大专
理科
教材

数学分析

Shuxue Fenxi

下册

• 河南教育出版社

大专理科教材

数学分析

下册

河南省高等学校教材编写组

河南教育出版社

大专理科教材
数学分析
下　册
河南省高等学校教材编写组
责任编辑　　侯耀宗
河南教育出版社出版
河南新安县印刷厂印刷
河南省新华书店发行
787×1092毫米 32开本 14.625印张 362千字
1987年10月第1版　1987年10月第1次印刷
印数1—3580册
统一书号7356·387　定价3.10元

目　　录

第十一章　数 项 级 数

从本章开始到第十四章，我们将讨论一个新的课题——无穷级数。级数概念在中学数学课程中已经遇见过，例如无穷等比级数

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^n+\cdots$$

由于理论与实际问题的需要，现在我们来系统地研究一般级数，建立无穷级数的理论。因为它是学习许多其它课程的重要基础，同时也是解决许多实际问题的重要工具，我们应该很好地掌握它。

§11.1　级数的收敛性及其基本性质

1.基本概念

设u_1，u_2，$\cdots u_n\cdots$为一个给定的数列，形如下面的式子

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

称为**无穷数项级数**，简称**级数**，记为

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

级数(1)的第n项u_n，称为级数的**通项**。

我们自然要问：这样把无穷多个数形式地相加起来，这种式子是否具有“和数”呢？这个“和数”的确切意义又是什么？为了回答这个问题，我们先引进下面概念。

级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的前 n 项和：

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$$

称为级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的**n项部分和，简称部分和。**这样对于任何一个级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，我们都可以作出它的相应部分和数列$\{S_n\}$：

$$S_1=u_1,\ S_2=u_1+u_2,\ \cdots,\ S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,\ \cdots \quad (1)$$

于是，要回答级数(1) 是否具有"和数"的问题，就需要去考察它的部分和数列是否有极限，因此，我们引入如下定义。

定义1 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和数列为$\{S_n\}$，若极限

$$\lim_{n\to+\infty}S_n$$

存在，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$**收敛**，并称此极限值S（有限数）为级数的**和数**，记为

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S$$

若部分和数列$\{S_n\}$的极限不存在，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$**发散**，此时，我们说级数没有和。

当级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛时，则称

$$r_n=S-S_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k$$

为级数的**余和**。

例1 讨论等比级数$\sum_{n=1}^{\infty}ar^n$的敛散性，其中a是一个不为零的常数，r为公比。

解 (i) 当$|r|\neq1$时，级数的部分和为：

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

由于当$|r|<1$时，$\lim\limits_{n\to+\infty}r^n=0$；当$|r|>1$时，$\lim\limits_{n\to+\infty}r^n=\infty$，所以

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\begin{cases}\dfrac{a}{1-r} & \text{当}\ |r|<1\text{时}\\ \infty & \text{当}\ |r|>1\text{时}\end{cases}$$

由此可见，当$|r|<1$时，等比级数收敛，其和为$\frac{a}{1-r}$；当$|r|>1$时，等比级数发散。

(ii) 当$|r|=1$时，若$r=1$，则原等比级数变为：

$$a+a+\cdots+a+\cdots$$

其部分和$S_n=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n\text{个}}=na$，当$n\to+\infty$时，$S_n=na$极限不存在，所以级数发散。

若$r=-1$时，原等比级数变为：

$$a-a+a-a+\cdots+(-1)^{n-1}a+\cdots$$

其部分和：

$$S_n=\begin{cases}0 & \text{当}\ n\ \text{为偶数时}\\ a & \text{当}\ n\ \text{为奇数时}\end{cases}$$

