

● 任 莹 编著

● 国防科技大学出版社

人造地球卫星 轨道力学



ISBN 7 81024-033-1

V·2 定价：3.95 元



V4

人造地球卫星轨道力学

RENZAO DIQIU WEIXING
GUIDAO LIXUE

任 萱 编著

国防科技大学出版社

内 容 简 介

本书作为人造地球卫星运动理论的应用,讨论了卫星的轨道和发射段弹道的设计与分析方法以及轨道机动与制导方法这两方面的问题。第一部分首先给出了卫星按二体轨道运动时,在无摄和有摄情况下的星下点轨迹的特性与分析方法,然后建立了卫星的任务要求与轨道要素之间的关系,讨论了满足覆盖、复现、组网、照明、受晒等任务要求的卫星轨道的设计与分析方法,最后简略地对卫星发射段弹道的基本形式、飞行程序、飞行性能、误差系数矩阵等问题进行了研究。第二部分是研究卫星为完成给定任务,在火箭发动机推力作用下,轨道所发生的有意改变。首先在冲量假设下,按固定时间或最省能量的要求研究了轨道调整、轨道改变、轨道转移、拦截交会等典型的轨道机动问题,然后研究在有限推力作用下,为完成轨道机动任务而采用的一些制导方法。

本书可作为航天航空院校飞行力学、总体设计和飞行控制等专业大学本科生的教材,对航天航空的研究设计、试验使用等部门的工程技术人员以及有关专业的研究生也有参考价值。

人造地球卫星轨道力学

任 董 编著

责任编辑 王金荣

封面设计 侯 云

*

国防科技大学出版社 出版发行

湖南省新华书店 经销

国防科技大学印刷厂印装

*

开本: 787×1092 1/16 印张: 13⁴/10 字数: 311.8千字
1988年12月第1版 1988年12月第1次印刷 印数: 1500册

ISBN 7-81024-033-1

V·2 定价: 3.95元

前 言

本书是为航天器飞行力学、总体设计、飞行控制等专业编写的教材。

本书以人造卫星运动理论为基础,研究了卫星的轨道和发射段弹道的设计与分析方法、卫星的轨道机动及其制导方法这两方面的问题,这两方面的内容有相对的独立性,可以独自成篇。

第一部分包含第一章至第三章。第一章以二体运动理论为基础,研究了无摄与有摄情况下卫星星下点轨迹的特性及其分析方法。第二章在第一章的基础上,建立了卫星的任务要求与轨道要素之间的关系,并在覆盖、复现、组网、照明、受晒等任务要求下,研究满足这些要求的轨道设计与分析方法。第三章在火箭弹道学的基础上,研究将卫星射入预定轨道的发射段弹道问题,讨论了发射段弹道的基本形式、飞行程序、飞行性能、误差系数矩阵等问题。

第二部分包含第四章至第六章。第四章研究在冲量作用下的轨道调整和轨道改变的一般方法,当轨道改变以完成拦截任务的形式出现时,研究了固定时间和最省能量的拦截问题。第五章主要是研究在两次冲量作用下的共面和非共面的最优转移轨道,并研究了以完成交会任务为目标的轨道转移问题。第六章是在第四和第五章的基础上,以实现卫星间的交会为背景,研究了在有限推力作用下的拦截制导和末制导方法。

本书是编者在1981年和1986年编写的油印讲义的基础上,经过教学实践对内容进行了修改和补充后完成的。

在航天技术发展过程中,我国学者在轨道力学方面作了大量的工作,取得了许多有价值的成果,本书试图部分地反映他们的工作,书中引用了他们的一些研究成果,编者对他们表示感谢。

本书在编写过程中得到国防科技大学肖峰、黄圳珪副教授,朱龙根、胡小平讲师的大力支持,航天动力学与飞行试验专业的历届同学们提出过许多宝贵意见,编者在此一并表示感谢。

编者将十分感谢任何关于改进本书内容的意见。

编 者

1988年6月

绪 论

飞行器的飞行可分为航空、航天、航宇三种不同的类型。飞行器在地球大气层之内的飞行称为航空，在地球大气层之外，太阳系引力影响球范围之内的飞行称为航天，飞出太阳系引力影响球范围，进入宇宙空间的飞行称为航宇。当前的科学技术发展水平，已能成功地进行航空和航天，但还难以进行航宇。

