2011 考研数学最新精选600题（理工类）

主编 / 黄先开 曹显兵

权威名家精选配套习题 复习全程使用

全书分三部分，精编精选典型习题，难度适中，数量适当

解答详细精准，循序渐进，提供多种解法

中国人民大学出版社

考研数学最新精选600题(理工类)

▶ 主　编　黄先开　曹显兵
▶ 副主编　刘喜波　李晋明

2011

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

考研数学最新精选 600 题．理工类/黄先开，曹显兵主编．4 版
北京：中国人民大学出版社，2010
ISBN 978-7-300-07839-7

Ⅰ．①考…
Ⅱ．①黄… ②曹…
Ⅲ．①高等数学-研究生-入学考试-习题
Ⅳ．①O13－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 064577 号

考研数学最新精选 600 题（理工类）
主　编　黄先开　曹显兵
Kaoyan Shuxue Zuixin Jingxuan 600 Ti (Ligonglei)

出版发行	中国人民大学出版社		
社　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.com.cn(中国 1 考网)		
经　销	新华书店		
印　刷	北京鑫霸印务有限公司		
规　格	210 mm×285 mm　16 开本	**版　次**	2007 年 3 月第 1 版
			2010 年 4 月第 4 版
印　张	20.5	**印　次**	2010 年 4 月第 1 次印刷
字　数	668 000	**定　价**	32.00 元

前 言

要想学好数学，必须做一定数量的习题。做习题可以帮助考生正确地理解和牢固地掌握有关的概念、定理、公式与解题方法。只有通过做习题，才能发现自己的问题所在，才能更好地、真正地理解和掌握有关知识与解题方法，才能把书本上的东西转化为自己头脑里的东西。因此，很多经过第一轮复习（主要指对教材的复习）和第二轮复习（主要指有针对性地用考研复习参考书的复习，如《考研数学经典讲义》）后的同学，都会问在哪可找到好的习题做进一步的练习？根据我们考研辅导的体会，在辅导班上也经常有一些很好的典型例题因时间关系而不能讲授，但这些题在复习中又是绝对应该掌握的。因此根据广大考生的现实需要，也是为了对我们课堂讲授做一个重要补充，作者在查阅大量相关辅导资料的基础上经过反复比较、筛选和重新编制，最后汇编成这本习题精选，相信能较好地满足广大考生第三轮复习的需要。

研究生入学考试是一种具有选拔性的水平考试，除了考查考生对数学的基本概念、基本理论和基本方法的掌握情况外，更注重考查考生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和综合运用所学知识分析和解决问题的能力。本书偏重于能力训练，特别适合于有一定基础的考生作为进一步提高之用。需要提醒考生注意的是，在考研数学复习的过程中，个别考生眼高手低，没养成良好的做题习惯，在没有经过深入思考的情况下就匆忙翻看解答，这样是很难取得理想成绩的。特别是本书精选习题涉及知识点多、题型新颖、难度较高、综合性强，往往需要灵活运用所学知识才能作答。因此希望考生在做题时，如果遇到困难，千万不要急于看解答，一定要多思考。要注意，这正是搞清概念、弄清原理、熟悉方法、培养思维能力的重要训练过程。只有这样才能真正全面系统地掌握所学知识，才能真正提高应试水平，才能真正取得好成绩。

值得提出的是，本书作者基础理论扎实，研究水平较高，具有丰富的考研辅导经验，所编选习题代表了考研数学未来命题的趋势，相信本书是一本具有重要参考价值的复习用书。由于成书比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请大家批评指正。

编者

2010 年 3 月于北京

目　录

第一部分

PART ONE $\sum$ 高等数学

第一章

函数、极限与连续

精选习题

一 填空题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 0\\ 1+x^2, & x>0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x^3, & x\geqslant 0\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f[g(x)]=$ ______.

2. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3+f(x)}{x^2}=$ ______.

3. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+2x+1}+x+2}{\sqrt{x^2+\cos x}}=$ ______.

4. 设 $[x]$ 表示 x 的最大整数部分，则 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{3}{x}\right]=$ ______.

5. 设 $f(x)$ 连续，且当 $x\to 0$ 时，$F(x)=\int_0^x(x^2+1-\cos t)f(t)\mathrm{d}t$ 是与 x^3 等价的无穷小量，则 $f(0)=$ ______.

