本书编写组

上海科学技术出版社

高中理科中理科题

GAOZHONG
LIKE
ZICETI

高中理科自测题

本书编写组

上海科学技术出版社

高中理科自测题

本书编写组

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行　浙江诸暨印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　印张 5.375　　字数 118,000

1985年12月第1版　1985年12月第1次印刷

印数1—50,000

统一书号：13119·1374　　定价：0.74元

目　　录

·数学部分·

·物理部分·

·化学部分·

·生物部分·

数学部分

数学 （A级）

一、（本题共24分）**选择题** 本题共有6个小题，每小题都给出代号为A、B、C、D的四个结论，其中只有一个结论是正确的，把正确结论的代号写在题后的括号内，多选算错。

1．$a>b$ 是 $a^2>b^2$ 的

（A）必要条件；（B）充分条件；（C）充要条件；（D）既非充分又非必要条件。 答 [ ]

2．集合 $\{x \mid x^2-8x+15\leqslant 0,\ x\in N\}$ 的所有子集个数是

（A）9个；（B）8个；（C）7个；（D）6个。

答 [ ]

3．给出下面四个命题

（1）一条直线上两点到一个平面的距离相等，则这条直线和平面平行；

（2）没有公共点的两条直线叫做异面直线；

（3）如果两条直线 a、b 都和第三条直线垂直，则有 $a\parallel b$；

（4）有两个面平行，其他的面都是梯形的多面体叫做棱台。

那么在上述命题中，真命题的个数是：

（A）0个；（B）1个；（C）2个；（D）3个。

答 [ ]

4．方程 $|x|+|y|=1$ 在直角坐标系中所围成的面积是

（A）4；（B）π；（C）2；（D）3。 答 [ ]

5. 若 $a>b>1$，且 $0<c<1$，则 $\log_{\frac{1}{a}}c$、$\log_{\frac{1}{b}}c$、$\log_b c$ 的大小次序是

(A) $\log_{\frac{1}{a}}c>\log_{\frac{1}{b}}c>\log_b c$;

(B) $\log_{\frac{1}{b}}c>\log_{\frac{1}{a}}c>\log_b c$;

(C) $\log_{\frac{1}{b}}c>\log_b c>\log_{\frac{1}{a}}c$;

(D) $\log_{\frac{1}{a}}c>\log_b c>\log_{\frac{1}{b}}c$。　　答 [　　]

6. 函数 $y=\cos(\sin x)$ 是增函数，则 x 属于

(A) 第Ⅰ和第Ⅳ象限；(B) 第Ⅱ和第Ⅳ象限；

(C) 第Ⅲ和第Ⅳ象限；(D) 不同于A、B、C答案。

答 [　　]

二、(本题共36分)填空题

1. 已知：$A=\{x \mid 6\sqrt{x^2-2x+a}=21+2x-x^2, x\in R\}$,

$B=\{x \mid x^2+px+q=0, x\in R\}$,

且 $A\cup B=\{2, 3, -1\}$，$A\cap B=\{3\}$。

则 $p=$ ____，$q=$ ____，$a=$ ____。

2. 不等式 $\frac{x+2}{k}>1+\frac{x-3}{k^2}$ 的解为 $x>3$，则 $k=$ ____。

3. 函数 $y=m-n\cos x$ 有最大值为3，最小值为 -1，则 $m+n=$ ________。

4. 如 $(1+x)^n$ 展开式里的第5、6、7项系数成等差数列，则 $n=$ ____。

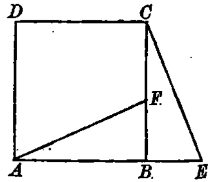
5. 把半径为20cm的半圆卷成圆锥，这个圆锥的体积是 ________。

6. 化简 $\frac{(\lg x)^2}{\lg(\lg x)^2}\cdot\frac{\lg(\lg x^2)}{\lg x^2}\cdot\frac{\lg\lg x}{\lg x}+\frac{1}{2}\lg\sqrt{\lg\sqrt{x}}$ = ______。

