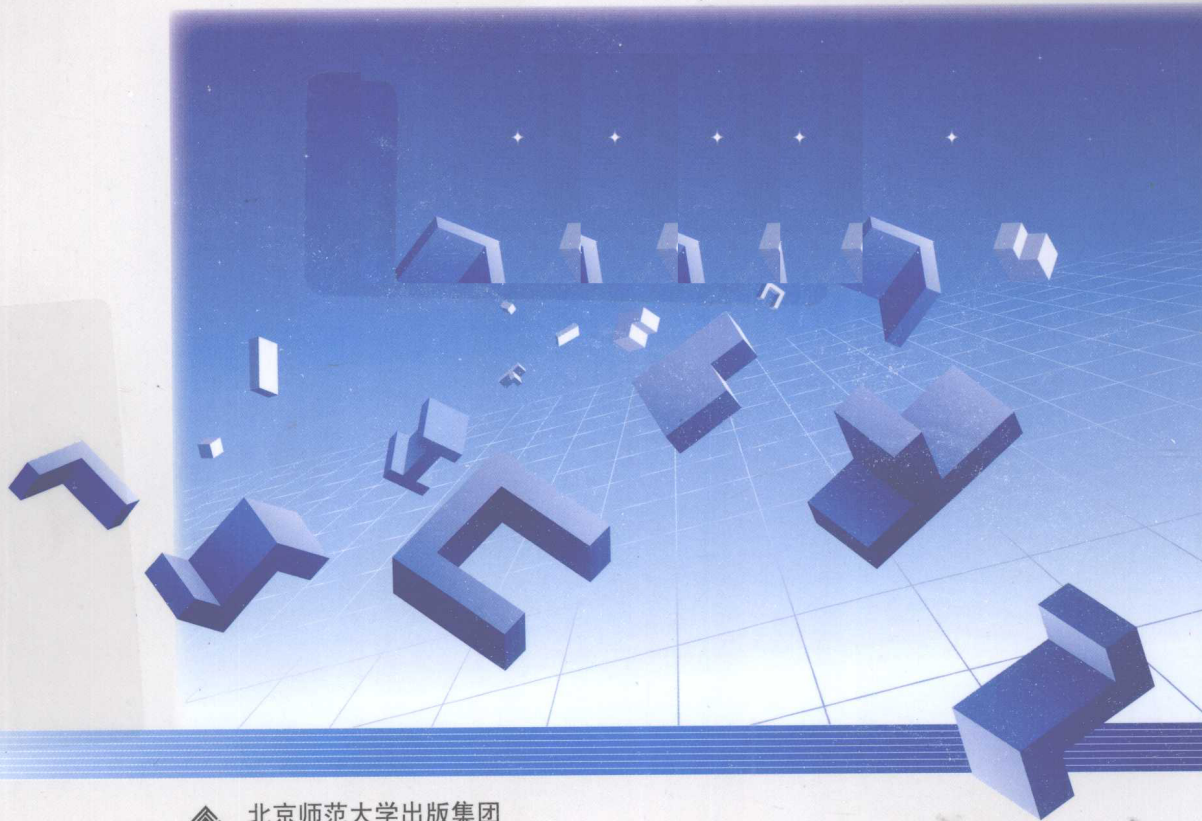


京師 数学教育丛书

数学教学论

SHUXUE
JIAOXUELUN

张英伯 曹一鸣 丛书主编
曹一鸣 张生春 主 编



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

京師 数学教育丛书

数学哲学

现代数学通览

数学课程导论

数学方法论选读

现代数学与中学数学 (第2版)

