21世纪高等院校教材
数学基础教程系列

数学分析(二)

徐志庭　刘名生　冯伟贞 编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

数学基础教程系列

数学分析(二)

徐志庭　刘名生　冯伟贞　编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书介绍了数学分析的基本概念、基本理论和方法，包括一元(多元)函数极限理论、一元函数微积分学、级数理论和多元函数微积分学等. 全书共分三册. 本册内容包括不定积分、定积分、定积分应用和反常积分、数项级数、函数项级数、幂级数与 Fourier 级数. 本书在内容的安排上深入浅出，表达清楚，系统性和逻辑性强. 书中列举了大量例题来说明数学分析的定义、定理及方法，并提供了丰富的思考题和习题，便于教师教学与学生自学. 每章末都有小结，对该章的主要内容作了归纳和总结，并配有复习题，方便学生系统复习.

本书可作为高等师范院校数学各专业学生的教学用书，也可供相关专业的教师和科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析. 2/徐志庭，刘名生，冯伟贞编. —北京：科学出版社，2009

21 世纪高等院校教材. 数学基础教程系列

ISBN 978-7-03-026201-1

I. 数… II. ①徐… ②刘… ③冯… III. 数学分析-高等学校-教材 IV. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009) 第 227656 号.

责任编辑：姚莉丽 房 阳 / 责任校对：刘小梅
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

骏 杰 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 12 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2009 年 12 月第一次印刷 印张：15 1/4
印数：1—4 000 字数：305 000

定价：25.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前言

数学分析是数学各专业的学科基础课，其重要性不言而喻. 我们根据多年的教学经验，在吸取一些现有教材优点的基础上，编写了本书.

现有的各种数学分析教材都有其优点和缺点. 本书力求在可读性、系统性和逻辑性上能具有特色，并将分层教学的理念贯穿全书.

首先，在可读性方面，对于重要概念只给一种定义形式，其他的等价定义一般放在思考题或习题中. 例如，对数列极限，本书只引入了 ε-N 定义，目的是希望学生能吃透这个概念；数列极限的另一个等价定义放在习题中，方便基础较好的学生学习. 对定理的证明，尽量采用朴素的方法进行. 对书中的例题，表达尽量详细，让学生容易自学. 对某些定理采取先用后证的方法讲述. 例如，在第 7 章，先给出区间上的连续函数必定存在原函数这个结论，这样就可以介绍求不定积分的各种方法；在第 8 章，先给出闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数必定在 $[a,b]$ 上可积这个结论，这样可以使定积分的计算提前，然后在第 8 章后面再证明这两个存在性定理.

其次，在系统性方面，将关系较密切的内容放在一起. 例如，将发散数列和子列的概念放在同一节，将判别数列收敛的各种方法放在同一节，将定积分的应用与反常积分放在同一章，将各种情况下的 Fourier 级数和 Fourier 级数展开放在同一节，将第一型曲线积分、曲面积分和第二型曲线积分、曲面积分放在同一章，将各种积分之间的关系放在同一章等. 另外，有理函数分解为部分分式的理论，国内的数学分析教材几乎都将其证明归到高等代数课程中，而高等代数教材也不写这部分内容. 为了弥补这一缺陷，在本书的第 7 章中，将给出有理函数分解为部分分式理论的详细证明，方便教师教学与学生自学.

再次，在逻辑性方面，考虑到可读性的同时，尽量在给出定理的同时也完成对定理的证明. 例如，将致密性定理放在第 1 章，这样数列的柯西收敛准则在第 1 章就可以证明，使得第 1 章对数列有较完整的处理；然后在第 3 章就可以完成闭区间上连续函数性质的证明；第 6 章就只需讲区间套定理、有限覆盖定理及其应用等，这样难点也分散了. 在导数与微分部分，先讲微分，后讲导数，强调微分的作用，这样在后面讲定积分的微元法时，我们将给出微元法的理论依据.

考虑到不同教学基础的学校和不同层次的学生在教与学方面有不同的需求，我

们在较充分顾及系统的完整性的基础上, 通过小 5 号字和“*”标记本书中的选学内容. 对选学内容的处理可以很灵活, 如第 1 章中致密性定理内容可以留到第 6 章处理或只作简要介绍.