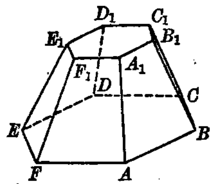
三、（本题共8分）求：方程 $\text{arctg}x+\text{arctg}y=\frac{\pi}{2}$ 表示什么曲线，并画出草图。

四、（本题8分）如果 $f(x)$ 是奇函数，且 $x>0$ 时，$f(x)=x(1-x)$，求：当 $x<0$ 时，$f(x)$ 的解析式。

五、（本题10分）如图 $ABCD$ 是正方形，且 $|BE|=|BF|$，用复数证明 $AF\perp CE$。（用其他方法证不给分）



六、（本题共10分）上下底面边长为 4 cm和 8 cm，高为 $\sqrt{61}$cm，求过上、下底面相对两棱的截面。



七、（本题共14分）动椭圆一焦点 F_1 为定点，并经过两定点 A 和 B，求另一焦点 F_2 的轨迹和椭圆中心 O 的轨迹。

八、（本题共10分）已知：a_1，a_2，…，a_n 是 n 个正数，求证 $(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant n^2$。

参考答案

一、1. D；2. B；3. A；4. C；5. B；6. B。

二、1. 解 由 $A\cap B=\{3\}$ 知 $x=3$ 满足方程代入得 $6\sqrt{3^2-2\times3+a}=21+2\times3-3^2$，则 $a=6$，得 $A=\{3,\ -1\}$；而 $A\cup B=\{2,\ 3,\ -1\}$，故 $B=\{3,\ 2\}$，那末，$p=-(2+3)=-5$，$q=2\times3=6$。$\therefore a=6$，$p=-5$，$q=6$。

2. 解 $\because \frac{x+2}{k}>1+\frac{x-3}{k^2}$，整理得 $\frac{(k-1)x-(k^2-2k-3)}{k^2}$

>0，而 $k^2>0$，则 $(k-1)x>k^2-2k-3$，其解为 $x>3$，故 $k-1>0$，且 $\frac{k^2-2k-3}{k-1}=3$，得 $k=5$，$k=0$（舍）。$\therefore k=5$。

3. **解** $y=m-n\cos x$ 有最大值为3，最小值 -1，故有 $n\neq 0$，当 $n>0$ 时，$\cos x=-1$，有 $y_{max}=m+n$，则 $m+n=3$，当 $n<0$ 时，$\cos x=-1$，有 $y_{min}=m+n$，则 $m+n=-1$，$\therefore$ $m+n=3$ 或 -1。

4. **解** 由条件 $2C_n^5=C_n^4+C_n^6$，得 $\frac{2\times n!}{5!(n-5)!}=\frac{n!}{4!(n-4)!}+\frac{n!}{6!(n-6)!}$，得 $n=7$ 或 $n=14$。$\therefore n=7$ 或14。

5. **解** 母线 $l=20$，而 $\frac{180^\circ}{360^\circ}=\frac{r}{l}$，$\therefore r=10$，故得 $h=10\sqrt{3}$

则 $V=\frac{1}{3}\pi(10)^2\times10\sqrt{3}=\frac{1000\sqrt{3}}{3}(\mathrm{cm}^3)$。

6. **解** 原式 $=\frac{(\lg x)^2}{2\lg\lg x}\cdot\frac{\lg(2\lg x)}{2\lg x}\cdot\frac{\lg\lg x}{\lg x}+\frac{1}{4}\lg\left(\frac{1}{2}\lg x\right)$

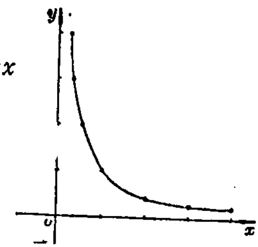
$$=\frac{1}{4}(\lg2+\lg\lg x)+\frac{1}{4}\lg\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\lg\lg x$$

$$=\frac{1}{2}\lg\lg x。$$

二、**解** 由条件得 $\operatorname{arctg}y=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x$

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}y)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)$，

$\therefore$ $y=\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}x)=\frac{1}{x}$。