数学教育原理——哲学、文化与社会的视角

■ 数学教学论

数学教育史

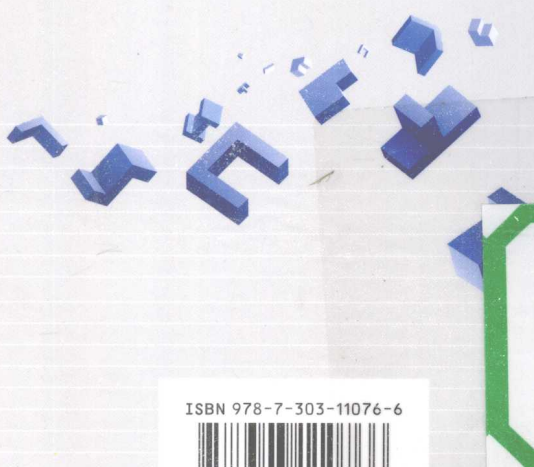
数学教学心理学

数学教学案例研究

数学教育测量与评价

数学教育研究方法 with 论文写作

SHUXUEJIAOXUELUN



ISBN 978-7-303-11076-6



9 787303 110766 >

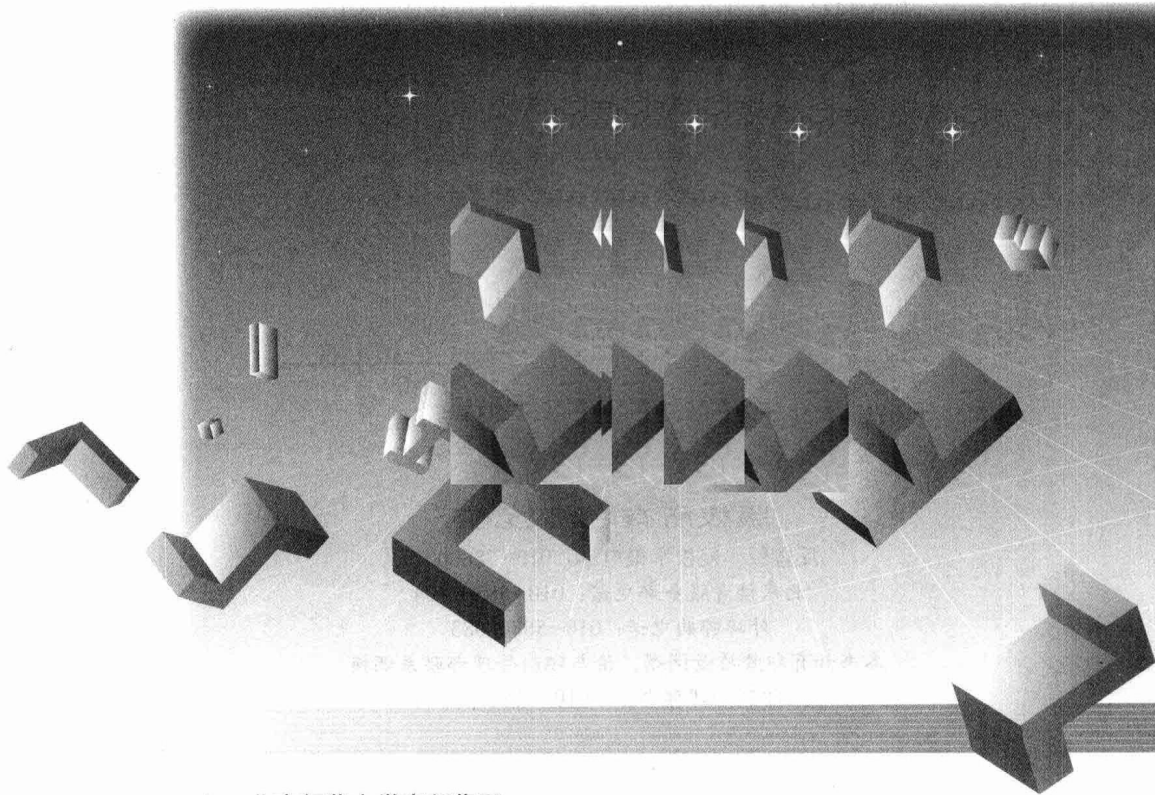
定价: 24.00元

京師 数学教育丛书

数学教学论

SHUXUE
JIAOXUELUN

张英伯 曹一鸣 丛书主编
曹一鸣 张生春 主 编



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学教学论 / 曹一鸣, 张生春主编. —北京: 北京师范大学出版社, 2010.8

