研究生教材
YANJIUSHENG JIAOCAI

矩阵论学习指导

邱启荣 编

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

研究生教材

YANJIUSHENG JIAOCAI

矩阵论学习指导

邱启荣　编

刘迎东　主审

中国电力出版社

http://jc.cepp.com.cn

内容提要

本书为研究生教材。根据由中国电力出版社出版，本书作者主编的研究生教材《矩阵理论及其应用》的内容体系，对矩阵论课程的基本概念、主要结论和常用方法做了简明扼要的分类总结，对各章的课后习题给出了习题选解或提示。全书共8章，每章都由本章要求、知识结构图、典型例题、习题选解与习题提示等部分组成。

本书可作为理工科院校硕士研究生矩阵理论课程教材的指导书，还可作为学习矩阵理论人员的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

矩阵论学习指导／邱启荣编. —北京：中国电力出版社，2010.8

ISBN 978-7-5123-0475-8

Ⅰ. ①矩…　Ⅱ. ①邱…　Ⅲ. ①矩阵－理论－研究生－教学参考资料　Ⅳ. ①O151.21

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第098153号

中国电力出版社出版、发行

（北京三里河路6号　100044　http://jc.cepp.com.cn）

北京市同江印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2010年8月第一版　　2010年8月北京第一次印刷

787毫米×1092毫米　16开本　9印张　205千字

定价15.00元

前 言

矩阵论是高等学校和研究院所工科研究生的一门重要基础课程。矩阵理论不仅是数学的一个重要分支，而且已成为现代科技领域中处理大量有限维空间形式与数量关系的强有力工具。它不仅能使所描述的问题具有极简洁的形式，而且也能使所描述的问题得以深入系统地研究。特别是计算机、计算方法的普及和发展，复杂问题线性化技术的发展与成熟，不仅为矩阵理论的应用开辟了广阔的前景，也使工程技术的研究发生了新的变化，开拓了崭新的研究途径。矩阵理论和方法对培养人的科学素质、数学思维能力、数值计算与数据处理能力等具有不可替代的作用，对于将来从事工程技术工作的研究生来说，掌握矩阵理论和方法极其重要。

矩阵论课程的理论性强，概念比较抽象，而且有其独特的数学思维方式和解题技巧。大家在学习矩阵论时，往往感到概念多、结论多、算法多，对教学内容的全面理解也感到困难。为了配合课堂教学，使研究生更好地掌握该课程的教学内容，编者根据多年从事矩阵论课程教学工作的经验，在简明的理论介绍及方法总结之后，通过对大量有代表性的典型例题进行分析、求解，揭示了矩阵论的思想和方法。阅读本书，能够帮助读者加深对矩阵理论的理解，提高数学推理能力和计算能力。

本书根据由中国电力出版社出版，本书作者主编的研究生教材《矩阵理论及其应用》的内容体系，对矩阵论课程的基本概念、主要结论和常用方法做了简明扼要的分类总结，对各章的课后习题给出了习题选解或提示。全书共 8 章，每章都由基本要求、基本概念、主要结论和常用方法，知识结构图，典型例题，习题选解与习题提示等部分组成。

本书作为我校承担的华北电力大学“211 工程”三期 2009 年创新人才培养建设项目的一部分，得到了学校、研究生院和数理系的大力支持。本书在编写过程中，参考了同行的工作，他们的工作不仅为本书的编写提供了丰富的素材，也提供了有益的借鉴。本书的主审人刘迎东对书稿进行了认真审阅，并提出了许多宝贵的意见。研究生于婷、张卉对全书进行了认真地校对。在此，作者对他们表示衷心地感谢。

限于作者水平，在本书编写过程中难免有疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

邱启荣

2010 年 8 月

目　录

第一章 线性空间

本章中采用公理化方法，将一个具有加法与数乘运算且这些运算具有与向量一样的基本性质的集合定义为线性空间．有了这一概念我们就可以用统一的方法来处理许多数学对象．

线性空间的基与维数是线性空间的重点．因为在确定了有限维线性空间的基之后，一方面明晰了线性空间的结构（由基生成整个线性空间），另一方面可将线性空间中抽象的元素及规定的运算与 $\boldsymbol{P}^n$ 中具体的向量及向量的运算相对应，从而线性空间的问题可归结为 $\boldsymbol{P}^n$ 中向量的问题．