航天又可按引力影响球范围再分为近地飞行、近月飞行和行星际飞行。

在银河系-太阳系中，太阳系的引力影响球近似是以太阳为中心，半径约为1光年的球面；在太阳-地球系统中，地球的引力影响球近似是以地球为中心，半径约为 9.3×10^5 公里的球面；在地球-月球系统中，月球的影响球近似是以月球为中心，半径约为 6.6×10^4 公里的球面。

航天器在地球引力影响球范围之外，太阳系引力影响球范围之内的航天飞行称为行星际飞行，航天器在地球引力影响球范围之内的航天飞行称为近地飞行。近月飞行是近地飞行中的一种特殊情况，因为月球的引力影响球包含在地球引力影响球之内（月-地平均距离为 3.8×10^5 公里），当近地飞行进入月球引力影响球范围时，称为近月飞行。

人造地球卫星为近地飞行的航天器，卫星在自由运动时，近似地认为只受与距离平方成反比的地球引力作用。

1957年10月第一颗人造地球卫星成功地发射，标志着人类开始了航天飞行的阶段，并开辟了航宇飞行的道路。

由于航天器具有许多优越的性能，可以完成过去难以进行的多种任务，从而给科学技术、国民经济、人民生活、国防等各方面带来了巨大而深远的影响。航天技术通过新技术、新产品、新材料、新工艺以及新的管理方法向国民经济各部门推广和转移，也带来了十分可观的间接经济效益。

按航天器的性能可分为以下五类航天器。

一、利用航天器对地球、地外空间以及地外物体进行科学研究，获得天文、地理、物理、化学、生物学等基础学科的新知识，深化和丰富人类对自然界的认识，并为进一步的航天飞行作理论和技术上的准备。这类航天器包括：

1. 宇宙探测器 各种月球、行星以及行星际空间探测器，人造行星，行星及月球的人造卫星等。

2. 科学和技术实验人造地球卫星 对卫星本身的技术进行实验的卫星技术实验站，进行空间环境观察的观察站，进行天文观测的天文观测站等。

二、利用人造地球卫星飞行高度高、覆盖面积大、速度快的优越性能，进行地面以及大气层信息的收集、处理和传输。这类应用技术卫星包括：

1. 地球观察站 侦察卫星、地球资源技术卫星、气象卫星、海洋监视卫星、预警卫星等。

2. 中继站 用于进行电磁波信息传输的通信卫星、直播卫星、跟踪和数据中继卫星等。

3. 基准站 用于提供定位信息的导航卫星、测地卫星等。

三、开发和利用地外空间的半永久性和永久性的空间站。

四、载人或不载人的往返于航天器与地面基地之间的运输系统。包括运货飞船、载人飞船、航天飞机、空天飞机等。

五、作为武器系统直接为军事目的服务。包括轨道武器系统、定向能武器和动能武器的天基作战平台、歼击卫星等。

我国人民在党的领导下，经过艰苦的努力，克服重重困难，在短期内独立自主地建立和发展了我国的航天事业，取得了举世瞩目的成就，截至1987年8月，已成功地发射20颗各种类型的卫星，这些卫星为地质、测绘、海洋、农林、环境保护等国民经济部门和空间科学研究提供了十分有价值的资料，试验通信卫星已用于国内通信广播和电视节目传输，对改善边远地区通信和广播状况发挥了重要作用。

我国已建成了各类人造卫星、运载火箭、发射设备和测量控制系统的研究、设计、试验和生产基地，航天工业已成为我国新兴的工业部门。我国建成了能发射近地卫星和对地静止轨道卫星的拥有光测、遥测和雷达等多种跟踪测量手段的酒泉和西昌航天器发射场，组成了由测控中心、地面台站和测量船构成的航天测控网。我国拥有一支有经验有水平的航天科学技术队伍，从而有能力不断开拓航天飞行的新领域，可以预料，我国人民在航天事业中必将取得更辉煌的成就。

航天科学技术、电子计算机和核能科学技术是当代三大重要技术领域，是当代生产力发生飞跃变化的重要技术根源，对于当代科学技术的面貌产生了显著影响。航天科学技术（或称空间科学技术）是指人类利用不同类型的航天器来研究和开发地外空间及地外物体的一大类科学技术的总称，航天科学技术包含了与航天飞行有关的一系列理论和技术问题。以航天器的运动规律作为研究内容的航天动力学是航天科学技术的重要组成部分。

