值 z 取最大值:

$$\max z = 180x_1 + 150x_2. \tag{1.1.3}$$

这样, 我们得到了该问题的线性规划模型如下:

$$\begin{aligned} \max z &= 180x_1 + 150x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4.5x_2 \leqslant 900, \\ & 3x_1 + 1.5x_2 \leqslant 600, \\ & x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

例 1.1.2 某工厂需要储存甲种货物 1350 吨, 乙种货物 1460 吨, 现计划租赁 A、B 两种仓库来存储甲、乙两种货物, A, B 两种仓库的总数不能超过 50 个. 已知 30 吨甲种货物和 25 吨乙种货物可装满一个 A 型仓库; 20 吨甲种货物和 40 吨乙种货物可装满一个 B 型仓库. 若每个 A 型仓库的租金为 0.5 万元, 每个 B 型仓库的租金为 0.8 万元. 试问如何安排 A, B 两种仓库的个数, 使得总租金最少?

建立模型 设 x_1, x_2 分别为 A, B 两种仓库的个数, 依题意可得如下线性规划模型:

$$\begin{aligned} \min z &= 0.5x_1 + 0.8x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leqslant 50, \\ & 30x_1 + 20x_2 \geqslant 1350, \\ & 25x_1 + 40x_2 \geqslant 1460, \\ & x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

现在再举一个两杆桁架问题的例子, 这是一个典型的非线性规划问题.

例 1.1.3 两杆桁架问题. 考虑图 1.1.1 中的两杆桁架问题. 桁架由两个钢管组成, 上端穿在一起, 下端分别固定在两个支点上. 两支点之间的距离, 即跨度为 $2s$. 现在设计问题是要确定桁架的高度, 钢管的厚度和平均直径, 使得钢管能支撑 $2W$ 的负荷, 并使得桁架本身的总重量最小.

解 如图 1.1.1, 设 x_1 表示平均钢管直径, x_2 表示钢管厚度, x_3 表示桁架高度. 于是, 钢管的截面积为 $2\pi\frac{x_1}{2}x_2$. 注意到钢管的长度为 $\sqrt{s^2+x_3^2}$, 并设钢管的密度为 ρ, 我们得到钢管的重量为 $\rho\pi x_1x_2\sqrt{s^2+x_3^2}$.

约束条件为:

1. 因为空间有限, 桁架高度不能超过 b_1, 即 $x_3 \leqslant b_1$.
2. 平均钢管直径与钢管厚度的比不能超过 b_2, 即 $\frac{x_1}{x_2} \leqslant b_2$.

3. 钢管的压应力不能超过钢管的弯曲应力, 即

$$W\sqrt{s^2+x_3^2} \leqslant b_3x_1x_2x_3.$$

4. 平均直径 x_1, 厚度 x_2, 高度 x_3 还必须满足条件

$$W(s^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}} \leqslant b_4x_1x_3(x_1^2+x_2^2).$$

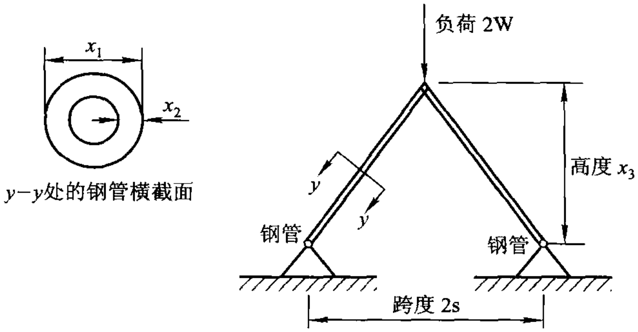


图 1.1.1

这样, 我们得到两杆桁架设计问题的非线性规划模型:

$$\begin{aligned}
\min\ & x_1x_2(s^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}} \\
\text{s.t.}\ & x_3-b_1 \leqslant 0, \\
& x_1-b_2x_2 \leqslant 0, \\
& W(s^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}}-b_3x_1x_2x_3 \leqslant 0, \\
& W(s^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}}-b_4x_1x_3(x_1^2+x_2^2) \leqslant 0, \\
& x_1,x_2,x_3 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

再看一个非线性规划问题的例子.

例 1.1.4

$$\begin{aligned}
\min_{x_1,x_2}\ & (x_1-2)^2+(x_2-2)^2 \\
\text{s.t.}\quad & x_1+2x_2=4, \\
& x_1 \geqslant 0, \\
& x_2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

解　如图 1.1.2 所示, 可行域

$$\mathcal{F}=\{(x_1,x_2)|x_1+2x_2=4,x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\}$$

为一条线段. 目标函数的等高线为

$$f(x_1,x_2)=k.$$

例如, 图中显示了 $f(x_1,x_2)=\frac{4}{5},f(x_1,x_2)=4,\cdots$. 极小点为 $x_1^*=\frac{8}{5},x_2^*=\frac{6}{5}$, 它在可行域 $\mathcal{F}$ 和目标函数等高线的切线上. 这时目标函数值为

$$f(x_1^*,x_2^*)=\left(\frac{8}{5}-2\right)^2+\left(\frac{6}{5}-2\right)^2=\frac{4}{5}.$$

