

上海普通高校“九五”重点教材

Computational Solid Mechanics

计算固体力学

(第二版)

刘正兴 孙雁 王国庆 陶昉敏 编著



上海交通大学出版社

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

034
L727-2

上海普通高校“九五”重点教材
世界银行贷款资助项目

计算固体力学

第二版

刘正兴 孙雁 王国庆 陶昉敏 编著

上海市教育委员会组编

上海交通大学出版社

内 容 简 介

本书以能量原理作为理论基础,以变分法作为数学工具,对有限单元法的理论、建模、列式与求解作了详尽的论述,同时也介绍了基于结构力学和弹性力学建立有限元模型的一般方法。在此基础上,逐个推导了杆、梁、板、壳和块单元,重点介绍了目前工程中广泛应用的矩阵位移法。以基于虚功原理的协调模型为重点,对基于修正的能量原理的各类杂交模型也作了适当的介绍。

本书对固体力学一些新兴领域中的数值分析方法,如弹性压电材料与智能结构分析,流固耦合及哈密顿体系等进行了由浅入深的论述。

本书还结合具体问题,对边界元法、半解析法、有限条法作了简单的介绍。

本书是在参考了大量资料的基础上,结合作者几十年的研究成果汇编而成,可作为机械、土木、船舶与海洋、航空航天等工程专业本科生和研究生教材,也可作为工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

计算固体力学/刘正兴等编著. —2版. 上海:上海
交通大学出版社,2010

ISBN 978-7-313-02457-2

I. 计... II. 刘... III. 计算固体力学 IV. 034

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 215704 号

计算固体力学

第二版

刘正兴 等编著

上海市教育委员会 组编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 951 号 邮政编码 200030)

电话:64071208 出版人:韩建民

上海交大印务有限公司印刷 全国新华书店经销

开本:787mm×1092mm 1/16 印张:27 字数:661千字

2001年2月第1版 2010年2月第2版 2010年2月第3次印刷

印数:2030

ISBN 978-7-313-02457-2/O 定价:48.00元

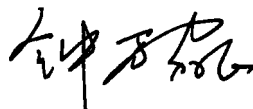
版权所有 侵权必究

第一版序

计算机、通信卫星的出现将社会推向了信息化时代,而科技也从过去的以实验、理论为其两大支柱的体系发展成为实验、理论、计算为其三大支柱的体系。计算力学、有限元的出现推动了大规模科学与工程计算的发展。计算力学作为力学学科中一个重要的、充满活力的分支,将结构力学、弹塑性力学、结构动力学、板壳理论及稳定性理论和数学计算方法、计算机技术互相结合、渗透,融为一体,极大地提高了力学解决各种工程实际问题的能力,更拓宽了力学的应用范畴。计算力学已成为工程专业的一门重要课程。

本书的作者刘正兴教授早在1980年就于上海交通大学开设了这门课程,并于1985年出版了教材。本书就是在原教材的基础上,将作者积累的教学经验和研究成果进行重新总结、修改、补充而成。它不仅介绍了计算固体力学中必需的基础理论及专业知识,同时对目前力学领域中的研究热点,如哈密尔顿体系研究和智能材料研究等的最新成果作了较为详细的介绍。本书还包含了作者的研究成果和心得体会。

本书的内容较为系统而广泛。这本书的出版,为高等院校工程专业的学生提供了一本良好的教材,同时也为从事相关学科的教学和研究人员提供了一本有价值的参考书。



2000年8月

前 言

有限单元法是工程结构的数值分析方法中最重要的方法之一,其理论基础是能量原理。就是从变分原理出发,通过分区插值,把二次泛函(能量积分)的极值问题化为一组线性代数方程。本书以能量原理作为理论基础,以变分法作为数学工具,对有限元的理论、建模、列式与求解作了详尽的论述,同时也介绍了基于结构力学和弹性力学建立有限单元模型的一般方法。在此基础上,逐个推导了杆、梁、板、壳和块单元,重点介绍了目前工程中广泛应用的矩阵位移法。以基于虚功原理的协调模型为重点,对基于修正的能量原理的各类杂交模型作了适当的介绍。

在单元及其集成的基础上,本书对固体力学一些主要领域中的数值分析方法进行了由浅入深的论述,即从线性弹性问题、基于有限变形理论的几何非线性问题、热弹塑性问题到弹性压电材料与智能结构分析;从静力问题、动力问题、弹性波的传播到流固耦合,其中有机地结合各类问题引入了线性方程组的解法、矩阵广义特征值的各类解法、动力响应问题的模态综合、时间历程响应、暂态历程的精细积分、共轭辛正交关系等一些数学方法。