航天器的整个运动过程包含发射、轨道运行、再入返回等飞行阶段，航天动力学是以数学力学和控制理论等为基础，研究各类航天器在各飞行阶段特有的运动规律的一门学科。航天器的运动可分为质心运动和绕质心运动，前者称为轨道运动，后者称为姿态运动，虽然这两种运动是相互影响的，但考虑到控制系统的作用，特别是在航天飞行的环境下，这两种运动可以分别进行研究，因而航天动力学又可分为轨道力学和姿态动力学两部分。由于航天器的性能、飞行环境、飞行中的导航制导和控制、飞行器的结构和动力装置等都与航天器的运动状态有着密切的关系，因而在航天器的研究、设计、使用、试验过程中提出了大量有关航天动力学的课题，促进了航天动力学的发展。

本书研究的是人造地球卫星的轨道力学，因而不涉及近月飞行和行星际飞行的轨道力学，并且考虑到人造地球卫星再入返回的轨道力学另有专门课程讲授，故本书也不涉及这方面的问题。

本书将人造地球卫星视为有控（或无控）的质点，在二体运动理论的基础上研究卫星轨道和发射段弹道的设计与分析方法，以及卫星的轨道机动与制导方法这两方面的问题，随着航天技术由试验研究阶段走向实际应用阶段，这两方面问题的重要性就显得很突出，本书将依次讨论这两方面的问题，这两方面的问题有相对的独立性，可以独自成篇。

目 录

绪论	
第一章 人造地球卫星的星下点轨迹	
§1.1 曲线上的曲线和地图投影	2
§1.2 无旋地球上的星下点轨迹	19
§1.3 旋转地球上的星下点轨迹	27
第二章 人造地球卫星的轨道设计	
§2.1 地面覆盖问题	42
§2.2 复现轨道问题	54
§2.3 卫星组网问题	57
§2.4 星下点太阳照明问题	61
§2.5 卫星的日晒问题	68
第三章 人造地球卫星的发射	
§3.1 运载火箭的发射段弹道	79
§3.2 运载火箭的俯仰程序	89
§3.3 运载火箭的飞行性能估算	97
§3.4 入轨点运动状态参数偏差与卫星轨道要素偏差的关系	105
第四章 轨道调整与轨道改变	
§4.1 轨道调整	116
§4.2 轨道改变	125
§4.3 共面椭圆轨道的单次冲量最优轨道改变	133
§4.4 最小能量拦截轨道	137
§4.5 固定时间拦截轨道	142
§4.6 椭圆轨道兰伯特飞行时间定理	148
§4.7 广义拦截问题	156
第五章 轨道转移	
§5.1 共面圆轨道的最优转移轨道	159
§5.2 惠特克定理与连线速度一致性	165
§5.3 共面椭圆轨道的最优转移轨道 (一)	167
§5.4 共面椭圆轨道的最优转移轨道 (二)	170
§5.5 非共面圆轨道的最优转移轨道	175
§5.6 两航天器间的相对运动	178
第六章 轨道机动的制导方法	
§6.1 Q 制导方法	189
§6.2 速度增益制导方法	193
§6.3 交会末制导方法	195
参考文献	

第一章 人造地球卫星的星下点轨迹

围绕地球运动的各种类型的人造卫星，其任务虽各有不同，但为完成给定任务，它们都要收集和传输地面（或大气层）的电磁波信息以及和地面测控网保持光学的或无线电的联系。

由于电磁波沿直线传播的特性，只有当卫星处于地球某点上空时，才能收集和传输该点及由地球曲率限定的该点周围地区的电磁波信息。因此，不论是为了分析已知其轨道的卫星收集和传输地面信息的性能，还是为了设计能收集和传输地球上指定地区的信息的卫星轨道，都要求对卫星与地球间的相互几何关系进行研究，即在已知卫星轨道要素的情况下，回答以下一些问题：

- (1) 对于给定的时刻 t ，卫星在地球哪一点的上空？
- (2) 当卫星围绕地球飞行一圈时，将飞过地球上哪些点的上空？
- (3) 当卫星围绕地球飞行多圈时，又将飞过地球上哪些点的上空？

在本章中除个别特别指出的问题外，在研究中假定地球的几何形状为一正球体，对于惯性坐标系（或称地球不动外壳，也称无旋地球）的观察者而言，卫星围绕地球作椭圆（或圆）轨道运动。

设某时刻 t_1 ，卫星在轨道上的 s_1 点，作 s_1 与地心 o_e 的连线，连线与地面表面交于 s'_1 点， s'_1 点称为该时刻的卫星星下点，由于连线为球面的法线， s'_1 点也称为 s_1 在球面上的投影。