本章的另一个重点与难点是子空间的和与直和．如果能够将一个线性空间分解为若干个子空间的直和，那么整个线性空间的研究就归结为若干个较为简单的子空间的研究．

本章通过在实数域上的线性空间中引入内积的概念得到欧氏空间，进而讨论了长度、夹角及正交等度量概念，特别是引入了欧氏空间的标准正交基这一结构特征．利用标准正交基的特性，可以使许多问题变得非常简单，这是引入标准正交基的好处．

一、本章要点

1．基本要求

理解线性空间的概念，了解线性空间的基本性质，知道一些常见的线性空间；理解线性子空间及其交与和的概念，知道子空间的直和；理解线性空间及其子空间的维数与基的概念，掌握元素的坐标与两个基之间过渡矩阵的求法，能求子空间的基．掌握内积的计算方法，会求度量矩阵，知道度量矩阵的基本性质；理解欧氏空间的概念，知道子空间的正交补概念和正交补分解定理，会求标准正交基．

2．主要概念

（1）线性空间是指引入了加法运算和数乘运算且满足八条运算律的某个数域 $\boldsymbol{P}$ 上的非空集合，通常用 $\boldsymbol{V}$ 表示．常用的线性空间有以下几类：

实行向量空间　$\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R}\}$

实列向量空间　$\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_i\in\mathbf{R}\}$

复行向量空间　$\mathbf{C}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{C}\}$

复列向量空间　$\mathbf{C}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_i\in\mathbf{C}\}$

实矩阵空间　$\mathbf{R}^{m\times n}=\{(a_{ij})_{m\times n}\mid a_{ij}\in\mathbf{R}\}$

复矩阵空间　$\mathbf{C}^{m\times n}=\{(a_{ij})_{m\times n}\mid a_{ij}\in\mathbf{C}\}$

实多项式空间　$\boldsymbol{P}_n(t)=\{a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n\mid a_i\in\mathbf{R}\}$

复多项式空间　$\boldsymbol{P}_n(t)=\{a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n\mid a_i\in\mathbf{C}\}$

三角函数空间　$W_n(t)=\{a_0+a_1\sin t+b_1\cos t+\cdots+a_n\sin nt+b_n\cos nt \mid a_k,b_k\in \mathrm{R}\}$

（2）设$\boldsymbol{V}$是数域$\boldsymbol{P}$上的一个线性空间，$\boldsymbol{V}$中满足以下两个条件的向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$称为$\boldsymbol{V}$的一个基：①$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关；②$\boldsymbol{V}$中的每一个向量都可以由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示.

其中，n称为线性空间V的维数，记作$\dim V=n$．维数为n的线性空间称为n维线性空间，记为V^n.

线性空间的基实际上是线性空间的极大线性无关组，而线性空间的维数是线性空间的极大线性无关组所含向量的个数，它反映了V的一种本质属性．在有限维线性空间V的给定基下，每一向量都有唯一确定的坐标，它相当于在给定标准下（即给定基下）对该向量的一种定量刻画.

向量空间$\mathbf{R}^n(\mathbf{C}^n)$的自然基为$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$，其中$\boldsymbol{e}_i$表示第$i$个分量为1，其余分量为0的$n$维向量；矩阵空间$\mathbf{R}^{m\times n}(\mathbf{C}^{m\times n})$的自然基为$\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\cdots,\boldsymbol{E}_{mn}$，其中$\boldsymbol{E}_{ij}$表示第$i$行第$j$列元素为1，其余元素为0的$m\times n$阶阵；多项式空间$\boldsymbol{P}_n(\boldsymbol{t})$的自然基为$1,\boldsymbol{t},\cdots,\boldsymbol{t}^n$；三角函数空间$\boldsymbol{W}_n(\boldsymbol{t})$的自然基为$1,\sin t,\cos t,\cdots,\sin nt,\cos nt$．因此这些空间的维数由表1.1所示.