二 选择题

1. 当 $x\to 0$ 时，下列无穷小量中阶数最高的是(　　).

(A) $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$　　(B) $3x^3-4x^4+5x^5$

(C) $\mathrm{e}^{x^2}-\cos x$　　(D) $\int_0^{1-\cos x}\dfrac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t$

2. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $f(x)<g(x)$，则必有(　　).

(A) $f(-x)>g(-x)$　　(B) $f'(x)<g'(x)$

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$　　(D) $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t<\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$

3. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^n-3x^{-n}}{x^n+x^{-n}}\sin\dfrac{1}{x}$，则 $f(x)$ 有(　　).

(A) 两个第一类间断点　　(B) 三个第一类间断点

(C) 两个第一类间断点和一个第二类间断点　　(D) 一个第一类间断点和一个第二类间断点

4. 下列函数：① $\dfrac{\sin x}{x^2}$；② $\dfrac{x^2-1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}$；③ $\arctan\dfrac{|x|}{x\ln(1-x)}$. 在 $(0,1)$ 内有界的有(　　)个.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

5. 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^4}=-2$，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处(　　).

(A) 不可导　　(B) 可导且 $f'(a)\neq 0$

(C) 有极大值　　　　(D) 有极小值

三 解答题

1. 讨论函数 $f(x)=xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界性.

2. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,以 T 为周期,令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$. 求证:

(1) $F(x)=kx+\varphi(x)$,其中 k 为某常数,$\varphi(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$.

3. 设 $f(x)$ 具有连续导数,且满足 $f(x)=x+\int_0^x tf'(x-t)dt$. 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)dt}{\sqrt{1+x^4}-1}$.

5. 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\arctan x}$.

6. 已知曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=x-1$,求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2\ln\cos x}\int_0^{x^2}e^t f(1+e^{x^2}-e^t)dt$.

7. 设 $f(x)=nx(1-x)^n(n=1,2,\cdots)$,$M_n$ 是 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}M_n$.

8. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{|\sin x|}{\ln(1+x)}\right]$.

9. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(xe^{2x})-\cos(xe^{-2x})}{x^3}$.

10. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3\ln\dfrac{x+1}{x-1}-2x^2\right)$.

11. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内可导,且 $f(a)\neq0$,$a\neq0$,求极限 $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{1}{(x-a)f(a)}-\dfrac{1}{\int_a^x f(t)dt}+\dfrac{1}{2x-a}\right]$.

12. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

13. 设 $1\leqslant x<+\infty$ 时,$0<f'(x)<\dfrac{1}{x^2}$,且 $f'(x)$ 连续,证明:极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ 存在.

14. 设 $x_1=10$,$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}(n=1,2,\cdots)$,证明:极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求此极限值.

15. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+k^2+1}$(用定积分求极限).

16. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$.

17. 设 $f(x)$ 是满足 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=-1$ 的连续函数,且当 $x\to0$ 时,$\int_0^x f(t)dt$ 是与 x^n 同阶的无穷小量,求正整数 n.

18. 设 $f(x)$ 具有连续的二阶导数,且 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3$. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

19. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\dfrac{1}{n}-\arctan\dfrac{1}{n+1}\right)$.

20. 求极限 $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^3\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$.

21. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0, f''(0)\neq 0$，

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x^\alpha-\sin x}=\beta(\beta\neq 0)$，求 α、β(其中 $\beta\neq 0$)。

22. 设 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 内连续，在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)\neq 0$。

(1) 求证：对任给的 $0<x<a$，存在 $0<\theta<1$，使 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$.

(2) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta$.

23. 已知抛物线 $y=px^2(p>0)$.

(1) 计算抛物线在直线 $y=1$ 下方的弧长 l.

(2) 求极限 $\lim\limits_{p\to\infty} l$.

24. 设 $f(1)=0, f'(1)=a$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2f(\mathrm{e}^{x^2})}-\sqrt{1+f(1+\sin^2 x)}}{\ln\cos x}$.

25. 设 $g(x)$ 是微分方程 $g'(x)+g(x)\sin x=\cos x$ 满足条件 $g(0)=0$ 的解，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}$.