迄今为止,各类工程的结构分析几乎全部采用有限单元法,但是在科研领域中,边界元法、半解析法、有限条法还是很有用的,本书结合具体问题对此也作了一些简单的介绍。

本书是在参考了大量资料的基础上,结合作者几十年的研究成果汇编而成的。在上海交通大学、南京航空航天大学等工科院校作为力学和飞机工程专业的本科生和研究生教材使用了近十年,又逐年修改补充完善。本书可作为机械、土木、船舶与海洋、航空航天等工程专业本科生和研究生教材,也可作为工程技术人员的参考书。

由于编者水平有限,书中不当之处,恳请读者不吝指正。

编著者

2009年12月

目 录

绪论	1
一、结构分析方法	1
二、结构分析的领域	2
三、有限单元法	3
参考文献	4
第一章 变分法基础	5
第一节 引言	5
一、最速降线问题	5
二、短程线问题	6
三、等周问题	6
第二节 变分及其特性	6
一、泛函的定义	6
二、变分	7
三、泛函的连续	8
四、泛函的变分	8
五、泛函的驻值	9
第三节 欧拉方程	10
一、变分法的基本预备定理	10
二、泛函极值问题的求解	11
三、欧拉方程的建立	13
第四节 依赖于高阶导数的泛函	15
一、欧拉-泊松方程	15
二、例题	16
第五节 多个待定函数的泛函	17
第六节 含有多个自变量的函数的泛函	18
一、二变量问题	18
二、多变量问题	20
第七节 条件极值的变分问题	24
一、函数的条件驻值问题	24
二、泛函在约束条件 $\phi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 (i=1, 2, \dots, k)$ 下的极值问题	24
三、等周问题	26
参考文献	28

第二章 能量原理	29
第一节 引言	29
一、矢量的微分和积分	30
二、对称正定矩阵的定义和性质	30
三、对称正定矩阵的充分必要条件	30
四、二次型的微分和积分	31
第二节 小位移弹性理论的基本方程	31
一、平衡方程	31
二、应变-位移关系	31
三、应力-应变关系	32
四、边界条件	32
第三节 功和余功,应变能和余应变能	33
一、功	33
二、余功	35
三、应变能	36
四、余应变能	36
第四节 虚功原理	37
第五节 基于虚功原理的近似解法	41
一、瑞利-里兹法	41
二、伽辽金法	42
三、例题	43
第六节 基于虚功原理的能量定理	45
一、最小位能原理	45
二、卡氏第一定理	47
三、单位-位移定理	48
第七节 余虚功原理	48
第八节 基于余虚功原理的能量定理	51
一、最小余能原理	51
二、卡氏第二定理	52
三、单位-载荷定理	53
第九节 附加定理	53
一、克拉皮隆定理	53
二、贝谛定理	54
三、麦克斯韦尔互换定理	54
第十节 广义变分原理	54
一、散度定理	54
二、不连续情况	57
三、广义原理	58

四、派生的变分原理	61
第十一节 传统变分原理的小结	63
第十二节 修正的变分原理	64
一、从最小位能原理推导修正的变分原理	64
二、从最小余能原理推导修正的变分原理	69
参考文献	70
第三章 协调模型分析	71
第一节 建立协调模型的一般方法	71
一、用单位-位移定理推导	72
二、用卡氏第一定理推导	74
三、由求解微分方程来推导	74
四、用最小位能原理推导	76
五、从柔度矩阵推导刚度矩阵	77
六、小结	80
第二节 梁单元	80
一、轴向刚度	81
二、扭转刚度	81
三、 xy 平面内的弯曲刚度	82
四、 xz 平面内的弯曲刚度	83
五、主轴坐标系内的力-位移关系式	83
六、节点坐标系内的力-位移关系式	84
七、基准坐标系内的力-位移关系式	87
第三节 矩阵位移法	88
一、建立基本方程	89
二、边界条件和方程的求解	91
三、单元内力分析	92
第四节 平面三角形单元	93
一、位移函数	93
二、应变-位移关系	94
三、应力-应变关系	94
四、单元刚度矩阵	95
五、收敛性的条件	95
第五节 载荷的移置	97
第六节 矩形薄板单元	99
一、薄板弯曲问题的有限单元法	99
二、位移模式	100
三、应变-位移关系	102
四、应力-应变关系	102