表1.1　　　　常见线性空间的维数

空间	$\mathbf{R}^n(\mathbf{C}^n)$	$\mathbf{R}^{m\times n}(\mathbf{C}^{m\times n})$	$P_n(t)$	$W_n(t)$
维数	n	mn	$n+1$	$2n+1$

（3）元素的坐标指元素由线性空间的基线性表示时，表示式中的系数构成的列向量．设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是线性空间$V^n$的一个基，$\forall\boldsymbol{\alpha}\in V^n$，如果$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$，则称$x_1,x_2,\cdots,x_n$为元素$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标，记为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$.

线性空间元素的坐标规定为列向量，它的维数等于线性空间的维数.

线性空间V^n的基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是一组有序的向量，若改变该组向量的顺序为$\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{in}$，则$\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{in}$是$V^n$的另外一组不同的基.

由于在指定基下，任一向量与其坐标之间是一一对应的．线性空间及其元素是抽象的对象，不同空间的元素完全可以具有千差万别的类型及性质．但坐标表示却把它们统一了起来，坐标表示把这种差别留给了基和基元素，由坐标所组成的新向量仅由数域中的数表示出来．更进一步，原本抽象的“加法”及“数乘”经过坐标表示就演化为向量加法及数对向量的数乘.

（4）线性子空间指线性空间中对加法运算和数乘运算封闭的非空子集．常用的线性子空间有以下几类：

1）生成子空间$\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$或者$L\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$：如果$\boldsymbol{V}$是数域$\boldsymbol{P}$上的线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\in\boldsymbol{V}$，由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$的所有线性组合组成的集合是线性空间$\boldsymbol{V}$的一个子空间，称它为由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$所生成的子空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$称为生成元.

2）矩阵的值域$R(A)$：设$A=(A_1,A_2,\cdots,A_n)\in\mathbf{R}^{m\times n}$，则

$$R(A)=\mathrm{span}\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}=\{y\mid y=Ax,x\in\mathbf{R}^n\}.$$

3）矩阵的零空间$N(A)$：设$A\in\mathbf{R}^{m\times n}$，则$N(A)=\{x\mid Ax=0,x\in\mathbf{R}^n\}$.

4）设V是数域P上的线性空间，T是V上的线性变换，λ_0是T的特征值

$$V_{\lambda 0}=\{\alpha \mid T(\alpha)=\lambda_0\alpha,\alpha\in V\}$$

$V_{\lambda 0}$是V的子空间，称为T关于特征值λ_0的特征子空间.

（5）过渡矩阵指以线性空间的一个基中各元素在另一个基下的坐标为列向量构成的方阵．即设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$是$V^n$的两个基

$$\begin{aligned}\beta_1&=a_{11}\alpha_1+a_{21}\alpha_2+\cdots+a_{n1}\alpha_n\\ \beta_2&=a_{12}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\cdots+a_{n2}\alpha_n\\ &\vdots\\ \beta_n&=a_{1n}\alpha_1+a_{2n}\alpha_2+\cdots+a_{nn}\alpha_n\end{aligned}$$

则

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

矩阵A称为由基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵.

两个基之间的过渡矩阵是可逆方阵，它的阶数等于线性空间维数．如果由基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵为$A$，则由基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$到基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的过渡矩阵为$A^{-1}$.

（6）子空间的和与交.设V_1、V_2是线性空间V的子空间，则$V_1\cap V_2$是子空间，称为V_1与V_2的交空间；$V_1+V_2=\{\alpha_1+\alpha_2 \mid \forall\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2\}$为$V_1$与$V_2$的和. 它们都是线性空间$V$的子空间．如果$V_1\cap V_2=\{0\}$，则$V_1+V_2$为$V_1$与$V_2$的直和，记为$V_1\oplus V_2$.

（7）元素的内积指线性空间中任意两个元素按照某种规则对应的满足交换律、分配律、齐次性和非负性的实数（复数）.

（8）度量矩阵指以欧氏（酉）空间的基中第i个元素与第j个元素的内积为i行j列元素构成的方阵．设欧氏（酉）空间V的一个基为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，则该基的度量矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1)&(\alpha_1,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_1,\alpha_n)\\(\alpha_2,\alpha_1)&(\alpha_2,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_2,\alpha_n)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\(\alpha_n,\alpha_1)&(\alpha_n,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_n,\alpha_n)\end{pmatrix}$$

如果α,β在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标分别是$x,y$，则有$(\alpha,\beta)=x^{\mathrm{T}}Ay$．因此，一般欧氏空间中的内积就转化为矩阵的乘法.