26. 设 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-1}{x}=a$，

已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^1 g(x^2t)\,\mathrm{d}t-1}{x^2}, & x<0\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\\ \dfrac{a+b\cos x}{x^2}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a,b.

27. 设 $f(x)=\begin{cases}(x+2)\arctan\dfrac{1}{x^2-4}, & x\neq\pm 2\\ 0, & x=\pm 2\end{cases}$，讨论函数 $f(x)$ 的连续性，若有间断点，指明其类型.

分析解答

一 填空题

1. 应填 1.

解 $f[g(x)]=\begin{cases}1-g(x), & g(x)\leqslant 0\\ 1+g^2(x), & g(x)>0\end{cases}$，

而 $g(x)\leqslant 0\Leftrightarrow x\geqslant 0$，$g(x)>0\Leftrightarrow x<0$，

所以
$$f[g(x)]=\begin{cases}1+x^4, & x<0\\ 1+x^3, & x\geqslant 0\end{cases},$$

又因为
$$\lim_{x\to 0^-}f[g(x)]=\lim_{x\to 0^-}(1+x^4)=1,$$
$$\lim_{x\to 0^+}f[g(x)]=\lim_{x\to 0^+}(1+x^3)=1.$$

因此
$$\lim_{x\to 0}f[g(x)]=1.$$

评注：此题可不必求出 $f[g(x)]$.
$$\lim_{x\to 0^-}f[g(x)]=\lim_{x\to 0^-}f(x^2)=\lim_{x\to 0^-}(1+x^4)=1,$$
$$\lim_{x\to 0^+}f[g(x)]=\lim_{x\to 0^+}f(-x^3)=\lim_{x\to 0^+}(1+x^3)=1.$$

因此 $\lim\limits_{x\to0}f[g(x)]=1.$

2. 应填$\dfrac{9}{2}$.

解 $$\lim_{x\to0}\frac{3+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3x+xf(x)}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin3x+xf(x)}{x^3}+\lim_{x\to0}\frac{3x-\sin3x}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{3-3\cos3x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos3x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3\sin3x}{2x}=\frac{9}{2}.$$

3. 应填 2.

解 分子分母同除以 x，须注意 x 为负.
$$原式=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{9+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1+\dfrac{2}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{\cos x}{x^2}}}=\frac{-3+1}{-1}=2.$$

评注：应注意 x 的符号，若改为 $x\to\infty$，则此极限不存在.

4. 应填 3.

解 因为$\dfrac{3}{x}-1<\left[\dfrac{3}{x}\right]\leqslant\dfrac{3}{x}$，

当 $x>0$ 时， $3-x<x\left[\dfrac{3}{x}\right]\leqslant3$，

当 $x<0$ 时， $3\leqslant x\left[\dfrac{3}{x}\right]<3-x$.

由夹逼准则，有 $\lim\limits_{x\to0^+}x\left[\dfrac{3}{x}\right]=\lim\limits_{x\to0^-}x\left[\dfrac{3}{x}\right]=3.$

所以，$\lim\limits_{x\to0}x\left[\dfrac{3}{x}\right]=3.$

评注：利用夹逼定理求极限是一种重要的方法，关键是找出两个特殊的函数(或数列).

5. 应填$\dfrac{6}{7}$.

解 由等价无穷小量的定义及洛必塔法则，可得
$$1=\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x(1-\cos t)f(t)\mathrm{d}t\right]$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{3x^2}\left[2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+(x^2+1-\cos x)f(x)\right]$$
$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}+\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{x^2+1-\cos x}{x^2}f(x)$$
$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}f(x)+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot f(0)$$
$$=\frac{7}{6}f(0).$$

所以，$f(0)=\dfrac{6}{7}$.

评注：含参数的变限积分，不能直接求导，必须经变量替换将参变量提至积分号外再求导.

二 选择题

1. 应选(D).