(数学教育丛书)

ISBN 978-7-303-11076-6

I. ①数… II. ①曹…②张… III. ①数学教学-教学研究 IV. ①01-4

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第102023号

营销中心电话 010-58802181 58808006
北师大出版社高等教育分社网 <http://gaojiao.bnup.com.cn>
电子信箱 beishida168@126.com

出版发行: 北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街19号
邮政编码: 100875

印 刷: 北京中印联印务有限公司

经 销: 全国新华书店

开 本: 170 mm × 230 mm

印 张: 14

字 数: 227千字

版 次: 2010年8月第1版

印 次: 2010年8月第1次印刷

定 价: 24.00元

策划编辑: 梁志国 姚斯研 责任编辑: 姚斯研

美术编辑: 毛 佳 装帧设计: 毛 佳

责任校对: 李 茵 责任印制: 李 啸

版权所有 侵权必究

反盗版、侵权举报电话: 010-58800697

北京读者服务部电话: 010-58808104

外埠邮购电话: 010-58808083

本书如有印装质量问题, 请与印制管理部联系调换。

印制管理部电话: 010-58800825

数学教育丛书

顾 问：徐利治 张景中 张奠宙

主 编：张英伯 曹一鸣

丛书编委会(按姓氏笔画为序)

马云鹏 王光明 孔凡哲 宁连华

代 钦 宋乃庆 张奠宙 张英伯

张春莉 张景中 张生春 松宫哲夫

涂荣豹 高 旻 徐利治 徐斌艳

黄秦安 曹一鸣 喻 平

总 序

成为一名优秀的数学教师，是每一位有责任心和事业心的数学教师的神圣使命。推动中国数学教育实践的良性发展，提高中国数学教育的质量，是每一位中国数学教育工作者的匹夫之责。

数学教育是数学的教育，数学教师需要有良好的数学素养。20世纪后半叶及21世纪初科学技术的迅猛发展，对大、中、小学数学教育提出了越来越高的要求，数学课程改革需要不断应对时代的挑战。将一些现代数学的内容及思想方法(譬如，微积分、向量、算法、编码、统计、群等)引进中学数学课程，已是大势所趋。相比以往，正在实施中的数学新课程，内容变化较大，许多选修课的内容甚至连教师都没有学过。现在的课程内容涉及的知识面广，难以全面掌握、深刻理解，使得广大的中学数学教师正面临着前所未有的危机与挑战。

教师是一个专门的职业，作为一位优秀的数学教师需要有良好的数学教育素养。面对时代的要求，面对新的教学理论、教育技术，如何处理传统与现代的关系，改进教学方式，让学生主动参与教学，减轻学生过重的数学学习负担，提高数学教学效率，促进学生长远发展，这些都需要教师对数学教育理论进行系统的学习与研究。

全国高等师范院校数学教育类课程与教材建设正在进行之中。近年来的全国高等师范院校数学教育研究会特别将“数学教育专业课程建设”以及“研究生培养”作为重点专题来研究。2005年全国高等师范院校数学教育研究会常务

理事会期间，部分专家提出目前没有合适的、系统的数学教育本科、研究生（特别是教育硕士）教材。2006年全国高等师范院校数学教育研究会议再次提出这一问题。会议期间几位热心的学者着手策划此事，从而诞生了本套丛书。该套丛书得到了许多著名数学家以及数学教育家的鼎力支持。张景中院士、徐利治教授、张奠宙教授欣然答应担任丛书顾问，并承担丛书的编写工作。他们身体力行，为建设中国数学教育大业，提高数学教育类教材水平鞠躬尽瘁。他们严谨治学的态度深深地影响着参与丛书编写工作的各位同仁。各位编委（分册主编）齐心协力，充分利用参与国内外学术交流的机会，探讨交流、出谋划策，经过大家的共同努力，初步确定了这一套书的总体框架，也彰显了国内数学教育同仁的强烈责任心和神圣使命感。