本书分三册出版.《数学分析 (一)》讲述一元函数极限理论和一元函数微分学, 它的内容包括: 数列极限与确界原理、函数的概念及其性质、函数极限与连续性、函数的导数与微分、微分中值定理及其应用、函数的极值和凸性及作图、实数集的稠密性与完备性.《数学分析 (二)》讲述一元函数积分学和级数理论, 它的内容包括: 不定积分和定积分、定积分的应用与反常积分、数项级数、函数项级数、幂级数和 Fourier 级数.《数学分析 (三)》讲述多元函数极限论和多元函数微积分学, 它的内容包括: 多元函数极限与连续性、多元函数微分学、隐函数理论、多元函数积分学.

《数学分析 (一)》的初稿由刘名生教授、冯伟贞副教授和韩彦昌副教授编写,《数学分析 (二)》的初稿由徐志庭教授、刘名生教授和冯伟贞副教授编写,《数学分析 (三)》的初稿由耿堤教授、易法槐教授和丁时进教授编写. 初稿完成后, 编写组全体成员多次仔细讨论、评阅和修改. 全书由刘名生教授和冯伟贞副教授负责编写组织工作.

中山大学林伟教授和福州大学朱玉灿教授审阅了本书并提出许多宝贵意见, 陈奇斌老师绘制了本册书的所有插图, 在此对他们表示衷心感谢.

本书在编写过程中得到华南师范大学数学科学学院许多同事的支持, 并得到广东省名牌专业建设专项经费、国家特色专业建设点专项经费及 2008 年度华南师范大学校级教改项目的资助. 我们在华南师范大学数学科学学院 08 级师范班的数学分析课程中试用了本书, 08 级师范班的学生为本书的完善提供了许多宝贵意见, 在此一并致谢.

作为新教材, 书中的疏漏和不足在所难免, 敬请读者批评指正.

编　者
华南师范大学
2009 年 6 月

使用说明

1. 本书应用分层教学思想编写, 较难内容使用小 5 号字或用“*”号标注, 教师可根据不同层次的班级选讲部分小 5 号字或标“*”号的内容.

2. 讲授本书的建议最少教学学时是 80 学时, 最多教学学时是 94 学时. 具体地说, 第 7 章: 10 学时; 第 8 章: 16~18 学时; 第 9 章: 14~16 学时; 第 10 章: 12~16 学时; 第 11 章: 12~14 学时; 第 12 章: 16~20 学时.

3. 习题分三级配置:

第一级为思考题, 每节都有, 目的是让学生通过自己做思考题理解所学的概念和定理及方法;

第二级为作业题, 即每节后面的习题, 供老师布置作业用, 要求学生全部完成;

第三级为扩展题, 放在每章后面的复习题中, 中间用一条横线分为两部分, 横线上的题供学生复习使用, 横线下的题较难, 供学有余力的学生复习使用.

4. 每章末配有小结, 总结该章所学的知识点、概念和方法等, 方便学生复习.

目　录

第 7 章　不定积分

7.1　原函数与不定积分的概念

7.1.1　原函数和不定积分的定义

如果函数 $f(x)$ 在某区间上可微, 根据第 4 章的知识, 它有微分 $f'(x)\mathrm{d}x$ 或导函数 $f'(x)$, 这是微分学解决的问题. 在科学实践中, 也常常遇到相反的问题, 即已知一个函数的微分或导函数, 要求出该函数, 这是积分学要解决的问题. 由此引入原函数与不定积分的概念.

定义 7.1.1　设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 若存在 I 上的函数 $\varPhi(x)$, 使对任意 $x\in I$ 有

$$\mathrm{d}\varPhi(x)=f(x)\mathrm{d}x \quad 或 \quad \varPhi'(x)=f(x),$$

则称 $\varPhi(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个**原函数**. 函数 $f(x)$ 在区间 I 上的全体原函数称为 $f(x)$ 在 I 上的**不定积分**, 记作

$$\int f(x)\mathrm{d}x, \tag{7.1.1}$$

其中称 $f(x)$ 为**被积函数**, 称 $f(x)\mathrm{d}x$ 为**被积表达式**, 称 x 为**积分变量**.

例 1　试证明函数 $\dfrac{1}{5}x^5, -\cos x, \mathrm{e}^x$ 分别是函数 $x^4, \sin x, \mathrm{e}^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的原函数.

证明　因为对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有

$$\left(\frac{1}{5}x^5\right)'=x^4, \quad (-\cos x)'=\sin x, \quad (\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x,$$

所以函数 $\dfrac{1}{5}x^5, -\cos x, \mathrm{e}^x$ 分别是 $x^4, \sin x, \mathrm{e}^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的原函数. □

注　由定义 7.1.1 知不定积分与原函数是总体与个体的关系. 于是存在原函数与存在不定积分是等价的说法.