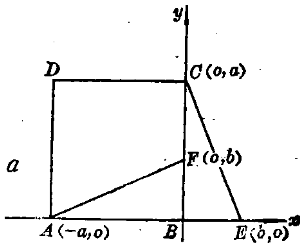
又 $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}y<\frac{\pi}{2}$，故 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x<\frac{\pi}{2}$，即

$0<\operatorname{arctg}x<\pi$，而$\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}x<-\frac{\pi}{2}$，得 $0<\operatorname{arctg}x<\frac{\pi}{2}$. 则 $x>0$，且 $y>0$，图象在第一象限。

四、解 当 $x<0$ 时，$f(x)=f[-(-x)]=-f(-x)$，$\because -x>0$，$\therefore f(-x)=-x[1-(-x)]=-x(1+x)$，

$\therefore f(x)=-f(-x)=-[-x(1+x)]=x(1+x)$。

五、证明 如图建立坐标系。

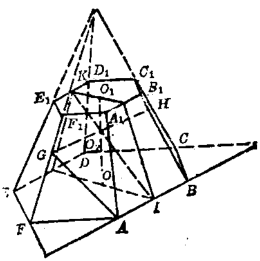


设 $C(0,\ a)$，$A(-a,\ 0)$，$E(b,\ 0)$，$F(0,\ b)$。

$\because\ \overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BA}=bi-(-a)=a+bi$，$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BC}=b-ai$，

则 $\overrightarrow{AF}\times -i=(a+bi)-i=b-ai=\overrightarrow{CE}$，即$\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{CE}}=-i$，

$\therefore AF\perp CE$。



六、解 如图 $ABHD_1E_1G$ 为所求之截面。中心连线 $OO_1=\sqrt{61}$，边心距O_1K，过OO_1和O_1K的截面垂直 E_1D_1，而$AB\parallel E_1D_1$，则$AB\perp$截面OO_1K，得$AB\perp KI$，又 $KI=\sqrt{OO_1{}^2+[\frac{\sqrt{3}}{2}(AB+E_1D_1)]^2}=13$，且$\frac{KO_2}{O_2I}=\frac{O_1K}{OI}=\frac{E_1D_1}{AB}=\frac{1}{2}$，这样$O_2K=\frac{13}{3}$，$O_2I=\frac{26}{3}$。

对角面FCC_1F_1中，$FC=16$，$F_1C_1=8$，又有$\frac{O_1D}{OD}=\frac{O_1K}{OI}=\frac{1}{2}$，则 $GH=C_1F_1+\frac{1}{3}(FC-C_1F_1)=8+\frac{1}{3}\times 8=\frac{32}{3}$。

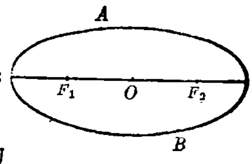
故 $S_{截面ABHD_1E_1G}=\frac{1}{2}(E_1D_1+GH)DK$

$$+\frac{1}{2}\left(AB+GH\right)DI$$

$$=\frac{1}{2}(4+\frac{32}{3})\times\frac{13}{3}+\frac{1}{2}(8+\frac{32}{3})\times\frac{26}{3}$$

$$=112\frac{2}{3}(\text{cm}^2)。$$

七，解 如图A、B及F_1均为定点，F_2为动点。根据椭圆定义有$AF_1+AF_2=BF_1+BF_2$，即 $F_2A-F_2B=BF_1-AF_1=$定长，故F_2的轨迹为以A、B为焦点，BF_1-AF_1为实轴长的双曲线一支。过A、B作x轴，AB的中点为原点建立坐标系，AB长为$2c$，$BF_1-AF_1=2a$，得F_2点的轨迹方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ （$b^2=c^2-a^2$）。



设动椭圆的中心为$O(x,\ y)$，$F_2(X,\ Y)$，且$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$，而定点$F_1(m,\ n)$，故 $x=\frac{X+m}{2}$ $y=\frac{Y+n}{2}$，得 $X=2x-m$，$Y=2y-n$，代入，有$\frac{(2x-m)^2}{a^2}-\frac{(2y-n)^2}{b^2}=1$，