五、刚度矩阵和平衡方程	102
六、内力	106
七、载荷移置	106
八、收敛性的判别	107
九、例题	108
第七节 三角形薄壳单元	110
一、面积坐标	110
二、三角形薄板单元	112
三、三角形薄壳单元	116
第八节 改善刚度矩阵的方法	119
一、静凝聚方法	119
二、复合单元(子结构)	121
三、协调的三角形薄板单元	122
四、四边形板壳单元	125
第九节 过渡梁单元	125
第十节 轴对称问题的有限单元	128
一、弹性力学中的轴对称问题	128
二、轴对称单元	129
三、讨论	131
参考文献	131
第四章 等参单元及杂交元	133
第一节 形函数	133
一、形函数的定义	133
二、典型的形函数	134
第二节 坐标变换	137
一、一维单元的转变	137
二、二维单元的转变	138
三、三维单元的转变	140
第三节 位移和应变	140
一、位移函数	141
二、应变-位移关系	142
第四节 矢量运算	143
一、矢量的乘法运算	144
二、平面曲线坐标系中的微元面积	146
三、空间曲面的微元面积	146
四、空间微元体积	147
第五节 刚度矩阵和节点载荷	148
一、刚度矩阵	148

二、等效节点载荷	149
第六节 数值积分的应用	149
第七节 三角形、四面体和三棱体等参单元	154
一、三角形平面单元	154
二、体积坐标	156
三、四面体单元	157
四、三棱体单元	160
第八节 畸形等参单元	161
第九节 厚板和厚壳单元	164
一、曲边厚板单元	164
二、曲面厚壳单元	170
第十节 修正的余能原理和杂交应力元	179
一、修正的余能原理	179
二、杂交应力模型的一般公式	180
三、例题	183
参考文献	185
第五章 杆系结构的程序设计	186
第一节 简介	186
第二节 输入与输出	187
一、输入数据	187
二、输出数据	189
第三节 单元刚度矩阵的形成	190
第四节 单元刚度矩阵的坐标转换	191
一、坐标转换矩阵	191
二、总体坐标系下的单元刚度矩阵	193
第五节 结构刚度矩阵的形成	195
一、二维结构刚度矩阵的形成	195
二、一维存储的结构刚度矩阵	196
第六节 约束处理	200
一、划行划列法	200
二、主对角元置 1 法	200
三、主角元置大数法	201
第七节 解线性方程组	201
一、系数矩阵的分解	202
二、载荷列阵的分解	205
三、回代求解	206
四、解方程的子程序	207
第八节 单元节点力和应力的计算	209

一、求单元的节点位移	210
二、求单元局部坐标系中的节点位移	210
三、计算单元节点力和应力	210
四、约束反力的计算和节点的平衡检查	211
第九节 空间桁架有限元分析程序	212
第十节 刚架结构的程序设计	221
一、输入数据	224
二、梁元程序设计	225
参考文献	229
第六章 几何非线性有限元	230
第一节 小位移弹性问题中的增量变分原理	230
一、增量问题中的基本方程	231
二、虚功原理的增量形式	232
三、最小位能原理的增量形式	232
四、广义原理和胡海昌-鹭津原理的增量形式	233
五、汉林格-赖斯纳原理的增量形式	235
六、最小余能原理的增量形式	235
第二节 有限变形的基本理论	236
一、有限变形	236
二、应力	246
三、形变和应变的变分	249
四、应变、应力的矢量表达式	250
五、虚功原理	252
第三节 有限变形分析中的有限单元	253
一、基于增量位能原理的有限元列式	253
二、稳定性分析	258
三、几何非线性问题的工程分析方法	261
四、柔性梁单元	262
五、柔韧板单元	265
六、例题	268
参考文献	271
第七章 材料非线性的有限单元法	272
第一节 弹塑性应力-应变关系	272
一、材料的塑性性质	272
二、理想化的应力-应变曲线	272
三、多值性和不可压缩性	274
四、屈服准则和硬化条件	275