北京师范大学出版社大力支持我国的数学教育类课程与教材建设，理科编辑室梁志国主任精心运作，将“丛书”纳入出版计划，体现了北京师范大学出版社服务于教育事业的使命感。

这套丛书共12本，构成一个整体，基于数学，紧密联系数学教学实践，各有侧重：一类加深对数学素养的提升，如《数学哲学》《数学方法论选读》《现代数学通览》《现代数学与中学数学》（第2版）；另一类则注重于提升数学教育理论与研究水平，如《数学教育原理——哲学、文化与社会视角》《数学课程导论》《数学教学论》《数学教学心理学》《数学教育测量与评价》《数学教育研究方法》《数学教育史》《数学教学案例研究》。

但愿这套丛书的出版能够为有志于系统研习数学教育理论，全面提高数学及数学教学、科研水平的中小学教师、教研员、本科生、研究生提供有效的帮助。

数学教育丛书编委会

2009年7月

前 言

师范院校开设数学教育类专业课程一直将怎样教好数学作为研习的核心内容。

新中国成立初期，相关课程设置主要参照苏联伯拉基斯的《数学教学法》，以介绍中学数学教学大纲的内容和体系，讨论中学数学中主要教学内容的教学方法为主。这些内容虽然停留在经验层面上，但毕竟有了专门的数学教学方法课程。

20世纪80年代以来，数学教育研究在改革开放的大环境下，研究水平得到了质的飞跃。在以数学教材教法(总论、代数教学研究、几何教学研究)为研究框架的基础上，加入了对数学学习心理、数学课程理论等问题的研究，形成了以数学教学论、数学课程论、数学学习论为核心的“三论”架构。“数学教育学”或“数学教育学概论”也几乎同时出现。近年来，随着研究的进一步深入，研究领域进一步扩展、深化或细化为：数学教学论、数学课程论、数学教育(教学、学习)心理学、数学教育测量与评价、数学方法论、数学教育哲学等分支方向，一些研究还以专题的形式出现，如：数学建模、数学课题学习、数学问题解决、数学教学设计、数学考试研究等，一个开放性数学教育学科群正在逐渐形成。

无论数学教育这个学科群怎么发展，《数学教学论》作为高等师范院校数学教育专业的一门核心课程的地位一直没有发生实质性的变化。该课程旨在让学习者系统学习数学教育的基本理论，了解国内外数学教育的发展历史和改

革趋势，深刻理解数学课程标准的基本理念，引领学生形成正确的数学观、教育观、课程观、教学观和评价观，熟悉中小学数学教材体系，掌握中小学数学教学的过程与环节，数学教学的基本技能，运用数学教学理论和学习理论，解决当前基础教育改革数学教师面临的实际问题。

目前，数学教学论方面的论著非常多，这也从一个侧面表明了数学教学论这门课程的重要性。本书的作者多年来一直从事数学教学论教学与课程建设，曹一鸣教授在“985”教师教育创新平台项目的资助下完成了“数学教学论”课程建设项目研究，全国互联网教师教育平台、超星数字图书馆名师讲坛对该课程进行了全程录像。河北师范大学张生春、杨春宏、陈雪梅、张硕、孟召静等教授曾合写过《数学教学论》一书，并在教学中实践过多年。本书的形成最初框架由曹一鸣提出，并与张生春、陈雪梅等主要作者多次讨论，分工协作而成。各章具体分工为：绪论、第一章、第三章由曹一鸣执笔；第二章、第九章由张生春执笔；第四章由张生春、孟召静执笔；第五章由张硕执笔；第六章、第七章由陈雪梅执笔；第八章由杨春宏执笔。北京师范大学康玥瑗博士通读了全书初稿，提出许多修改建议，最后由曹一鸣负责统稿。