即 $\frac{(x-\frac{m}{2})^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{(y-\frac{n}{2})^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=1$，这样中心的轨迹为以$\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)$为中心，实轴平行于$AB$，以$\frac{a}{2}$和$\frac{b}{2}$为半实轴、半虚轴的双曲线一支。

八、证明 (1) 当$n=1$时，左$=a_1\cdot\frac{1}{a_1}=1$，右边$=1$，

∴不等式成立。

(2) 设 $n=k$ 时，$(a_1+a_2+\cdots+a_k)(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k})\geqslant k^2$成立，当 $n=k+1$时，

$$左=[(a_1+a_2+\cdots a_k)+a_{k+1}][(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k})+\frac{1}{a_{k+1}}]$$

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_k)(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k})+a_{k+1}(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k})+\frac{1}{a_{k+1}}(a_1+a_2+\cdots+a_k)+1$$

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_k)(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k})+[(\frac{a_1}{a_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{a_1})+(\frac{a_2}{a_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{a_2})+\cdots+(\frac{a_k}{a_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{a_k})]+1$$

$$\geqslant k^2+2k+1=(k+1)^2$$

根据(1)(2)所证，对于所有自然数 n，不等式

$(a_1+a_2+\cdots+a_n)(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})\geqslant n^2$ 成立。

数 学　　（B级）

一、（本题共15分）**选择题**　每小题只有一个结论是正确的，多选算错。

1．已知：方程 $f(x)=0$ 的解集是 $\{2,\ -2\}$，那末，方程 $f(\lg t^2)=0$ 的解集是

（A）$\{10\}$；　　（B）$\{10,\frac{1}{10}\}$；

（C）$\{10,-10\}$；（D）$\{10,-10,\ \frac{1}{10},\ -\frac{1}{10}\}$。

答［　　］

2．若 $0<a<1$，$0<b<1$，则 $a+b$，$2\sqrt{ab}$，a^2+b^2，$2ab$中最大的是

（A）$a+b$；（B）$2\sqrt{ab}$；（C）a^2+b^2；（D）$2ab$。

答［　　］

3．下列四条关于空间图形的命题中，正确的是

（A）若两条直线都和同一平面平行，则两直线平行；

（B）若两条直线没有公共点，则两直线平行；

（C）若两条直线垂直于同一平面，则两直线平行；

（D）若两条直线垂直于同一条直线，则两直线平行。

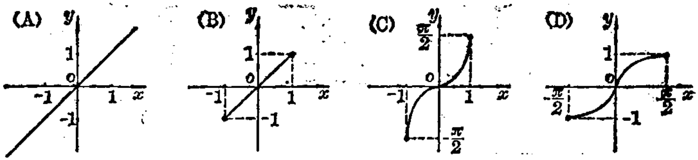
答［　　］

4．直线 $y=-2x+1$ 的倾角是

（A）$\operatorname{arctg}(-2)$；　　（B）$\operatorname{arctg}2$；

（C）$\pi-\operatorname{arctg}2$；　　（D）$\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}2$。　答［　　］

5．函数 $y=\sin(\arcsin x)$ 的图象是　　答［　　］



二、（本题共15分）填空题

1. $(x+\frac{2}{x})^4$ 的展开式中，常数项是________。

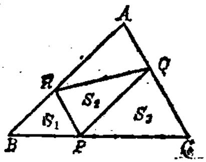
2. 底面边长为 a，高为 $\sqrt{2}a$ 的正四棱柱的对角线与底面的交角为____度。

3. 化简：$(\frac{1}{2})^{|\log_{\frac{1}{2}}\pi|}=$______。

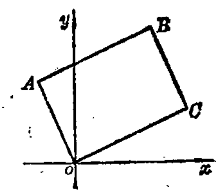
4. $\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{tg}\beta$ 是方程 $6x^2-5x+1=0$ 的两个根，则 $\alpha+\beta=$_______。