在不同的欧氏（酉）空间中，内积的定义方式一般是不同的．借助于基的度量矩阵，可将不同的欧氏（酉）空间中的内积运算用统一的矩阵乘法形式来表示．欧氏（酉）空间中不同基的度量矩阵是合同关系.

（9）标准正交基指欧氏（酉）空间中由两两正交的单位向量构成的基．借助于标准正交基，可以将元素的内积运算转化为元素的坐标向量的普通内积运算.

3. 主要结论

（1）设V是数域P上的一个n维线性空间，A是由基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵，$\alpha$关于基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的坐标为$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，关于基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的坐标为$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$，则$y=A^{-1}x$.

（2）设V_1是n维线性空间V^n的一个r维子空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$V_1$的一个基，则$V^n$中存在$n-r$个向量$\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots,\alpha_n$，使得$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$, $\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots,\alpha_n$为$V^n$的一个基.

（3）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的极大线性无关组是子空间$\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$的基，而

$$\dim(\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\})=\mathrm{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m).$$

（4）A的列向量组的极大线性无关组是$R(A)$的基，$\dim(R(A))=\mathrm{rank}(A)$.

（5）$Ax=0$的基础解系是$N(A)$的基，$\dim(N(A))=n-\mathrm{rank}(A)$.

（6）设V_1、V_2是线性空间V的任意两个子空间，则$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)$.

（7）若$V_1=\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\},V_2=\mathrm{span}\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}$，则

$$V_1+V_2=\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}$$

（8）在n维欧氏空间V中，度量矩阵是正定矩阵，且不同基的度量矩阵彼此是合同关系.

4. 常用方法

（1）判断一个集合V是否构成线性空间的方法如下：

1）检验V对于加法和数乘运算是否封闭.

2）检验加法和数乘运算是否满足8条线性运算律.

只有当两步检验的结果都是肯定的，V才构成一个线性空间.

（2）求线性空间（子空间）的基：根据线性空间的构成规律，找出其中的一组特殊元素，使得线性空间的一般元素都可由这组元素线性表示．若这组元素线性无关，则它就是线性空间的基；若这组元素线性相关，则它的一个极大无关组就是线性空间的基.

（3）求矩阵的值域和零空间的基：矩阵A的列向量组的一个极大无关组是$R(A)$的基；齐次线性方程组$Ax=O$的一个基础解系是$N(A)$的基.

（4）求过渡矩阵：设线性空间V的两个基分别为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，且由基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵为$A$，那么求过渡矩阵有下列两种方法：

1）直接法（定义法）：计算β_j在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标$A_j$，写出$A=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$.

2）中介法：选取V的简单基（如取自然基），使V的元素在该基下的坐标能够直接写出；分别写出从简单基到基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的过渡矩阵$B$，从简单基到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵$C$，则$A=B^{-1}C$.

（5）构造标准正交基方法.

1）施米特（Schmidt）正交化方法：选取欧氏空间V的基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，先进行正交化得正交基

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\boldsymbol{\beta}_j=\boldsymbol{\alpha}_j-\sum_{k=1}^{j-1}\frac{(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\beta}_k)}{(\boldsymbol{\beta}_k,\boldsymbol{\beta}_k)}\boldsymbol{\beta}_k,\qquad j=2,\cdots,n$$

再将它们单位化，得标准正交基

$$e_j=\beta_j/\|\beta_j\|,\qquad j=1,2,\cdots,n$$

2）合同变换方法：选取欧氏空间 V 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，计算该基的度量矩阵 $\boldsymbol{A}$；求可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}_n$；构造另一个基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$，使得

$$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}$$

则 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 为欧氏空间 V 的标准正交基.

二、知识结构图

知识结构如图 1.1 所示.