本书注重从当前数学教育改革中的实际问题与教学案例出发，以新视角和高观点阐述数学教学的基本原理和基本方法，努力体现新的数学课程标准的基本理念。并运用现代数学教学理论进行剖析，对学习者在数学教学知识和数学教学基本技能的掌握，数学教学水平和教育研究能力的提高等方面有所帮助，并能运用所学的教育理论和教学方法解决教学实践中的问题。

本书可以作为高等师范院校数学教育专业本科生、研究生教材，也可以作为中小学数学教师、教研员进行教学研究的参考用书。

编者

2010年5月18日

目 录

绪 论 /1

- 一、数学教学论发展的历史…………… 3
- 二、数学教学论研究的对象及其特点 …… 5
- 三、数学教学论课程的教学意义 …… 7

第 1 章 现代数学教育发展概况 /10

- 1.1 数学观及其现代发展 …… 10
- 1.2 数学教育观及其发展 …… 12
- 1.3 国际数学教育的发展 …… 20
- 1.4 我国数学教育的反思与发展 …… 28

第 2 章 我国基础教育数学课程改革概要 /38

- 2.1 我国基础教育数学课程的发展 … 38
- 2.2 义务教育数学新课程的基本理念、目标与内容…………… 44
- 2.3 普通高中数学新课程的基本理念、目标与内容…………… 51

第 3 章 数学教学的基本问题 /58

- 3.1 数学教学及其过程 …… 58
- 3.2 数学教学原则 …… 61

| | | |
|------------|------------------------|-----|
| 3.3 | 数学教学模式 | 68 |
| 第4章 | 中学数学教学设计 /85 | |
| 4.1 | 数学教学设计概述 | 85 |
| 4.2 | 数学教学设计的基本过程 | 87 |
| 4.3 | 中学数学教学设计案例分析 | 99 |
| 第5章 | 中学数学教学基本技能 /108 | |
| 5.1 | 中学数学教学基本技能概述 | 108 |
| 5.2 | 数学课堂教学技能及其形成 | 112 |
| 第6章 | 数学概念的教学 /143 | |
| 6.1 | 数学概念的特点 | 143 |
| 6.2 | 数学概念教与学的认知心理学基础 | 145 |
| 6.3 | 数学概念教学的方法 | 148 |
| 6.4 | 数学概念教学的案例 | 152 |
| 第7章 | 数学命题的教学 /158 | |
| 7.1 | 数学命题及其教学的基本内涵 | 158 |
| 7.2 | 数学命题的教学方法 | 159 |
| 7.3 | 数学命题教学的案例 | 164 |
| 7.4 | 数学命题教学的原则与策略 | 172 |
| 第8章 | 数学解题教学 /175 | |
| 8.1 | 数学解题教学的作用 | 175 |
| 8.2 | 中学数学问题的结构与分类 | 177 |
| 8.3 | 中学数学问题的分类 | 179 |
| 8.4 | 解题认知过程及解题教学基本要求 | 181 |
| 8.5 | 培养解题能力的途径和数学解题思想 | 187 |

第9章 数学教育热点问题研究 /190

- | | |
|---------------------|-----|
| 9.1 数学探究性学习 | 190 |
| 9.2 研究性学习 | 197 |
| 9.3 数学建模与数学教育 | 204 |

主要参考文献 /211

绪论

案例1 数学天才陶哲轩

2006年8月22日至30日,第25届国际数学家大会在西班牙马德里举行。开幕式上,刚满31岁的美国洛杉矶加州大学数学系陶哲轩(Terence Tao)教授荣获菲尔兹奖。他是继1982年丘成桐之后获此殊荣的第二位华人。菲尔兹奖是一个专为40岁以下杰出数学家颁发的奖项,被誉为“数学界的诺贝尔奖”。

陶哲轩的学习经历非常特殊。他在3岁半进入一所私立小学时智力就明显超过班上其他同学,但却不知道怎么与那些比自己大两岁的孩子相处,学校的老师面对这种状况也束手无策,几个星期以后,陶哲轩退学了,还是回到幼儿园去。