关于原函数, 有如下两个理论问题:

(1) 原函数的存在性问题, 即满足什么条件的函数必定存在原函数? 这里先给出结论: 若 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 则 $f(x)$ 在区间 I 上存在原函数. 其证明将在 8.2 节给出.

(2) 原函数的结构：如果已知某个函数的原函数存在，那么它的任何两个原函数之间有什么关系？下面的定理回答了这个问题.

定理 7.1.1　设 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，则对于任意实常数 C，$\Phi(x)+C$ 也是 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数，并且 $\{\Phi(x)+C|C\in\mathbb{R}\}$ 就是 $f(x)$ 在 I 上的全部原函数.

证明　(1) 对于任意实常数 C，因为

$$[\Phi(x)+C]'=\Phi'(x)=f(x),\quad x\in I,$$

所以 $\Phi(x)+C$ 也是 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数.

(2) 设 $\Psi(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的任一原函数，则 $\Psi'(x)=f(x)\,(\forall x\in I)$，于是

$$[\Psi(x)-\Phi(x)]'=\Psi'(x)-\Phi'(x)=f(x)-f(x)\equiv 0,\quad \forall x\in I.$$

根据推论 5.2.1 得

$$\Psi(x)-\Phi(x)\equiv C,\quad \forall x\in I,$$

故 $\Psi(x)\equiv\Phi(x)+C\ (x\in I)$，从而 $\{\Phi(x)+C|C\in\mathbb{R}\}$ 就是 $f(x)$ 在 I 上的全部原函数.　□

注　定理 7.1.1 说明要求全体原函数，只需求出任意一个原函数，因此，若 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的不定积分是一个函数族 $\{\Phi(x)+C|C\in\mathbb{R}\}$. 为方便起见，写作

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\Phi(x)+C. \tag{7.1.2}$$

这时又称 C 为**积分常数**. 由此可得导数 (或微分) 与不定积分的如下关系：

$$\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}[\Phi(x)+C]=f(x)\mathrm{d}x, \tag{7.1.3}$$

$$\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=\left[\Phi(x)+C\right]'=f(x), \tag{7.1.4}$$

$$\int \Phi'(x)\mathrm{d}x=\Phi(x)+C. \tag{7.1.5}$$

这样由例 1 和 (7.1.2) 式可得

$$\int x^4\mathrm{d}x=\frac{1}{5}x^5+C,\quad \int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C,\quad \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C.$$

下面讨论不定积分的**几何意义**. 函数 $f(x)$ 的原函数 $y=\Phi(x)$ 是那样的曲线，在它上面任意一点 $(x,\Phi(x))$ 的切线的斜率等于 $f(x)$，也称原函数 $y=\Phi(x)$ 的图像

为 $f(x)$ 的一**条积分曲线**. 于是 $f(x)$ 的不定积分在几何上表示 $f(x)$ 的某一条积分曲线沿纵轴方向任意平移所得的一切积分曲线组成的**曲线族**, 如图 7.1 所示.

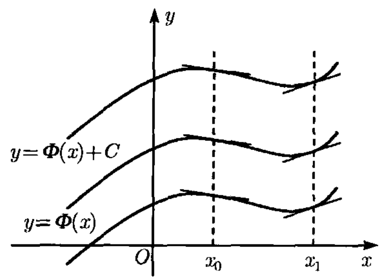

图 7.1

例 2 已知一物体自由下落, 时间 $t=0$ 时的高度为 10m, 初速度为 0, 试求物体下落的规律.

解 取一条垂直向下的直线作 x 轴, 直线与地面的交点为坐标原点, 则 $v(0)=0$, $s(0)=-10\mathrm{m}$. 因为物体只受地球引力作用, 加速度为常数 $g=9.81\mathrm{m/s^2}$, 所以

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g, \quad v(0)=0,$$

因此 $v(t)=\int g\mathrm{d}t=gt+C$, 其中 C 不能任意取, 它由初始速度确定.

由 $v(0)=0$ 得 $C=0$, 故得物体自由下落的速度变化规律为 $v(t)=gt$.

又由于 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=gt$, $s(0)=-10$, 所以

$$s(t)=\int gt\mathrm{d}t=\frac{1}{2}gt^2+C'.$$

利用初始位置 $s(0)=-10$ 得 $C'=-10$, 故得物体自由下落的规律为

$$s(t)=\frac{1}{2}gt^2-10. \qquad \square$$

7.1.2 运算性质和基本积分公式

利用导数的线性运算性质及不定积分的定义, 易得不定积分的线性运算性质.