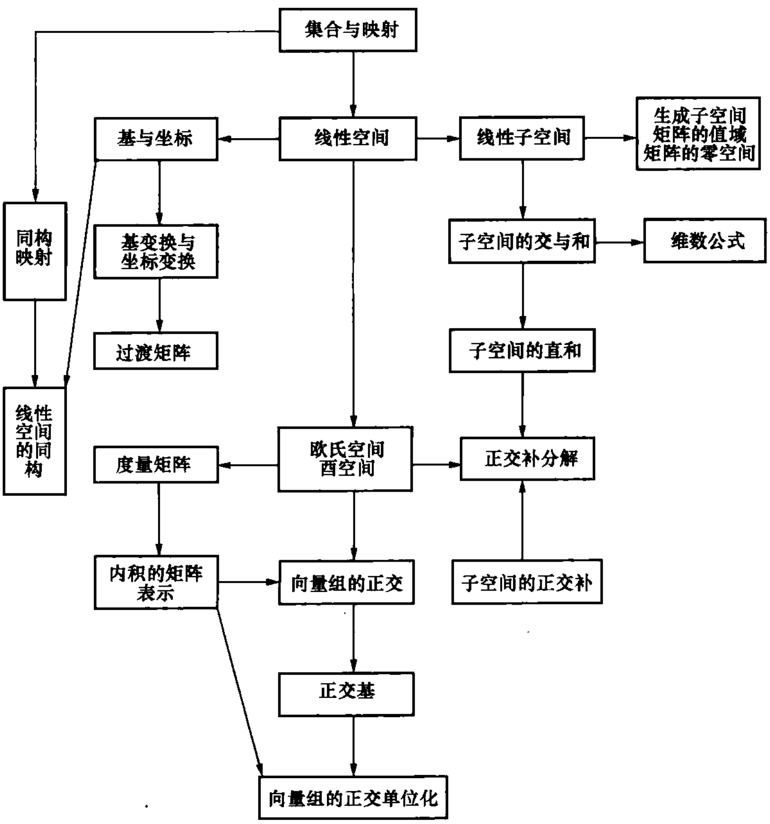

图 1.1　知识结构图

三、典型例题

【例 1.1】 设 $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，记

$$V=\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k A^k \;\middle|\; a_k \in \mathbf{R}, n=1,2,\cdots\right\}.$$

（1）证明：V 在矩阵的加法与数乘运算下构成 $\mathbf{R}$ 上的线性空间；

（2）求 $\dim(V)$.

（1）**证** 设任意 $A,B\in V,a\in\mathbf{R}$，则 $A=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kA^k,B=\sum\limits_{j=1}^{m}b_jA^j$. 不妨假设 $n\leqslant m$，则

$$A+B=\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)A^k+\sum_{j=n+1}^{m}b_jA^j\in V$$

$$aA=\sum_{k=1}^{n}(aa_k)A^k\in V$$

因此，V 在矩阵的加法与数乘运算下构成 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

（2）**解** 由于

$$A^2=-E,A^3=-A,A^4=E$$

因此 V 中的任一向量都可以表示成 A、E 的线性组合，且 A、E 线性无关，因此 A、E 是 V 的基，从而 $\dim(V)=2$.

【例 1.2】 设 $V=\{A\,|\,A^2=A,A\in\mathbf{R}^{n\times n}\}$，在 V 中定义通常的矩阵加法和数乘运算. V 是否构成线性空间？为什么？

解 不构成线性空间. 取 $A=E\in V$，但 $(2A)^2=4A^2=4E\neq 2E$，因此 $2A\notin V$，故 V 不构成线性空间.

【例 1.3】 求 $1+x+2x^2-x^3$、$2+4x+4x^2-2x^3$、$3+4x+6x^2-3x^3$、$-1+3x+4x^2+4x^3$ 的极大线性无关组，并将其他向量用极大线性无关组线性表示.

解 所给向量组在自然基 1、x、x^2、x^3 下的坐标依次为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\-1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\4\\4\\-2\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}3\\4\\6\\-3\end{pmatrix},\ \alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\3\\4\\4\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\1&4&4&3\\2&4&6&4\\-1&-2&-3&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\0&2&1&4\\0&0&0&6\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为一组极大线性无关组且 $\alpha_3=2\alpha_1+\dfrac{1}{2}\alpha_2$.