随着时间的推移，卫星在轨道上的位置不断变化，星下点在地球上的位置也不断变化，将各时刻星下点连接起来，在地球表面上形成的轨迹称为星下点轨迹。求出星下点轨迹，即可了解卫星与地球之间的相互几何关系。

在图 1.1 中表示的是无旋地球上的星下点轨迹。由于地球在惯性空间中绕其转轴作

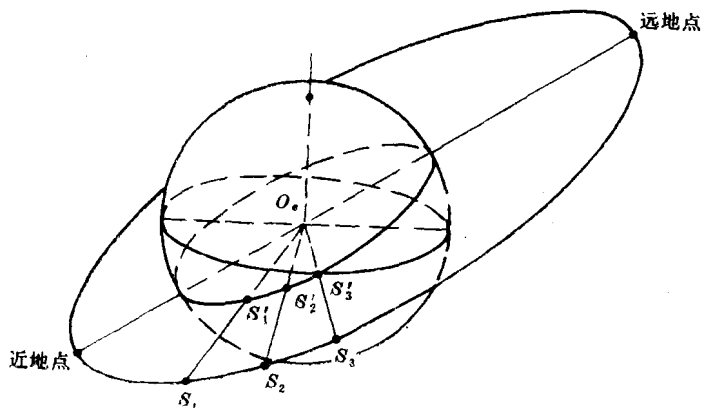


图 1.1 无旋地球上的星下点轨迹

匀角速度自转，因此，旋转地球上的星下点轨迹将不同于无旋地球上的星下点轨迹。在本章中，先研究无旋地球上的星下点轨迹，以此为基础，进一步研究旋转地球上的星下点轨迹。

§ 1.1 曲面上的曲线和地图投影

星下点轨迹是曲面（球面）上的曲线，在古典微分几何学中对曲面上曲线的性质已作了深入详细的研究，在研究星下点轨迹时将引用这些结果。

在求得球面上的星下点轨迹后，通常要将球面上的星下点轨迹绘制在平面地图上，为了正确地理解与使用平面地图上绘制的星下点轨迹，要对地图投影作一简短的介绍。

本节将讨论上面两个问题，需要深入了解这两方面问题的读者，可参考文献[1]和[2]。

一、曲面上曲线的基本知识

1. 曲面的参数方程

在直角坐标系 $O-XYZ$ 中，由 O 向曲面上一点 $P(X, Y, Z)$ 所作的矢径 \bar{r} 可表为

$$\bar{r} = X \bar{X}^0 + Y \bar{Y}^0 + Z \bar{Z}^0 \quad (1.1)$$

其中 \bar{X}^0 、 \bar{Y}^0 、 \bar{Z}^0 分别为 X 、 Y 、 Z 轴的单位矢量。

曲面的方程为

$$Z = f(X, Y) \quad (1.2)$$

或

$$F(X, Y, Z) = 0 \quad (1.3)$$

曲面方程可看作是式(1.1)中 X 、 Y 、 Z 之间的约束条件，因而曲面上点的坐标 X 、 Y 、 Z 中，只有两个独立变量。引入两个参变量 u 、 v ，使得

$$\begin{cases} X = X(u, v) \\ Y = Y(u, v) \\ Z = Z(u, v) \end{cases} \quad (1.4)$$

其中 X 、 Y 、 Z 均为 u 、 v 的单值解析函数，则曲面上的点可由 (u, v) 确定，通常将 u 、 v 称为曲面上的曲纹坐标，并将式(1.4)或该式的矢量表达式

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) \quad (1.5)$$

称为曲面的参数方程。

将 \bar{r} 对 u 、 v 求偏导数，则有

$$\begin{cases} \bar{r}'_u = X'_u \bar{i} + Y'_u \bar{j} + Z'_u \bar{k} \\ \bar{r}'_v = X'_v \bar{i} + Y'_v \bar{j} + Z'_v \bar{k} \end{cases} \quad (1.6)$$

曲面上 $\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v \neq 0$ 的点，即 \bar{r}'_u 、 \bar{r}'_v 不共线的点称为正则点， $\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v = 0$ 的点称为非正则点，我们只讨论正则点。