解 当 $x\to0$ 时

$$\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}=\frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}\sim x^2,$$

$$3x^3-4x^4+5x^5=x^3(3-4x+5x^2)\sim 3x^3,$$

$$e^{x^2}-\cos x=1+x^2+\theta(x^2)-\left[1-\frac{1}{2}x^2+\theta(x^2)\right]=\frac{3}{2}x^2+\theta(x^2)\sim\frac{3}{2}x^2$$

$\int_0^{1-\cos x}\frac{\sin t^2}{t}dt$ 由$\int_0^u\frac{\sin t^2}{t}dt$ 与 $u=1-\cos x$ 复合而成. 当 $x\to 0$ 时，$\frac{\sin x^2}{x}\sim x$，$\int_0^x\frac{\sin t^2}{t}dt$ 与 x^2 同阶，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$. 所以，当 $x\to 0$ 时，$\int_0^{1-\cos x}\frac{\sin t^2}{t}dt$ 是 x 的$2\times 2=4$ 阶无穷小．故选(D).

2. 应选(C).

解　由 $f(x)$、$g(x)$ 可导知，$f(x)$、$g(x)$ 连续. 于是有：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$.

又 $f(x_0)<g(x_0)$，所以有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$. 故选(C).

评注：本题也可用排除法．取 $f(x)=x$，$g(x)=x+1$，则 $f(x)<g(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$. 但(A)，(B)，(D) 不成立，故选(C).

3. 应选(C).

解　注意到当 $|x|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$，当 $|x|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\infty$，易求得

$$f(x)=\begin{cases}-3\sin\frac{1}{x}, & 0<|x|<1\\ -\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}, & |x|=1\\ 2\sin\frac{1}{x}, & |x|>1\end{cases},$$

可见，$x=-1$ 和 $x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点，而 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，故选(C).

评注：函数 $f(x)$ 的间断点 x_0 分为两类：$f(x)$ 在 x_0 的左、右极限存在的间断点称为第一类间断点，其中左、右极限相等的间断点称为可去间断点．$f(x)$ 在 x_0 的左、右极限至少有一个不存在的间断点称为第二类间断点.

4. 应选(B).

解　$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x^2}=+\infty$，　$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{1-x}}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)e^{\frac{1}{1-x}}=+\infty$，

而　$\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\frac{|x|}{x\ln(1-x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\frac{1}{\ln(1-x)}=-\frac{\pi}{2}$，

$\lim\limits_{x\to 1^-}\arctan\frac{|x|}{x\ln(1-x)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\arctan\frac{1}{\ln(1-x)}=0$.

所以，只有函数 $\arctan\frac{|x|}{x\ln(1-x)}$ 在$(0,1)$ 内有界. 故选(B).

评注：判断函数的有界性除了用定义及已知函数的有界性外，下列结论也是很有用的：设 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，若$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 及$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在(a,b) 内有界.

5. 应选(C).

解　由局部保号性定理，存在 a 的去心邻域$\mathring{U}(a)$，使得

当 $x\in\mathring{U}(a)$ 时，$\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^4}<0$，即　$f(x)<f(a)$，

而由　$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^4}(x-a)^3=(-2)\times 0=0$，

知 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，当然在 $x=a$ 处连续.

所以，$f(x)$ 在 $x=a$ 处有极大值．故选(C).

评注:注意极限表达式中隐含的连续、可导等条件及结论.

三 解答题

1. **分析** 因为 $f(x)$ 为偶函数,所以只需证明 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上有界. 要证 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上有界,只要证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

解 由 $f(-x)=(-x)\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^{-x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$ 及 $\int_0^{-x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t \xlongequal{t=-u} -\int_0^x \mathrm{e}^{u^2}\mathrm{d}u=-\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$ 可知:$f(-x)=f(x)$. 所以,$f(x)$ 是偶函数. 只需证明 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上有界.

又

$$\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\frac{1}{x}\mathrm{e}^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2\mathrm{e}^{x^2}-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

于是,对于 $\varepsilon=\frac{1}{2}$,存在 $A>0$,当 $x>A$ 时,有

$$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2},$$

即当 $x>A$ 时,有 $0<f(x)<1$.

因为 $f(x)$ 在$[0,A]$上连续,因此,$f(x)$ 在$[0,A]$上有界,注意到在$[0,+\infty)$ 上 $f(x)\geqslant 0$. 故,$\exists M_1>0$,使得 $\forall x\in[0,A]$,有 $0\leqslant f(x)\leqslant M_1$. 取 $M=\max\{1,M_1\}$,则对 $\forall x\in[0,+\infty)$,有 $0\leqslant f(x)\leqslant M$. 从而可知,对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,有 $0\leqslant f(x)\leqslant M$.