【例 1.4】 讨论 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 中向量组 $\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&-3\\5&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&2\\-1&p+2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2&-6\\10&p\end{pmatrix}$ 的线性相关性，并在向量组线性相关时求出它的秩和一个极大线性无关组.

解 以向量组 $\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&-3\\5&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&2\\-1&p+2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2&-6\\10&p\end{pmatrix}$ 在自然基

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

下的坐标为列向量构造矩阵，并对它进行初等行变换·

$$\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\1&-3&2&-6\\1&5&-1&10\\3&1&p+2&p\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\0&-2&-1&-4\\0&6&-4&12\\0&4&p-7&p+6\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\0&-2&-1&-4\\0&0&-7&0\\0&0&p-9&p-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\0&-2&-1&-4\\0&0&1&0\\0&0&0&p-2\end{pmatrix}$$

当 $p\neq 2$ 时，向量组线性无关；当 $p=2$ 时，向量组线性相关，此时向量组的秩是 3，$\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&-3\\5&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&2\\-1&p+2\end{pmatrix}$是它的一个极大线性无关组.

【例 1.5】 设 4 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1+a&1\\1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2&2+a\\2&2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3&3\\3+a&3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}4&4\\4&4+a\end{pmatrix}$，问 a 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关？当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关时，求其一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

解法一 设 x_1,x_2,x_3,x_4，使得

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

由此可得方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{pmatrix}$$

由于

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}=(a+10)a^3$$

于是当 $a=0$ 或 $a=-10$ 时 $|\boldsymbol{A}|=0$，此时，方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ 有非零解，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

当 $a=0$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4=4\boldsymbol{\alpha}_1$，

当 $a=-10$ 时，对 $\boldsymbol{A}$ 施以初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix}-9&2&3&4\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\1&2&3&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-9&2&3&4\\10&-10&0&0\\10&0&-10&0\\10&0&0&-10\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}-9&2&3&4\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)$$

由于 $\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的一个极大线性无关组，且 $\boldsymbol{\beta}_1=-\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_3-\boldsymbol{\beta}_4$，故 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4$.

解法二 在 $\mathrm{R}^{2\times2}$ 中取自然基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 在自然基下的坐标依次为 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1=(1+a,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2=(2,2+a,2,2)^{\mathrm{T}}$，$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_3=(3,3,3+a,3)^{\mathrm{T}}$，$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_4=(4,4,4,4+a)^{\mathrm{T}}$. 记 $\boldsymbol{A}=(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_3,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_4)$，对 $\boldsymbol{A}$ 施以初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1+a&2&3&4\\-a&a&0&0\\-a&0&a&0\\-a&0&0&a\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$$

当 $a=0$ 时，$\boldsymbol{A}$ 的秩为 1，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，此时，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_4=4\boldsymbol{\alpha}_1$

当 $a\neq0$ 时，再对 $\boldsymbol{B}$ 施以初等行变换，有

$$\boldsymbol{B}\sim\begin{pmatrix}1+a&2&3&4\\-1&1&0&0\\-1&0&1&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}a+10&0&0&0\\-1&1&0&0\\-1&0&1&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)$$

如果 $a\neq-10$，$\boldsymbol{C}$ 的秩为 4，从而 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 4，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

如果 $a=-10$，$\boldsymbol{C}$ 的秩为 3，从而 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

由于 $\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$ 为 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$ 的一个极大线性无关组，且 $\boldsymbol{\gamma}_1=-\boldsymbol{\gamma}_2-\boldsymbol{\gamma}_3-\boldsymbol{\gamma}_4$，于是 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4$.

【例 1.6】 验证 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1&1\\-2&3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1&0\\2&4\end{pmatrix}$ 是 $\mathrm{R}^{2\times2}$ 的基，并求 $\begin{pmatrix}5&-1\\3&2\end{pmatrix}$ 在该基下的坐标.

解 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 在自然基 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 下的坐标分别是

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1\ \ 0\ \ 2\ \ 1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(1\ \ 1\ \ -2\ \ 3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(2\ \ 1\ \ 1\ \ 1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_4=(1\ \ 0\ \ 2\ \ 4)^{\mathrm{T}}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&1&0\\2&-2&1&2\\1&3&1&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 满秩，$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$、$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

由于 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 是 4 维空间，故 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$、$\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的基.