定理 7.1.2(线性性质) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 I 上都存在原函数, α,β 为任意两个实常数, 则 $\alpha f(x)+\beta g(x)$ 在 I 上也存在原函数且

$$\int[\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x=\alpha\int f(x)\mathrm{d}x+\beta\int g(x)\mathrm{d}x. \tag{7.1.6}$$

一般地, 若 $f_i(x)$ 在区间 I 上都存在原函数, α_i 为任意实常数, $i=1,2,\cdots,n$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x)$ 在 I 上也存在原函数且

$$\int\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x)\right]\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\int f_i(x)\mathrm{d}x. \tag{7.1.7}$$

由基本导数公式可得如下的**基本积分公式.**

(1) $\int 0\mathrm{d}x=C$;

(2) $\int 1\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x=x+C$;

(3) $\int x^\alpha\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq-1,x>0)$;

(4) $\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C\ (x\neq0)$;

(5) $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$;

(6) $\int a^x\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C\ (a>0,a\neq1)$;

(7) $\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$;

(8) $\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$;

(9) $\int\sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C$;

(10) $\int\csc^2 x\mathrm{d}x=-\cot x+C$;

(11) $\int\sec x\cdot\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$;

(12) $\int\csc x\cdot\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$;

(13) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C=-\arccos x+C$;

(14) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x+C=-\mathrm{arccot}x+C$.

例 3　计算 $\int(10^x+3\cos x+\sqrt{x})\mathrm{d}x$.

解　根据定理 7.1.2 和基本积分公式得

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int 10^x\mathrm{d}x+3\int\cos x\mathrm{d}x+\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{10^x}{\ln 10}+3\sin x+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C.\end{aligned}$$

□

例 4　求下列不定积分:

(1) $\displaystyle\int \frac{7x+2\sqrt{x}+3}{\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int \frac{2x^3+2x+3}{x^2+1}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int \tan^2 x\mathrm{d}x$; (4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

解 根据定理 7.1.2 和基本积分公式得

(1) 原式 $\displaystyle=\int(7x^{\frac{3}{4}}+2x^{\frac{1}{4}}+3x^{-\frac{1}{4}})\mathrm{d}x=4x^{\frac{7}{4}}+\frac{8}{5}x^{\frac{5}{4}}+4x^{\frac{3}{4}}+C.$

(2) 原式 $\displaystyle=\int\frac{2x(x^2+1)+3}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\left(2x+\frac{3}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$

$=x^2+3\arctan x+C.$

(3) 原式 $\displaystyle=\int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\tan x-x+C.$

(4) 原式 $\displaystyle=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int(\sec^2 x+\csc^2 x)\mathrm{d}x$

$=\tan x-\cot x+C.$ □

思考题

公式 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C=-\arccos x+C$ 有矛盾吗?

习 题 7.1

1. 求下列不定积分:

(1) $\displaystyle\int(x^5+2x^3+8)\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int\sin x\sin 3x\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int\cos^2 x\mathrm{d}x$; (4) $\displaystyle\int\frac{x^4+3}{x^2+1}\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int\cot^2 x\mathrm{d}x$; (6) $\displaystyle\int\frac{1}{\sec^2 x\cdot\tan^2 x}\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int\frac{x-2}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$; (8) $\displaystyle\int\frac{1-x+x^2}{x+x^3}\mathrm{d}x$;

(9) $\displaystyle\int\sqrt{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$; (10) $\displaystyle\int 5^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$;

(11) $\displaystyle\int(2^x+3^{-x})^2\mathrm{d}x$; (12) $\displaystyle\int(\sin x-\cos x)^2\mathrm{d}x$.

2. 设曲线 $y=f(x)$ 上任一点 $(x,\ f(x))$ 处的切线的斜率为 e^{3x}, 并且曲线经过点 $(0,1)$, 求这条曲线的方程.

---

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x\leqslant 0,\\ 2x+1, & x>0,\end{cases}$ 试求 $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x$.

7.2 不定积分的计算

7.1 节介绍了不定积分的概念, 并说明了不定积分存在的条件. 本节在不定积分存在的前提下, 介绍求不定积分的基本方法.