评注:

(1) 要判断函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上的有界性,需考察 $f(x)$ 在间断点 x_0 及在无穷远点的极限. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,则 $f(x)$ 在 x_0 附近有界,若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 存在,则 $f(x)$ 在 x_0 的左邻域内有界,若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 存在,则 $f(x)$ 在 x_0 的右邻域内有界. 若 $f(x)$ 在(a,b) 内连续,又 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$,$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 均存在,则 $f(x)$ 在(a,b) 内有界.

在闭区间上连续函数一定有界,但在开区间上不连续的函数也可能有界. 例如:

$$f(x)=\begin{cases} x, & x>0\\ 1, & x=0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

$f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续,但 $f(x)$ 在$(-1,1)$ 内有界.

(2) 在本题的证明中取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$(或取其他一个确定的正数)是非常必要的. 如果用"$\forall\varepsilon>0$, $\exists A>0$,当 $x>A$ 时,有 $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$"来证明 $f(x)$ 在$[A,+\infty)$ 上有界就是错误的,因为此时的"界"不确定.

(3) 用变量替换可证明 $f(x)$ 与其原函数 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的奇偶性有着密切的联系:

若 $f(x)$ 连续,则

1) $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为奇(偶)函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 为偶(奇)函数.

2) $\forall a\in\mathbf{R}$, $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 为奇函数.

2. **分析** 只要确定常数 k,使得 $\varphi(x)=F(x)-kx$ 以 T 为周期.

解 (1) 由 $\varphi(x+T)=F(x+T)-k(x+T)$

$$=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-kx+\int_x^{x+T}f(t)\mathrm{d}t-kT$$

$$=\varphi(x)+\int_0^T f(t)\mathrm{d}t-kT\quad\left(\int_x^{x+T}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\right)$$

令 $k=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$，则 $\varphi(x)=F(x)-kx$ 是以 T 为周期的周期函数. 从而有 $F(x)=kx+\varphi(x)$.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不一定存在，所以不能用洛必塔法则求该极限.

但 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 可写成：

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续且以 T 为周期. 于是 $\varphi(x)$ 在 $[0,T]$ 上有界，在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，所以，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t&=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\\&=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t.\text{（无穷小量与有界变量的乘积仍为无穷小量）}\end{aligned}$$

评注：

(1) 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，则有如下结论：

1) $f(x)$ 的原函数 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是以 T 为周期的函数的充分必要条件是 $\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=0$.

2) $\forall a\in\mathbf{R}$，$\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$.

3) $\int_0^{nT}f(x)\mathrm{d}x=n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$.

(2) 对“$\frac{0}{0}$”和“$\frac{\infty}{\infty}$”型极限，当 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为无穷大量时，可由洛必塔法则得知

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

但当 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在且不为无穷大量时，不能断定 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在.

3. **分析** $f(x)$ 的表达式中含有参变量的积分，应经变量替换将参变量移至积分号外或积分限上，再求极限.

$$\begin{aligned}\int_0^x tf'(x-t)\mathrm{d}t&\xlongequal{x-t=u}\int_0^x(x-u)f'(u)\mathrm{d}u\\&=x\int_0^x f'(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf'(u)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

将参变量 x 提到积分号外后，已知条件可化为：

$$f(x)=x+x\int_0^x f'(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf'(u)\mathrm{d}u.$$

解 由已知条件 $f(x)=x+\int_0^x tf'(x-t)\mathrm{d}t$ 可化为

$$f(x)=x+x\int_0^x f'(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf'(u)\mathrm{d}u.$$

两边对 x 求导，得：

$$\begin{aligned}f'(x)&=1+\int_0^x f'(u)\mathrm{d}u+xf'(x)-xf'(x)\\&=1+f(x)-f(0)\\&=1+f(x)\quad(f(0)=0).\end{aligned}$$

于是，$f(x)=\mathrm{e}^x-1$. 所以 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x-1)=-1$.