显然，当$n\to+\infty$时，S_n极限不存在，所以级数发散。

结论 当$|r|<1$时，等比级数收敛，其和数为$\frac{a}{1-r}$；当$|r|\geqslant 1$时，等比级数发散。

例2 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$收敛，其和数为1。

证明 因为$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，所以有

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}$$

由于$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$,

$$故\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$$

最后，我们再强调一下级数收敛性与数列极限的关系，从定义1看出：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的收敛性及其和数问题，归结为它的部分和数列$\{S_n\}$的极限存在性及其极限值问题。因此，级数的收敛性问题就转化为数列极限存在性问题。反之，对于任一给定的数列$\{S_n\}$，也可以作出它的一个相应级数，使得此级数的部分和数列正好为给定的数列$\{S_n\}$。事实上，我们只需取

$$u_1=S_1,\ u_2=S_2-S_1,\ \cdots,\ u_n=S_n-S_{n-1},\ \cdots$$

显然，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和数列就是所给的数列$\{S_n\}$，如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛其和为$S$，那么数列$\{S_n\}$的极限就存在，其极限值也为$S$。这样就把数列的极限存在性及其极限值问题转化为级数的收敛性及其和数问题。

2. 基本性质

前面已经指出：关于级数收敛问题与数列极限存在问题是可以互相转化的。这样，我们就能用数列极限的有关知识来研究级数的有关问题。现在，给出如下一些基本性质。

定理1 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，a 为任一常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} au_n$ 也收敛，且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} au_n = a\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

证明 因 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$，其部分和列为 S_n，则有

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S$$

又设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} au_n$ 的部分和为 S_n'，显然 $S_n' = aS_n$，根据数列极限的性质知：

$$\lim_{n\to+\infty} S_n' = \lim_{n\to+\infty} aS_n = aS$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} au_n = aS = a\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

定理2 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛，且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

读者可用数列极限的运算性质自证。

定理3 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则对其项任意加括号后所得的级

数也收敛，且其和不变。

证明 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和列为S_n，且$\lim_{n\to+\infty}S_n=S$，对级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的项任意加括号后所得级数为：

$(u_1+u_2+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+u_{n_1+2}+\cdots+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_{k-1}+1}+u_{n_{k-1}+2}+\cdots+u_{n_k})+\cdots$它的部分和记为$\overline{S}_k$

$\overline{S}_1=u_1+u_2+\cdots+u_{n_1}=S_{n_1}$

$\overline{S}_2=(u_1+u_2+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+u_{n_1+2}+\cdots+u_{n_2})=\overline{S}_{n_2}$

……

$\overline{S}_k=(u_1+u_2+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+u_{n_1+2}+\cdots+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_{k-1}+1}+u_{n_{k-1}+2}+\cdots+u_{n_k})=S_{n_k}$

……

显然，$\{\overline{S}_k\}$是$\{S_n\}$的一个子数列，故$\lim_{k\to+\infty}\overline{S}_k=S$，这说明任意加括号后所得的级数也收敛，其和数仍为$S$。

注意 一个级数对其项加括号后所得级数收敛，但不能断定原来未加括号的级数也收敛，例如级数

$$1-1+1-1+1-1+\cdots \tag{2}$$

加括号后所得级数为

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$

显然上述级数收敛于零，但原来未加括号的级数（2）却是发散的。

定理4 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$u_n\to0$（$n\to+\infty$）

证明 设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和列为S_n，且$\lim_{n\to+\infty}S_n=S$，由于

$$u_n=S_n-S_{n-1}$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}(S_n-S_{n-1})=S-S=0$$

注意 由上面定理得知：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的通项$u_n$不趋于零，那么此级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$一定发散，这就给出了判别级数发散的一个方法。例如级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$，由于$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$发散。但要注意：级数通项趋于零只是级数收敛的必要条件，而不是充分条件。例如级数

$$1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}_{\text{共 2 项}}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}_{\text{共 3 项}}+\cdots+\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{\text{共 }n\text{ 项}}+\frac{1}{n+1}+\cdots$$