设 $\begin{pmatrix}5&-1\\3&2\end{pmatrix}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4$，即解方程组

$$\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&1&0\\2&-2&1&2\\1&3&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-1\\3\\2\end{pmatrix}$$

解得 $\begin{pmatrix}5&-1\\3&2\end{pmatrix}$ 在该基下的坐标为 $\boldsymbol{X}=\left(\dfrac{85}{3},10,-11,-\dfrac{34}{3}\right)^{\mathrm{T}}$.

【例 1.7】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的一组基，

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$$

（1）证明：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 也是 $\boldsymbol{V}$ 的一组基.

（2）若 $\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标是 $(n,n-1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 下的坐标.

解 （1）

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1&1&\cdots&1\\0&0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}$$

由于 $|\boldsymbol{P}|=1\neq0$，因此 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0&\cdots&0\\0&1&-1&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

从而有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{P}^{-1}$$

故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关，且 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\dim(\boldsymbol{V})$，因此 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 也是 $\boldsymbol{V}$ 的一组基.

（2）**解法一**

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)(n,n-1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$$

$$=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)P^{-1}(n,n-1,\cdots,1)^T$$
$$=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)(1,1,\cdots,1)^T$$

因此 α 在基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的坐标是 $(1,1,\cdots,1)^T$.

解法二 设 $\alpha=x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_n\beta_n$，由于

$$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\beta_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$$

将其代入并整理，得

$$\alpha=(x_1+x_2+\cdots+x_n)\alpha_1+(x_2+x_3+\cdots+x_n)\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$$

又由于 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标是 $(n,n-1,\cdots,1)^T$，而同一向量在同一组基下的坐标是唯一的，因此

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=n \\ x_2+x_3+\cdots+x_n=n-1 \\ \quad\vdots \\ x_n=1 \end{cases}$$

解得 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$，故 α 在基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的坐标是 $(1,1,\cdots,1)^T$.

【例 1.8】 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维线性空间 V 的一组基，向量组 β_1,β_2,β_3 满足

$$\beta_1+\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\beta_1+\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_2+\beta_3=\alpha_1+\alpha_3.$$

（1）证明：β_1,β_2,β_3 也是 V 的一组基.

（2）求由基 β_1,β_2,β_3 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵.

（3）求向量 $\alpha=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$ 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标.

（1）**证** 由于向量组 β_1,β_2,β_3 满足

$$\beta_1+\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\beta_1+\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_2+\beta_3=\alpha_1+\alpha_3$$

因此

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

因为

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=\left|\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\right|=1\neq 0$$

所以，$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ 可逆，且

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

于是

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&-1&2\\1&0&0\end{pmatrix}$$

故

$$3\geqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\geqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3=\dim(V)$$

因此$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关，且$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$也是$V$的一组基.

解 （2）由（1）证明可知，由基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$到基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的过渡矩阵是$\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&-1&2\\1&0&0\end{pmatrix}$.

（3）
$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&-1&2\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$
$$=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}$$

因此，向量$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$下的坐标是$(2,-5,1)^{\mathrm{T}}$.

【例 1.9】 已知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$是 3 维线性空间$V$的两组基，$V$中任一向量$\boldsymbol{\alpha}$在两组基下的坐标$(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$和$(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$满足

$$y_1=2x_1+x_2+x_3,y_2=x_1-x_2+x_3,y_3=x_1+2x_2-x_3$$

（1）求由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵.

（2）若

$$\boldsymbol{\alpha}_1=4+3t+4t^2,\boldsymbol{\alpha}_2=2-3t-4t^2,\boldsymbol{\alpha}_3=1+5t+5t^2$$

求$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$.

解 （1）由于V中任一向量$\boldsymbol{\alpha}$在两组基下的坐标$(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$和$(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$满足

$$y_1=2x_1+x_2+x_3,y_2=x_1-x_2+x_3,y_3=x_1+2x_2-x_3$$

因此

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&-1&1\\1&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

从而

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&-1&1\\1&2&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&3&2\\2&-3&-1\\3&-3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵$\boldsymbol{P}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&3&2\\2&-3&-1\\3&-3&-3\end{pmatrix}$.