五、应力和应变关系	278
六、 H' 的确定	280
七、弹塑性矩阵的表达式	282
第二节 线性化的逐步增量法	285
一、增量变刚度法	286
二、增量初应力法	289
三、增量初应变法	293
四、3 种方法的比较	296
第三节 热弹塑性问题	298
一、材料性质与温度无关的情况	298
二、材料性质依赖于温度的情况	300
三、稳定温度场的计算	302
四、残余应变和残余应力的计算	303
第四节 非线性问题的一般解法	304
一、线性增量法	304
二、增量迭代法	305
三、修正的增量迭代法	307
四、一步修正的增量法	307
五、其他方法	308
参考文献	308
第八章 动力问题的有限单元法	309
第一节 弹性系统的动力方程	309
一、达朗贝尔原理和动力方程	309
二、拉格朗日的动力方程	310
第二节 质量矩阵和阻尼矩阵	311
一、协调质量矩阵	311
二、集中质量矩阵	311
三、典型单元的质量矩阵	311
四、阻尼矩阵	314
第三节 结构的自振特性	315
一、结构无阻尼自由振动	315
二、自由振动的实例	316
三、正交性定理	318
第四节 矩阵特征值问题的求解方法	319
一、有关矩阵特征值问题的一些结果	319
二、逆迭代法	321
三、广义雅可比法	322
四、子空间迭代法	323

第五节 结构的动力响应	325
一、振型叠加法	325
二、直接积分法	326
三、暂态历程的精细计算方法	327
第六节 弹性结构在流体介质中的耦合振动	330
一、流体动压力的计算原理	330
二、流固接触面上的动压力	331
三、结构等效节点载荷	332
四、结构动力方程	334
参考文献	334
第九章 弹性力学求解的对偶体系及半解析法	335
第一节 弹性力学基本方程	335
一、应力与平衡方程	335
二、应变与应变协调方程	336
三、线弹性本构关系	336
第二节 弹性力学变分原理	338
一、最小总势能原理	338
二、二类变量的变分原理与最小总余能原理	339
三、三类变量的变分原理	339
四、互等原理	340
第三节 弹性力学矩形域平面问题	340
一、基本方程	340
二、导向对偶体系	341
三、分离变量、横向本征解	343
四、共轭辛正交归一关系	344
五、展开定理	345
第四节 本征解	345
一、零本征值的解, 圣维南解	345
二、非零本征值的解	349
第五节 弹性平面矩形域问题的解	353
第六节 弹性薄板弯曲问题	356
第七节 平面弹性与薄板弯曲问题的相似性	359
第八节 薄板弯曲与平面弹性问题的多类变量变分原理	363
一、薄板弯曲的 H-R 变分原理及类 H-R 变分原理	364
二、平面弹性的 H-R 变分原理及类 H-R 变分原理	364
三、薄板弯曲的 H-W 变分原理及类 H-W 变分原理	364
四、平面弹性的 H-W 变分原理及类 H-W 变分原理	365
五、薄板弯曲多类变量变分原理	365

六、平面弹性多类变量变分原理	369
第九节 半解析有限元简介	371
一、半解析有限单元	372
二、解法简介	376
三、结束语	378
参考文献	378
第十章 压电材料的有限元法和边界元法以及边界轮廓法	379
第一节 智能材料和压电材料的应用背景	379
第二节 压电材料的本构方程及材料常数	379
一、压电材料的工作机理	379
二、压电材料的基本方程	380
三、压电方程中的材料常数	383
四、闭路与开路、夹持与自由材料常数之间的区别	384
第三节 压电有限元理论	386
一、压电结构动力学方程	386
二、非协调单元理论	387
三、特征值分析	389
四、无量纲化的处理	389
第四节 压电边界元理论	390
一、压电材料的基本解	390
二、压电材料的边界积分方程的推导	393
三、边界元法的数值计算	394
第五节 压电材料的边界轮廓法	400
一、边界轮廓法简介	400
二、压电边界轮廓法边界积分方程与理论	401
三、边界轮廓法的形函数	403
四、边界单元的形式和势函数的确定	404
五、边界轮廓法的离散方程	406
六、内点位移及应力的计算	407
附录 1	408
附录 2	410
参考文献	413