评注:

(1) 本题的关键是求出 $f(x)$ 的表达式. 当已知条件是由积分方程给出时,通过求导可得出 $f(x)$ 所满足的微分方程:

$$f'(x)-f(x)=1,\quad f(0)=0.$$

由通解公式,可得通解为:

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\int(-1)\mathrm{d}x}\left[\int 1\cdot \mathrm{e}^{\int(-1)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right]=c\mathrm{e}^x-1.$$

由 $f(0)=0$,得 $f(x)=\mathrm{e}^x-1$.

一般地,一阶线性微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的通解为:

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right].$$

(2) 在计算含参变量的积分时,应通过变量替换将参变量提至积分号外或积分限上,再作计算.

4. **分析** 是"$\frac{0}{0}$"型,用洛必塔法则,且当 $x\to 0$ 时,$\sqrt{1+x^4}-1\sim\frac{1}{2}x^4$,$\ln(1+x)\sim x$,$\sin^2x\sim x^2$.

解 原式 $=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin^2x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{x^4}$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2x)\cdot 2\sin x\cos x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2x)}{x^2}\cdot\frac{\sin x}{x}$$

$$=1.$$

5. **分析** 当 $x\to 0^+$ 时,$x^x=\mathrm{e}^{x\ln x}\to 1$,$\arctan x\sim x$,$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$,$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x-1\to 0$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x^x\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x-1\right]}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^3}$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left[\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)+1\right]}{x^2}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$=\frac{1}{6}.$$

评注:洛必塔法则是求"$\frac{0}{0}$"和"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式的重要工具,为了避免复杂的计算,减少错误,在使用该工具之前,应尽可能综合运用四则运算、连续性、恒等变形、等价无穷小替换和变量代换等方法进行简化.

在本题中我们分离出极限为 1 的因子 x^x,使函数中"$\frac{0}{0}$"型未定式部分 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x-1}{x^3}$ 更为突出,并利用恒等变形,简化了后面的计算. 否则,如果直接用洛必塔法则,就会很麻烦.

6. **分析** 由已知,$f(1)=0$,$f'(1)=1$,有 $\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{f(u)}{u-1}=1$.

当 $x\to 0$ 时,$\ln\cos x=\ln[1+(\cos x-1)]\sim\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2$.

令 $1+\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^t=u$,$\int_0^{x^2}\mathrm{e}^tf(1+\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^t)\mathrm{d}t=\int_1^{\mathrm{e}^{x^2}}f(u)\mathrm{d}u$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_1^{\mathrm{e}^{x^2}}f(u)\mathrm{d}u}{x^2\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}=-2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_1^{\mathrm{e}^{x^2}}f(u)\mathrm{d}u}{x^4}$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{f(e^{x^2})\cdot e^{x^2}\cdot 2x}{4x^3}=-\lim_{x\to 0}\frac{f(e^{x^2})}{x^2}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{f(e^{x^2})}{e^{x^2}-1}\cdot\frac{e^{x^2}-1}{x^2}=-f'(1)$$

$$=-1.$$

评注:在求极限时要注意重要条件的应用.例如:

(1)$f(x_0)=0,f'(x_0)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}=A$　($f(x)$ 在 x_0 连续).

(2)若 $f'(x_0)$ 存在,且$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=x_0$,则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f[g(x)]-f[h(x)]}{x-x_0}=f'(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-h(x)}{x-x_0}.$$

7. **分析**　先求 $f(x)$ 在$[0,1]$上的最大值 M_n,再求极限.

解　$f'(x)=n(1-x)^n-n^2x(1-x)^{n-1}$.

令　$f'(x)=0$,得 $n^2x(1-x)^{n-1}=n(1-x)^n$,即 $nx=1-x$.于是得驻点 $x=\dfrac{1}{n+1}$.

又 $f''\left(\dfrac{1}{n+1}\right)<0$,所以 $M_n=f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{n}{n+1}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n$ 为 $f(x)$ 在$(0,1)$内的极大值.

比较 $f(0)=0,f(1)=0$ 和 M_n 可知,$f(x)$ 在$[0,1]$上的最大值为 $M_n=f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{n}{n+1}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n$.

故$\lim\limits_{n\to\infty}M_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n=\dfrac{1}{e}$.