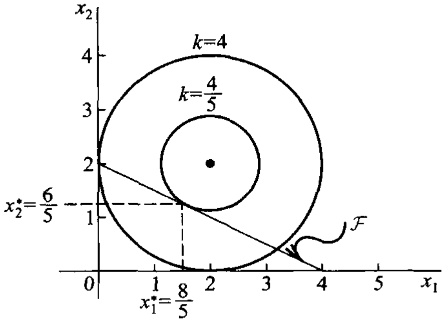


图 1.1.2

最优化问题的数学模型的一般形式为

$$\begin{cases}\min\ f(x)\\ \text{s.t.}\ \ c_i(x)=0,i=1,2,\cdots,m,\\ \qquad c_i(x)\geqslant 0,i=m+1,\cdots,p,\end{cases}\tag{1.1.6}$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$, $f:\ \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1$, $c_i:\ \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1(i=1,2,\cdots,p)$ 为连续函数, 通常还要求连续可微. x 称为决策变量, $f(x)$ 为目标函数, $c_i(x)$, $i=1,2,\cdots,p$ 为约束函数, $c_i(x)=0$, $i=1,2,\cdots,m$ 为等式约束, $c_i(x)\geqslant 0$, $i=m+1,\cdots,p$ 为不等式约束, 并记等式约束的指标集为 $E=\{1,2,\cdots,m\}$, 不等式约束的指标集为 $I=\{m+1,\cdots,p\}$. min 和 s.t. 分别是英语单词 minimize (极小化) 和 subject to (受约束) 的缩写.

根据实际问题的不同要求, 最优化模型有不同的形式, 但经过适当的变换都可以转换成上述一般的形式. 例如, 对于求目标函数 $f(x)$ 极大的问题

$$\max\ \ f(x)$$

可转换成求 $-f(x)$ 极小的问题

$$\min \quad \phi(x),$$

其中 $\phi(x)=-f(x)$. 又如对于形如

$$c_i(x)\leqslant 0$$

的不等式约束, 可同样转换成上述形式的不等式约束

$$h_i(x)\geqslant 0,$$

其中 $h_i(x)=-c_i(x)$. 还有像

$$a(x)\leqslant b(x)+c$$

的不等式约束, 可通过令 $h(x)=b(x)-a(x)+c$ 转换成

$$h(x)\geqslant 0$$

的不等式约束形式. 通过后面进一步深入的学习, 我们会看到转换在最优化理论和方法的研究和应用中有重要作用.

问题 (1.1.6) 是最优化问题的一般数学表现形式. 只要在问题中存在任何约束条件, 就称为约束最优化问题. 只有等式约束时,

$$\begin{cases}\min\ f(x)\\ \text{s.t.}\ \ c_i(x)=0,\ i=1,2,\cdots,m,\end{cases}$$

称为等式约束最优化问题, 只有不等式约束时,

$$\begin{cases}\min\ f(x)\\ \text{s.t.}\ \ c_i(x)\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m,\end{cases}$$

称为不等式约束最优化问题. 如果既有等式约束, 又有不等式约束, 则称为混合约束优化问题, 或一般约束优化问题, 如问题 (1.1.6). 我们常常把如下形式的经常出现的简单界约束优化问题

$$\begin{aligned}&\min\nolimits_{x\in\mathbf{R}^n}\ f(x)\\ &\quad\text{s.t.}\quad l_i\leqslant x_i\leqslant u_i,\ i=1,2,\cdots,n\end{aligned}\tag{1.1.7}$$

称为盒式约束优化问题 (或有界约束优化问题), 其中 $l_i<u_i\,(i=1,\cdots,n)$ 为常数. 如果问题中无任何约束条件, 则称为无约束最优化问题. 无约束最优化问题的数学模型为

$$\min \quad f(x), \qquad x\in\mathbf{R}^n,\tag{1.1.8}$$

一般简记为

$$\min \quad f(x).$$

无约束最优化问题是最优化的基础, 一则很多实际的最优化问题本身就是无约束最优化问题, 二则许多约束最优化方法都是通过变换把约束最优化问题转换成无约束最优化问题后, 用适当的无约束优化方法求解.

根据模型 (1.1.6) 中函数的具体性质和复杂程度, 最优化问题又有许多不同的类型. 根据决策变量的取值是离散的还是连续的分为离散最优化和连续最优化, 离散最优化通常又称组合最优化, 如整数规划、资源配置、邮路问题、生产安排等问题都是离散最优化问题的典型例子. 离散最优化问题的求解较之连续最优化问题的求解难度更大, 本书只介绍连续最优化的理论与方法. 根据连续最优化模型中函数的光滑与否又分为光滑最优化与非光滑最优化. 如果模型 (1.1.6) 中的所有函数都连续可微, 则称为光滑最优化; 只要有一个函数非光滑, 则相应的优化问题就是非光滑最优化问题. 本书只研究光滑最优化问题的求解方法, 即在本书的大多数章节我们都假定模型中的函数连续可微, 有时二阶或更高阶连续可微. 对于连续光滑的最优化问题, 如果所有函数都是变量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 的线性函数, 则称 (1.1.6) 为线性规划问题. 线性规划问题的一般形式为

$$\begin{aligned}
\min\ & c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \\
\text{s.t.}\ & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \\
& a_{m+1,1}x_1+\cdots+a_{m+1,n}x_n\geqslant b_{m+1}, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+\cdots+a_{pn}x_n\geqslant b_p.
\end{aligned} \tag{1.1.9}$$

即

$$\begin{aligned}
\min_{x\in\mathbf{R}^n}\ & c^{\mathrm{T}}x \\
\text{s.t.}\quad & a_i^{\mathrm{T}}x=b_i,\ i=1,\cdots,m, \\
& a_i^{\mathrm{T}}x\geqslant b_i,\ i=m+1,\cdots,p,
\end{aligned} \tag{1.1.10}$$

其中

$$c=(c_1,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}},\ a_i=(a_{i1},\cdots,a_{in})^{\mathrm{T}},\ i=1,\cdots,p.$$

有时对变量 x 还有非负的约束

$$x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,n,$$