2. 曲面上的曲线

设 t 为独立变量，而曲面上的曲纹坐标为 t 的函数，即

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases} \quad (1.7)$$

将上式代入式(1.5)则有

$$\bar{r} = \bar{r}(u(t), v(t)) = \bar{r}(t) \quad (1.8)$$

当 t 在其定义域内变动时, \bar{r} 的矢端在曲面上画出一矢端曲线, 因此, 式(1.7)或式(1.8)在曲面上定义了一曲线。

若曲线上的曲线有一个曲纹坐标保持常数, 例如 $u = \text{常数}$, 只有 v 改变, 则此曲线称为 v 坐标曲线; 若 $v = \text{常数}$, 只有 u 改变, 则称 u 坐标曲线。因为常数可以任意给定, 所以可在曲面上得出两族坐标曲线, 这两族曲线组成了曲面上的坐标网。

例如, 地球中心为原点 O_e , 已知其半径为 R , 曲纹坐标分别为纬度 φ 和经度 λ , 则地球圆球面的参数方程为

$$\begin{cases} X = R \cos \varphi \cos \lambda \\ Y = R \cos \varphi \sin \lambda \\ Z = R \sin \varphi \end{cases} \quad (1.9)$$

若 $\varphi = \text{常数}$, 则坐标曲线为平行圈 (或称纬线), 亦即 λ 坐标曲线; 若 $\lambda = \text{常数}$, 则坐标曲线为子午线 (或称经线), 亦即 φ 坐标曲线。平行圈和子午线构成了球面上的坐标网。

3. 曲面上曲线的切线

设已知曲面上曲线 L 的方程为

$$\bar{r} = \bar{r}(u(t), v(t))$$

则有

$$d\bar{r} = \bar{r}'_u du + \bar{r}'_v dv \quad (1.10)$$

其中

$$\begin{cases} du = u' dt \\ dv = v' dt \end{cases} \quad (1.11)$$

由式(1.10)可知, $d\bar{r}$ 为 \bar{r}'_u 、 \bar{r}'_v 的线性组合, 而 $d\bar{r}$ 的几何意义为曲线 L 的切线方向的矢量, 因此, 在曲面上曲线的任何一点, 其切线总是在该点的矢量 \bar{r}'_u 和 \bar{r}'_v 组成的平面内, 此平面称为该点的切平面, 而矢量 \bar{r}'_u 和 \bar{r}'_v 分别在该点的两坐标曲线的切线方向上。例如, 在 u 坐标曲线上 $dv = 0$, 由式(1.10)可知, \bar{r}'_u 与 u 坐标曲线的切线方向一致。同理 \bar{r}'_v 与 v 坐标曲线的切线方向一致。如图1.2所示。

4. 曲面上曲线的弧素

由式(1.10)可知, 曲面上已知曲线 L 的弧长微分 ds 满足下列关系:

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\bar{r} \cdot d\bar{r} = (\bar{r}'_u du + \bar{r}'_v dv)^2 \\ &= \bar{r}'_u{}^2 du^2 + 2\bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_v dudv + \bar{r}'_v{}^2 dv^2 \end{aligned} \quad (1.12)$$

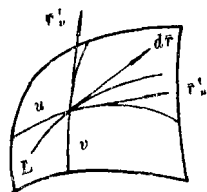


图 1.2 曲面上曲线的切平面

上式右端为 du 和 dv 的二次齐次式, 称之为曲面的第一基本形, 或称为曲面的弧素。

若令

$$\begin{cases} E = \bar{r}'_u{}^2 \\ F = \bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_v \\ G = \bar{r}'_v{}^2 \end{cases} \quad (1.13)$$

E 、 F 、 G 称为第一基本量，将上式代入式(1.14)，则有

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (1.14)$$

例如，对于式(1.9)描述的球面方程，可由

$$\begin{cases} X'_\varphi = -R\sin\varphi\cos\lambda \\ Y'_\varphi = -R\sin\varphi\sin\lambda \\ Z'_\varphi = R\cos\varphi \\ X'_\lambda = -R\cos\varphi\sin\lambda \\ Y'_\lambda = R\cos\varphi\cos\lambda \\ Z'_\lambda = 0 \end{cases}$$

求得

$$\begin{cases} E = X'^2_\varphi + Y'^2_\varphi + Z'^2_\varphi = R^2 \\ F = X'_\varphi X'_\lambda + Y'_\varphi Y'_\lambda + Z'_\varphi Z'_\lambda = 0 \\ G = X'^2_\lambda + Y'^2_\lambda + Z'^2_\lambda = R^2\cos^2\varphi \end{cases}$$

故弧素为

$$ds^2 = R^2(d\varphi^2 + \cos^2\varphi d\lambda^2)$$

由式(1.14)和式(1.11)可得从 $t=t_0$ 点到 $t=t_1$ 点的曲线的弧长为

$$s = \int_{t_0}^{t_1} (Eu'_t{}^2 + 2Fu'_t v'_t + Gv'_t{}^2)^{\frac{1}{2}} dt \quad (1.15)$$

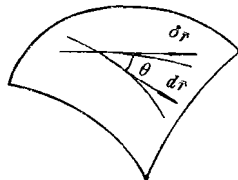
5. 曲面上曲线的交角

设曲面上有二曲线相交于一点，二曲线在交点的切线之间的夹角称为二曲线的交角，见图1.3.