5. 若方程：$x^2+y^2+ax+ay+\frac{3}{2}=0$ 表示的曲线是圆，那末 a 的取值范围是______。

三、（本题共24分）



1. 如图 P 为 $\triangle ABC$ 的一边 BC 上任意一点，过 P 作 $PQ\parallel AB$，交 AC 于 Q，作 $PR\parallel AC$，交 AB 于 R，连结 QR。若 $\triangle BRP$、$\triangle RPQ$、$\triangle PQC$ 的面积分别为 S_1、S_2、S_3。求证：S_1、S_2、S_3 成等比数列。



2. 如图，$oABC$ 是复平面 xoy 上的矩形，点 A 对应的复数是 $-1+2i$，而 $|OA|:|OC|=1:\sqrt{2}$。求点 C、B 所对应的复数。

3. 已知：$A=\{x\mid x^2-px+15=0\}$，

$B=\{x\mid x^2+qx+r=0\}$，且 $A\cap B=\{3\}$，

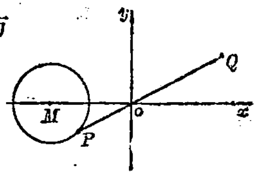
$A\cup B=\{2, 3, 5\}$。求：p，q，r的值。

四、（本题共10分）二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的系数，可以分别从0、1、2、3、4、5、6、7、8、9这十个整数中任意选取，并且 a、b、c 中任意两个都不相等。问共可以构成多少个不同的二次函数？其中图象过原点的有几个？

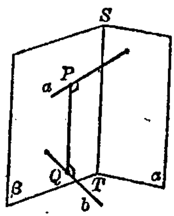
五、（本题共10分）如果 $A+B=\frac{2}{3}\pi$，求 $\sin^2A+\sin^2B$ 的最大值与最小值。

六、（本题共10分）求200以内或能被3整除，或能被7整除的自然数的总和。

七、(本题共12分)如图，已知圆M的方程是$(x+2)^2+y^2=1$，P是圆M上的一动点，连结Po并延长到Q，使$|PQ|=4$，试求点Q轨迹的极坐标方程(以o为极点，ox为极轴）。

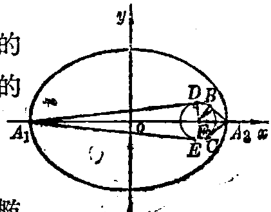


八、（本题共12分）如图，PQ是异面直线a、b的公垂线，P在a上，Q在b上，且$a\perp$平面α，$b\perp$平面β。平面α与β交于直线ST。



求证：$PQ\parallel ST$。

九、(本题共12分)如图，人造卫星的轨道是椭圆，地球的球心位于这个椭圆的一个焦点上，若人造卫星在椭圆长轴的两端分别测得地球的视角$\angle BA_2C=2\alpha$，$\angle DA_1E=2\beta$，$(\alpha>\beta)$，试计算这轨道椭圆的离心率（图中B、C、D、E是切点）。



参考答案

一、1. D；2. A；3. C；4. C；5. B。

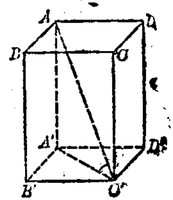
二、1. 24。

解 $\because T_{r+1}=C_4^r x^{4-r}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^r=2^r C_4^r x^{4-2r}$，

令 $4-2r=0$，则 $r=2$。

$\therefore$ 常数项为 $T_3=2^2C_4^2=24$。

2. 45。



解 如图 AC' 是正四棱柱 $ABCD$-$A'B'C'D'$ 的对角线，$\angle AC'A'$ 是 AC' 与底面的交角。

在 $\triangle AA'C'$ 中，

$$\angle AA'C'=90°,\ AA'=\sqrt{2}a,$$
$$A'C'=\sqrt{A'B'^2+B'C'^2}=\sqrt{2}a。$$
$$\therefore \angle AC'A'=45°。$$