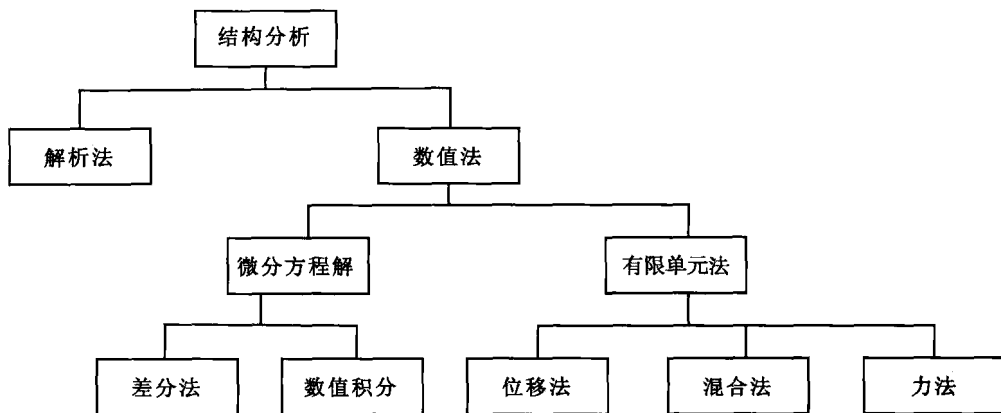
绪 论

一、结构分析方法

“工程力学”这门学科,顾名思义就是要用“力学”来解决工程实际问题。力学本身是以数学为基础的应用物理学中的一个重要分支,就是以力的观点对工程结构进行分析。现代结构工艺发展,要求对结构系统的分析具有更高的准确度和速度。

准确度的要求就是要严格证明结构是安全可靠的,在满足安全性的前提下使结构重量最轻,工艺最合理。速度的要求是由下述因素决定的,即在设计的早期阶段,就需要对结构的力学性态有充分的了解,以便在决定最后的设计和结构投产之前,对结构作必要的修改。

简言之,力学工作者的任务是:从力学观点进行结构设计;对已设计好的结构进行力学分析。统称为结构分析。结构分析的方法可分为两组,如下图所示:



解析法所受到的限制是众所周知的。只有在极少数的特殊情况下才有闭合形式的解;对于某些简单结构才能找到近似解。对于绝大多数工程结构,始终必须使用数值解法。

结构分析的数值方法大致可以分为两类:

- (1) 位移或应力的微分方程的数值解。
- (2) 建立在离散单元理想化基础上的矩阵方法——有限单元(也称为有限元)法。

在第一类中,对一特定的结构形式,可用有限差分法或用直接数值积分解微分方程。在这种近似中,分析是建立在微分方程数学近似的基础上的。然而,实际上的限制使这些方法只能用在简单的结构上。虽然在有限差分或数值积分的各种运算中,能够引入求解控制方程用的矩阵符号和矩阵代数,但一般来讲,这种方法不能称为“矩阵方法”,因为在那里,矩阵在建立分析的公式中,并不是本质的因素。所谓“离散”也仅仅是用“差分”代替“微分”,属于微分方程的离散。

在第二类中,整个结构分析的所有阶段,始终用矩阵代数来发展。首先,将连续结构理想化为具有假定位移或应力分布形式的有限数目的单元的集合体,然后再依据这些单元在连续

点上的力的平衡条件及位移协调条件,将这些单独假设的近似位移和应力分布组集起来就得到整个的解。基于这种近似的方法很适宜分析复杂结构。这种方法包含了大量的线性代数数量,它们必须组织成一个运算系列,为了实现这个目的,矩阵代数是一个很适宜的方法。用矩阵代数建立的分析公式,是最适宜于在计算机上运算,而且能很容易地对所要求的数据进行系统的编辑。这种建立在离散单元理想化基础上的矩阵方法,后来被称之为“有限单元法”,它是“计算力学”的先驱,也是最基本的核心部分。

有几个互相补充的矩阵方法:

- (1) 矩阵位移法,采用“协调模型”。
- (2) 矩阵力法,采用“平衡模型”。
- (3) 混合法,采用“混合模型”。

二、结构分析的领域

从本质上讲,结构分析就是确定结构在静力和动力两种条件下,受指定载荷、温度和约束作用的应力和位移分析。然而,为了保证结构的整体性和有效性,还必须探求其他很多领域,例如:

应力分布;
位移分布;
结构稳定性;
热弹性,热弹塑性;
塑性,蠕变,蠕变屈曲;
自振频率和振型;
气动弹性(颤振,反逆;变形扩大等);
气动加热和气动热弹性(例如,气动加热引起的刚度损失问题);
动力响应;
应力集中;
疲劳和断裂,裂缝扩展;
结构的优化设计等一系列问题。