将二曲线的切线矢量分别记为 $d\bar{r}$ 和 $\delta\bar{r}$ ，则

$$\begin{cases} d\bar{r} = \bar{r}'_u du + \bar{r}'_v dv \\ \delta\bar{r} = \bar{r}'_u \delta u + \bar{r}'_v \delta v \end{cases}$$

(1.16) 图 1.3 曲面上曲线的交角



若将二曲线的交角记为 θ ，则有

$$\cos\theta = \frac{d\bar{r} \cdot \delta\bar{r}}{|d\bar{r}| |\delta\bar{r}|} \quad (1.17)$$

由于

$$\begin{aligned} d\bar{r} \cdot \delta\bar{r} &= Edu\delta v + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v \\ |d\bar{r}| &= ds = (Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2)^{\frac{1}{2}} \\ |\delta\bar{r}| &= \delta s = (E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

故有

$$\cos\theta = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{(Edu^2 + 2Fdu\delta v + Gdv^2)^{\frac{1}{2}} \times (E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (1.18)$$

坐标曲线之间的交角 ω 是二曲线之间夹角的一种特殊情况,对于 v 坐标曲线有下列关系:

$$du = 0, \quad dv \neq 0$$

对于 u 坐标曲线则为

$$\delta u \neq 0, \quad \delta v = 0$$

将以上两式代入式(1.18),则有

$$\cos\omega = \frac{F}{(EG)^{\frac{1}{2}}} \quad (1.19)$$

由上式可知,坐标曲线正交的充要条件为

$$F = 0 \quad (1.20)$$

当坐标曲线正交时,弧素的表达式为

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$$

在曲面上每一点的坐标曲线都正交的曲纹坐标系称为正交坐标系,球面上的平行圈与子午线即构成球面上的正交坐标系。

6. 曲面的面积素

若 du 和 dv 分别为曲面上坐标曲线的微分,且均为正值,则在曲面上以 (u, v) 、 $(u+du, v)$ 、 $(u+du, v+dv)$ 、 $(u, v+dv)$ 为顶点,以坐标曲线为边的曲线四边形的面积可用自 (u, v) 点出发,以 $\bar{r}'_u du$ 和 $\bar{r}'_v dv$ 为边的平行四边形面积代替,见图1.4.

平行四边形的面积 $d\sigma$ 为

$$\begin{aligned} d\sigma &= |\bar{r}'_u du \times \bar{r}'_v dv| \\ &= |\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v| dudv \end{aligned} \quad (1.21)$$

考虑到拉格伦日恒等式

$$(\bar{A} \times \bar{B})^2 = \bar{A}^2 \bar{B}^2 - (\bar{A} \cdot \bar{B})^2 \quad (1.22)$$

则有

$$(\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v)^2 = \bar{r}'_u{}^2 \bar{r}'_v{}^2 - (\bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_v)^2 = EG - F^2$$

因而有

$$|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v| = (EG - F^2)^{\frac{1}{2}} = D \quad (1.23)$$

将上式代入式(1.21),则有

$$d\sigma = D dudv \quad (1.24)$$

$d\sigma$ 称为曲面的面积素。球面上的面积素为

$$d\sigma = D d\varphi d\lambda = R^2 \cos\varphi d\varphi d\lambda$$

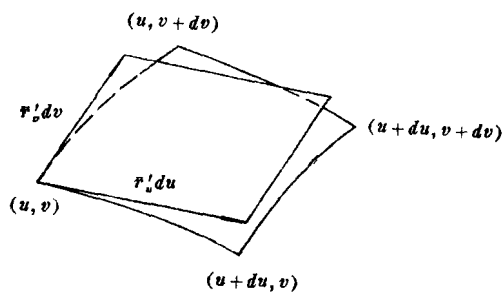


图 1.4 曲面的面积素

由式(1.24)可求得曲面在域 Ω 内的面积为

$$\sigma = \iint_{(\Omega)} D \, dudv \quad (1.25)$$

二、地图投影

地图是用数学方法在平面上显示整个(或部分)地球表面各种信息的一种图解形式。当地球表面上的经纬线(坐标曲线)形成的网格与地图平面上的网格建立了相互对应的数学关系后,则地球表面各网格内的要素(长度、角度、面积)也以满足这种数学关系的形式表示在平面上。因此,地图投影是指以一定的数学关系将地球表面上的经纬线网格表示到平面上去的投影方法。