它的通项$u_n\to0(n\to+\infty)$，但此级数发散。这是因为，假若该级数是收敛的，由定理 3 知，加括号后所得的级数

$$1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\cdots$$

也应该是收敛的，但在上述级数中，每个括号内的数相加后等于1，因而它是发散的。

定理5 在级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$中任意去掉或增加有限项后所得的新级数敛散性不变（即是说：原来级数收敛，所得的新级数也收敛；原级数发散，所得的新级数也发散）。

证明　设从级数$\sum\limits_{n=1}u_n$中去掉p项后所得的新级数记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，以$S_n'$与$S_n''$分别表示它们的部分和列，又设从$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$中去掉的$p$项为：$u_{n_1}$，$u_{n_2}$，……，$u_{n_p}$，记$A_p=u_{n_1}+u_{n_2}+\cdots+u_{n_p}$，因为只去掉有限项，所以必有充分大的自然数$n$，使得去掉的$p$项都包含在级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的前$n$项之中，显然，

$$S'_{n+p}=A_p+S_n''$$

而A_p是与n无关的数，因此，极限$\lim\limits_{n\to+\infty}S'_{n+p}$与$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n''$或同时存在或同时不存在，这表明了级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$或同时收敛或同时发散。

对于任意增加有限项的情形，读者自证。

3.柯西收敛准则

判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的收敛性，只需要判别它的部分和列$\{S_n\}$的极限是否存在。我们知道，判别数列极限存在有柯西准则，即$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$存在的充分必要条件是：任给$\varepsilon>0$，存在$N>0$，当$n>N$时，对于任何自然数$p$，都有

$$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$$

由于S_n是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和列，则有

$$S_{n+p}-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}$$

因此，就得到级数中相应的柯西收敛准则。

定理6 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充分必要条件是：任给$\varepsilon>0$，存在$N>0$，当$n>N$时，对于任何自然数$p$，都有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon$$

注意 定理4和定理5都是柯西收敛准则的直接推论。

例3 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$收敛。

证明 对于任何自然数p，有

$$\begin{aligned}|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}| &= \left|\frac{(-1)^n}{n+1}+\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}+\cdots+\frac{(-1)^{n+p-1}}{n+p}\right| \\ &= \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{n+p} \\ &< \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

所以，任给$\varepsilon>0$，存在$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，当$n>N$时，对于任何自然数$p$，都有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\frac{1}{n+1}<\varepsilon$$

由柯西收敛准则知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$收敛。

例4 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散。

证明 只需证：存在某个$\varepsilon_0>0$，对于任意的自然数N，总有某个$n_0>N$及p_0，使得

$$|u_{n_0+1}+u_{n_0+2}+\cdots+u_{n_0+p_0}|>\varepsilon_0$$

成立。事实上，我们考虑

$$\begin{aligned}|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}| &= \left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\right| \\ &> \underbrace{\frac{1}{n+p}+\frac{1}{n+p}+\cdots+\frac{1}{n+p}}_{\text{共 } p \text{ 项}} \\ &= \frac{p}{n+p}\end{aligned}$$

显然，取$\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，对于任意自然数$N$，总可选取到这样的$n_0$，使$n_0>N$，选取$p_0=n_0$，则有

$$\begin{aligned}|u_{n_0+1}+u_{n_0+2}+\cdots+u_{n_0+p_0}| &> \frac{p_0}{n_0+p_0}=\frac{n_0}{n_0+n_0}=\frac{1}{2} \\ &= \varepsilon_0\end{aligned}$$

故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散。

习题 11.1

1. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots$

(2) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$

(3) $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\cdots$

(4) $0.001+\sqrt{0.001}+\sqrt[3]{0.001}+\cdots$

(5) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}+\cdots$

2.利用柯西收敛准则判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$

(2) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$

3.确定使下列级数收敛的 x 的范围：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+x)^n}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{nx}$

4.设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足下列条件：

(i) $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty}(u_{2k-1}+u_{2k})$ 收敛

证明 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

§11.2 正项级数

如果 $u_n\geqslant 0(n=1, 2, \cdots)$，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为**正项级数**，例如，