在计算力学出现以前,都是将结构划分成杆、梁、板、壳、块等不同类型的部件,然后按照各自研究的对象设置了不同的课程,例如材料力学、结构力学主要研究杆件系统;板壳力学和弹性力学则研究板、壳和三维弹性体。这是因为在计算机应用于结构分析之前,对这些对象的处理必须各行其是,自成体系,即使同是杆系结构,研究者为了处理各种类型的杆系结构,也必须寻找各种不同的方法。问题都出在计算工作上,集中在怎样才能克服困难算出具体结果来。现在计算机化了的力学,就可以用同一种方法处理杆、板、壳和连续体。可以是一个各种构件的组合物。结构本来是组合的,一个建筑物,一条船,一架飞机,都是杆、板、壳和连续体的组合。过去是一样一样分开来处理,现在则可以比较真实地按结构本来的面貌来进行研究了。

计算力学的出现,使结构力学的任务也发生了很大变化,它不仅分析和说明结构,还进一步设计和改造结构。

固体力学的基础理论早已建立。平衡、连续、物性三者的统一产生了力法和位移法,还有各种能量原理和变分法。过去由于计算方面的困难,各种特殊的计算方法层出不穷,而基础理

论的作用都没有得到很好的发挥。计算力学的出现使计算方法趋于简单、统一,使力学工作者可以更深入地去研究基本理论。

结构的计算模型关系到力学工作能否真实地反映实际。以往总是把空间问题简化为平面问题,甚至简化为一维问题来处理;把非线性的问题简化为线性的;把不连续的简化为连续的;把动态的化为静态的。改来改去,无非是使问题好算一点,而计算力学的出现就可以处理复杂得多的计算模型,更能反映真实情况。

总而言之,计算机技术引入而产生了计算力学,使力学在理论上更统一和更有活力,应用上更方便和更广泛,不仅能够更真实和更可靠地反映实际,而且使解决问题的速度和周期大大地加快。计算固体力学目前已形成了横贯许多学科的局面,它在国民经济中的作用将更加富有成效。它的研究领域将向纵深发展。

三、有限单元法

有限单元法是一个解场问题的近似方法。按照这个方法,将一个 V 域分割成有限数目的、互不重叠的,称之为“单元”的子域 V_n 。首先,在每个单元内找一个近似解,并用一个有限数目的未知参数来描述单元的特征。然后,应用一个适当的过程,将各个单元的关系式集成一组方程,用来解这些未知参数。当单元的尺寸变得越来越小时,这个场变量的离散化误差逐渐消失就可逼近精确解。这些未知参数通常是场变量在有限个数的点(称之为节点)上的值,它可以在单元的边界上或单元的内部。近似解可以仅在每个单元内内插这些场变量求得。单元的特征和对这些未知参数建立的这组方程,通常是依据于某个变分原理的泛函的驻值条件。这变分公式等价于原来的场方程。当这变分是根据最小原理时,这些未知参数也可以由一个系统的数学搜索技术来确定,以代替一组方程的求解。

有限单元法在国内外的的发展大致可分三个阶段。开始阶段,在20世纪50年代中期,美国波音公司工程师特纳(M. J. Turner)等人^[1]采用三角形和矩形单元,把结构力学中的位移法扩大到平面应力问题应用于飞机结构分析。在这些公式的推演中,每个单元的特性用一个单元刚度矩阵表示,它把在这单元的有限数目的节点上的力和节点位移联系起来。阿吉里斯(Argyris)^[2]撰写的能量定理和矩阵方法的综合性论文,也为推导平面应力矩形板单元刚度矩阵提供了理论基础。他们的这些工作,为有限单元法的形成作出了重要的首创的贡献。

到20世纪60年代初期,人们逐渐认识到,这样一种有限元法,是一个依据于虚功原理的广义里兹(Ritz)法。从历史上说,库兰特(Courant)^[3]已经在每个三角形单元总成内,用假定的线性分布的应力函数,提出一个圣维南(Saint-Venant)扭转问题的近似解。然而,有限元法最突出的优点是它只要求在各个单元范围内作出合理的假定的位移函数,而不必像在里兹法中,假定的位移模式必须伸展到整个域内。因此可以说,有限元法是一种对能量泛函作分块近似的里兹法,也就是在各个单元的界面上可以放松某种连续要求的变分原理,它比传统的里兹法要通用、灵活得多。当有限元法有了这样的理论依据后,研究者们便自觉地以各种形式的变分原理为基础,建立了多种形式的有限元。例如,基于虚功原理的协调单元;基于修正位能原理的杂交位移单元,等等。反过来,由于有限单元的成功应用和发展,也推动了广义变分原理的研究。在理论上,从变分原理建立起来的各种单元都是可行的。当然,从应用角度看,收敛有快慢之分,精度有高低之别,这个时期可以说是建立各种有限元的风行时期,到20世纪60年代末达到了高潮。