3. $\frac{1}{\pi}$。

解 $\because \left|\log_{\frac{1}{2}}\pi\right|=-\log_{\frac{1}{2}}\pi$，

$$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{\left|\log_{\frac{1}{2}}\pi\right|}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\log_{\frac{1}{2}}\pi}$$
$$=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}\pi}\right]^{-1}$$
$$=\pi^{-1}=\frac{1}{\pi}。$$

4. $k\pi+\frac{\pi}{4}$，$(k\in Z)$。

解 由韦达定理：$\begin{cases} \mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta=\dfrac{5}{6} \\ \mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta=\dfrac{1}{6}, \end{cases}$

则 $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}=1$。

$\therefore$ $\alpha+\beta=k\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$(k\in Z)$。

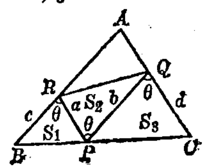
5．$a\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$。

解 配方得 $\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{a}{2}\right)^2=\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{3}{2}$,

由 $\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{3}{2}>0$,

得 $a\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$。

三、1．**证法一**：设$RP=a$，$PQ=b$，$BR=c$，$CQ=d$，又设 $\angle BRP=\theta$，则$\angle RPQ=\angle PQC=\theta$，



$S_1=\dfrac{1}{2}ac\sin\theta$，$S_2=\dfrac{1}{2}ab\sin\theta$，

$S_3=\dfrac{1}{2}bd\sin\theta$。

$\because$ $PR\parallel CQ$，$BR\parallel PQ$，

$\therefore$ $\triangle BPR\backsim\triangle PCQ$，故 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{b}{d}$，$ab=cd$。

$\therefore$ $S_1\cdot S_3=\dfrac{1}{4}abcd\sin^2\theta=\dfrac{1}{4}a^2b^2\sin^2\theta=S_2^{\,2}$，

即 S_1，S_2，S_3成等比数列。

证法二：设 $BP=m$，$PC=n$，

$\because$ $PR\parallel CA$，$\therefore$ $\triangle BPR\backsim\triangle BCA$。

若$\triangle ABC$的面积为 S，则$\dfrac{S_1}{S}=\dfrac{m^2}{(m+n)^2}$，即 $S_1=\dfrac{m^2S}{(m+n)^2}$。

同理可得$S_3=\frac{n^2S}{(m+n)^2}$。

$$\therefore\quad S_1\cdot S_3=\frac{m^2n^2S^2}{(m+n)^4}。$$

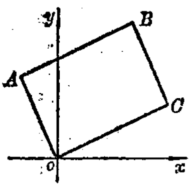
又 $S_2=\frac{1}{2}(S-S_1-S_3)$

$$=\frac{S}{2}\left[1-\frac{m^2}{(m+n)^2}-\frac{n^2}{(m+n)^2}\right]$$

$$=\frac{S}{2}\cdot\frac{(m+n)^2-m^2-n^2}{(m+n)^2}=\frac{mnS}{(m+n)^2}。$$

$\therefore$ $S_1\cdot S_3=S_2{}^2$，即 S_1，S_2，S_3成等比数列。

2．解　将点A绕O按顺时针方向旋转$\frac{\pi}{2}$，且把模乘以$\sqrt{2}$即得点C，于是点C对应的复数为：



$$(-1+2i)\cdot\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=(-1+2i)(-\sqrt{2}i)$$

$$=2\sqrt{2}+\sqrt{2}i。$$

$\because$ $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$，

$\therefore$ 点B对应的复数是$(-1+2i)+(2\sqrt{2}+\sqrt{2}i)$

$$=(2\sqrt{2}-1)+(2+\sqrt{2})i。$$

$\therefore$ 点C、B对应的复数分别是$2\sqrt{2}+\sqrt{2}i$，$(2\sqrt{2}-1)+(2+\sqrt{2})i$。

3．解　$\because A\cap B=\{3\}$，

$\therefore$ 3是方程$x^2-px+15=0$…①与方程$x^2+qx+r=0$…②的公共根。

由韦达定理可知方程的另一根α满足$3\alpha=15$，得$\alpha=5$，于是$p=3+\alpha=3+5=8$。