在地球表面上用地心纬度 φ 和经度 λ 表示点的位置,同一点在平面上用直角坐标 X 、 Y 表示,地球表面上的 $P(\varphi, \lambda)$ 点在平面上对应于 $P'(X, Y)$ 点,两者间的函数关系为

$$\begin{cases} X = f_1(\varphi, \lambda) \\ Y = f_2(\varphi, \lambda) \end{cases} \quad (1.26)$$

地球表面的经纬线是连续而规则的曲线,因而平面地图上的经纬线也应是连续和规则的,即在投影范围之内, f_1 和 f_2 应为单值有限的连续函数,否则投影将无意义。

从式(1.26)中分别消去 φ 和 λ ,则可得经线投影到地图上的表达式为

$$F_1(X, Y, \lambda) = 0 \quad (1.27)$$

和纬线投影到地图上的方程式为

$$F_2(X, Y, \varphi) = 0 \quad (1.28)$$

1. 地图投影的分类

地球的球形表面为不可展的曲面,即将曲面表示为平面时将发生裂隙与褶皱,为避免发生这种情况,可用数学方法将经纬线拉伸或压缩,即通过一些过渡的办法来进行投

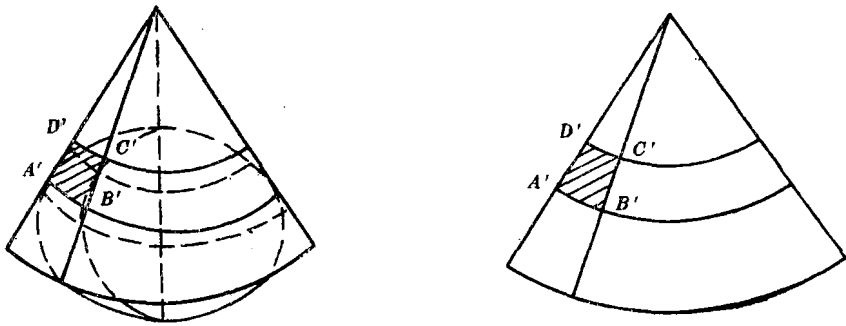


图 1.5 圆锥正轴切投影

影。

圆锥曲面是一种可展曲面,作一圆锥曲面与地球相切(或相割),并使圆锥轴线与地球自转轴重合(圆锥轴线与地球自转轴的这种关系称为正轴),圆锥曲线的母线即为地球子午线在圆锥面上的投影,而纬线可按某种数学关系投影到圆锥面上,然后将圆锥

沿某一母线展成扇形平面，从而可获得一幅地图。图 1.5 表示的是圆锥正轴切投影的情况。

上述的正轴圆锥投影也称极投影。当地球自转轴与圆锥曲面的轴线正交时的投影称为圆锥横轴投影，也称赤道投影。当地球自转轴与圆锥轴线既不重合又不正交时的投影称为圆锥斜轴投影，也称水平投影。当圆锥曲面与地球相切或相割时的投影分别称为切投影或割投影。见图 1.6。

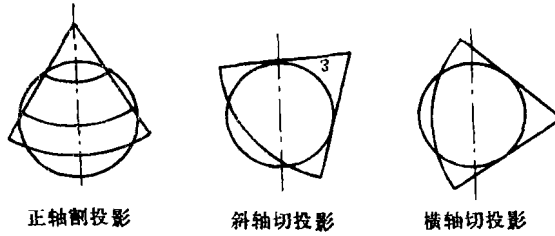


图 1.6 圆锥投影

圆柱面也是可展曲面，用圆柱面代替圆锥面进行与圆锥投影相类似的投影后可得圆柱投影，事实上当圆锥顶点延伸到无穷远时，圆锥面就变成了圆柱面，因此，圆柱投影是圆锥投影的一种特殊情况。按圆柱轴线与地球自转轴重合、正交、既不重合又不正交三种情况，可将圆柱投影分为正轴、横轴、斜轴投影，按圆柱体与地球相切、相割两种情况，又可将圆柱投影分为切投影和割投影。