评注:本题的极限是"1^∞"型未定式,其一般形式为 $\lim f(x)^{g(x)}$,其中 $\lim f(x)=1,\lim g(x)=\infty$.为求极限,也可先将幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 化为指数型复合函数 $e^{g(x)\ln f(x)}$,利用等价无穷小量替换定理:

$$\ln f(x)=\ln[1+(f(x)-1)]\sim f(x)-1,$$

可得:

$$\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}=e^{\lim g(x)[f(x)-1]}.$$

于是,将求幂指函数的极限 $\lim f(x)^{g(x)}$ 转化为求积函数的极限 $\lim g(x)[f(x)-1]$.

8. **分析**　$\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$ 不存在,求极限时要考虑单侧极限.

解　因为　$\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{|\sin x|}{\ln(1+x)}\right]$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\lim_{x\to 0^-}\frac{|\sin x|}{\ln(1+x)}$$

$$=2-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=2-1=1.$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{|\sin x|}{\ln(1+x)}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{2}{e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}}}{\dfrac{1}{e^{\frac{2}{x}}}+1}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0+1=1.$$

所以　$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{|\sin x|}{\ln(1+x)}\right]=1.$

评注:若在求极限时,涉及$\lim\limits_{x\to\infty}e^x$,$\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$,$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 等时,一定要考虑单侧极限.

9. **分析**　直接用洛必塔法则将会导致复杂的计算,所以,该题用恒等变形或用台劳公式进行化简.

解 方法一:原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin\dfrac{xe^{2x}+xe^{-2x}}{2}\sin\dfrac{xe^{2x}-xe^{-2x}}{2}}{x^3}$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{x^2(e^{2x}+e^{-2x})(e^{2x}-e^{-2x})}{4x^3}$$

$$=-4.$$

方法二:由台劳公式(麦克劳林公式),当$x\to 0$时,有

$$\cos(xe^{2x})=1-\frac{x^2e^{4x}}{2}+o(x^3),$$

$$\cos(xe^{-2x})=1-\frac{x^2e^{-4x}}{2}+o(x^3).$$

于是,原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{x^2e^{4x}}{2}-1+\dfrac{x^2e^{-4x}}{2}+o(x^3)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-4x}-e^{4x}}{2x}+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3}$$

$$=-2\lim_{x\to 0}(e^{-4x}+e^{4x})$$

$$=-4.$$

评注:

(1) 极限中的函数若具有二阶以上的导函数,可直接用台劳公式进行简化.

(2) 该题也可以用如下方法求解:

当$u\to 0$时,$1-\cos u\sim\dfrac{1}{2}u^2$,于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(xe^{2x})-\cos(xe^{-2x})}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{[1-\cos(xe^{-2x})]-[1-\cos(xe^{2x})]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(\frac{x^2e^{-4x}}{2}-\frac{x^2e^{4x}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-4x}-e^{4x}}{x}$$

$$=-4.$$

尽管用这种方法得到了与前面相同的结果,但必须指出,在和、差中用等价无穷小量作代换时,一定要非常谨慎.

若当$x\to\square$时,$\alpha(x)\sim u(x)$,$\beta(x)\sim v(x)$,则只有当$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}\neq -1$时,才能用$\lim\limits_{x\to\square}[\alpha(x)+\beta(x)]=\lim\limits_{x\to\square}[u(x)+v(x)]$. 这是因为将$\alpha(x)+\beta(x)$用$u(x)+v(x)$替代后所产生误差之大小,只有用台劳公式才能说清楚.

10. **分析** 作变量代换$x=\dfrac{1}{t}$,再用洛必塔法则.

解 令$x=\dfrac{1}{t}$,

$$原式=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^3}\ln\frac{1+t}{1-t}-\frac{2}{t^2}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-\ln(1-t)-2t}{t^3}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+t}+\dfrac{1}{1-t}-2}{3t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{2t^2}{3t^2(1-t^2)}=\frac{2}{3}.$$

评注:在用常见方法(如四则运算,重要极限,等价无穷小量替换等)不能求解极限时,变量替换是一种行之有效的方法. 在本题中,作恰当的变量替换$x=\dfrac{1}{t}$,从而该极限的计算便可迎刃而解,值得注意的是,倒