7.2.1 换元法求不定积分

1. *第一换元积分法 —— 凑微分法*

求不定积分是求导的逆运算, 所以由求导公式可得到相应的积分公式. 首先由复合函数的求导法则可得

$$\mathrm{d}G(\varphi(x)) = G'(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

记 $u=\varphi(x), g(u)=G'(u)$, 则 $\mathrm{d}G(\varphi(x))=g(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x$, 于是由 (7.1.5) 式和上式可得

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = G(\varphi(x))+C,$$

由此便得如下的定理:

定理 7.2.1(第一换元积分法)　设 $u=\varphi(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上可导, $\alpha \leqslant \varphi(x) \leqslant \beta\,(x\in[a,b])$, 并且 $g(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上存在原函数 $G(u)$, 则 $f(x)=g(\varphi(x))\varphi'(x)$ 在 $[a,b]$ 上也存在原函数 $F(x)$ 且 $F(x)=G(\varphi(x))+C$, 或

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x \xlongequal{u=\varphi(x)} \int g(u)\mathrm{d}u = G(u)+C = G(\varphi(x))+C. \quad (7.2.1)$$

注　使用第一换元积分法的关键是设法把被积函数 $f(x)$ 凑成 $g(\varphi(x))\varphi'(x)$ 的形式, 以便选取变换 $u=\varphi(x)$, 化为容易求的积分 $\int g(u)\mathrm{d}u$(一般凑成基本积分公式中的形式), 所以也称为**凑微分法**. 不要忘记将 $u=\varphi(x)$ 代入最后的结果中.

例 1　求 $\int \sqrt[3]{x+5}\mathrm{d}x$.

解　令 $u=x+5$, 则

$$\text{原式} = \int u^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}u = \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}}+C = \frac{3}{4}(x+5)^{\frac{4}{3}}+C. \qquad \square$$

例 2　求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}(a\neq 0)$.

解　令 $u=\frac{x}{a}$, 则

$$\text{原式} = \frac{1}{a^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{a}\arctan u + C = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C. \qquad \square$$

例 3　求 $\int x\sin x^2\mathrm{d}x$.

解　令 $u=x^2$, 则

$$\text{原式} = \frac{1}{2}\int\sin x^2\mathrm{d}(x^2) = \frac{1}{2}\int\sin u\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\cos u+C = -\frac{1}{2}\cos x^2+C. \qquad \square$$

例 4　求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}$.

解 $$原式 = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln|x-1|-\ln|x+1|)+C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$ □

例 5 求 $\int \sin^5 x\mathrm{d}x$.

解 $$原式 = \int \sin^4 x\cdot\sin x\mathrm{d}x = -\int(1-\cos^2 x)^2\mathrm{d}\cos x$$
$$= \int(-1+2\cos^2 x-\cos^4 x)\mathrm{d}\cos x$$
$$= -\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C.$$ □

例 6 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$.

解 $$原式 = \int\frac{\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int\frac{\mathrm{d}\sin x}{1-\sin^2 x}$$
$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\right)\mathrm{d}\sin x$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C = \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}+C$$
$$= \ln|\sec x+\tan x|+C.$$ □

2. 第二换元积分法 —— 变量代换法

定理 7.2.2(第二换元积分法) 设 $x=\varphi(t)$ 在 $[a,\ b]$ 上可导, $\alpha\leqslant\varphi(t)\leqslant\beta\,(t\in[a,b])$, $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有定义. 若 $\varphi'(t)\neq 0\,(t\in[a,b])$ 且 $g(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 在 $[a,b]$ 上存在原函数 $G(t)$, 则 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上存在原函数 $F(x)$ 且 $F(x)=G(\varphi^{-1}(x))+C$, 即

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \left[\int g(t)\mathrm{d}t\right]_{t=\varphi^{-1}(x)} = G(\varphi^{-1}(x))+C. \tag{7.2.2}$$

证明 由于 $\varphi'(t)\neq 0\,(t\in[a,b])$, 根据达布定理知 $\varphi'(t)>0\,(t\in[a,b])$ 或 $\varphi'(t)<0\,(t\in[a,b])$, 于是 $x=\varphi(t)$ 在 $[a,b]$ 上严格递增或严格递减, 所以 $x=\varphi(t)$ 存在反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$ 且

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \left.\frac{1}{\varphi'(t)}\right|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

要证明 (7.2.2) 式成立, 只需证明 $G(\varphi^{-1}(x))$ 是 $f(x)$ 的原函数. 因为 $G(t)$ 是 $g(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 在 $[a,b]$ 上的原函数, 所以

$$\frac{\mathrm{d}G(\varphi^{-1}(x))}{\mathrm{d}x} = G'(t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = g(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f(x),$$