在描绘人造地球卫星的星下点轨迹时将使用圆柱正轴切投影，在这种投影中，地球上的经纬线在平面地图上的投影为相互正交的平行直线，图 1.7 给出了这种投影。图 1.8 表示了正轴、斜轴和横轴圆柱投影。

如果圆锥曲面的顶角变为 180° ，则圆锥面成为平面，将地球表面投影到此平面，这种投影称为方位投影，如图 1.9 所示。在描绘星下点轨迹时，也将使用正轴和横轴方位投影。

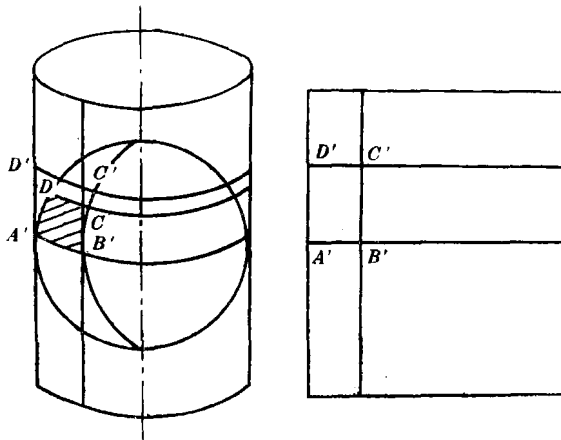


图 1.7 圆柱投影

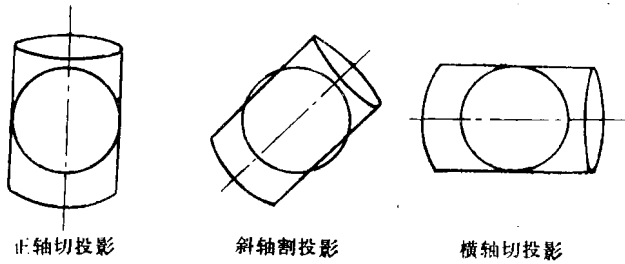


图 1.8 三种圆柱

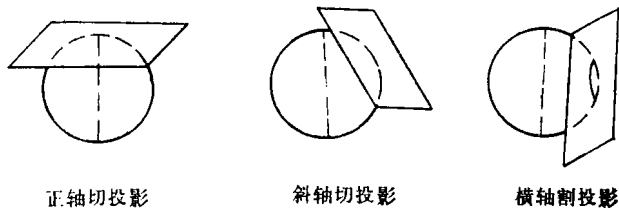


图 1.9 方位投影

2. 长度比、面积比和角度变形

地球表面上的曲线的长度、曲线所围的面积、曲线的交角经过圆锥、圆柱、方位投影表示在地图上，一般都会发生某种变化。为研究这种变化，讨论在地球上一点的邻域内微分线段的长度、微分面积、交角的变化，为此，先引入以下定义：

长度比 μ 为地球上微分线段投影后长度 ds' 与原有长度 ds 之比，即

$$\mu = \frac{ds'}{ds} \quad (1.29)$$

面积比 p 为地球上微分面积投影后的大小 $d\sigma'$ 与原有面积 $d\sigma$ 之比，即

$$p = \frac{d\sigma'}{d\sigma} \quad (1.30)$$

角度变形 $\Delta\beta$ 为某一交角投影前的数值 β 与投影后数值 β' 之差，即

$$\Delta\beta = \beta - \beta' \quad (1.31)$$

在制作地图时，必须先将地球按一定比例缩小后再表示在地图上，此比例尺称为地图的主比例尺或普通比例尺。由于投影过程中存在变形，地图上只有某些位置能保持这一比例尺，而其余位置的比例尺不同于主比例尺，这种比例尺称为局部比例尺，局部比例尺随投影的性质以及线段在地球上的位置和方向不同而变化。为方便起见，在后面的讨论中假定主比例尺的数值为 1。

下面来分析投影过程中长度、面积和角度的变化。

地球上由经纬线网格围成的球面微分四边形，经过投影关系

$$\begin{cases} X = X(\varphi, \lambda) \\ Y = Y(\varphi, \lambda) \end{cases} \quad (1.32)$$

投影到平面直角坐标系 XOY ，见图 1.10，在图中投影前为球面四边形 $ABCD$ ，投影后为