在幼儿园的一年半里,陶哲轩在母亲梁蕙兰的指导下完成了几乎全部小学数学课程。他母亲主要是对他进行启发式的、而非填鸭式的教育。陶哲轩更喜欢的似乎是自学。

5岁生日过后,陶哲轩再次迈进了小学的大门,学校为陶哲轩提供了灵活的教育方案,和二年级学生一起学习大多数课程,数学课则与五年级学生一起上。

7岁时,陶哲轩开始自学微积分。他所在小学的校长成功地说服附近一所中学的校长,让陶哲轩每天去中学听一两节数学课。

8岁半时,陶哲轩升入了中学,9岁半时,他有1/3时间在离家不远的弗林德斯大学学习数学和物理。一年后,他面临一个重大抉择:什么时候升入大学?经过深思熟虑,他没有仅仅为了一个所谓的纪录就提前升入大学,而是在中学阶段多待3年,先修一部分大学课程,以便升入大学以后,在科学、哲学、艺术等各个方面具备更坚实的基础。

陶哲轩20岁获得普林斯顿大学博士学位,24岁成为洛杉矶加州大学教授。

陶哲轩在数学竞赛方面也有突出的成绩。9岁多时虽然未能入选澳大利亚队参加国际数学奥林匹克竞赛,但接下来的三年中,他先后三次代表澳大利亚参赛,并分别获得铜牌、银牌和金牌。他在1988年获得金牌时,尚不满13岁,这一纪录至今无人打破。

案例2 一位母亲的求教信

我的小孩13岁,上初一,数学成绩常常徘徊在60分左右,我们给他报了

补习班，没什么效果，更严重的问题是他不懂又不敢问老师。

我们问他，你不敢问老师，是有什么顾虑吗？是害怕老师批评你吗？

他说，不是。

我们又问，是老师显得很不耐烦吗？他说不觉得啊。

开家长会时，老师也对我说，“非常希望学生去问问题，中午和下午老师一般都在办公室，也有空闲时间，可是总不见你的孩子来问”。

由于我的小孩学不懂数学又不敢问老师，成绩不断下降。他是英语课代表，英语老师和数学老师在同一个办公室，他经常去找英语老师，尽管这样，也不会顺便问问数学老师。一开始回家后还会问我们，可有时我们也不会，就希望他去问老师、问同学或请家教，但效果都不理想。最后逼急了，他说会做了，而实际上，我们知道，他既不会也没有问。

要考试了，他天天复习英语，因为他是英语课代表，却没有复习数学，听他的意思好像是，反正都这样了，就是再复习数学也考不好，干脆多复习英语或语文。

我应该怎么办？

作为一名数学教师，在教学实践中常常需要面对普通的学生，还需要面对数学天才生、学困生，以及来自升学、素质教育等不同视角的评价体系的要求。

理想的教育家指出，“没有教不好的学生，只有教不好的教师”，然而现实却没有这么乐观。近年来流行的多元智能理论让我们从多元的角度来评价学生的学业成绩。这是否又意味着教师只能“顺其自然”？教师在学生的数学学习过程中能否起到作用，起到什么样的作用？怎样才能发挥积极有效的作用？教师的知识怎样才能用于教学实践、帮助学生学习，教师原有的学习经验、专业工作经验对数学教学研究的有效影响，等等，有很多这类需要研究的问题。^①

近年来，数学教学论的研究成果不断丰富，在数学教育的理论和实践方面取得了一系列研究成果，但是还没有能够很好地回答来自实践者和政策制定者所需要解决的现实问题。^②正是在这种理论与实践双重力量的推动之下，数学教学论研究发展成为数学学科教育学中的重要分支学科之一。

① Ruhama Even, Deborah Loewenberg Ball. The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. The 15th ICMI Study, Springer, 2008.

② Lyn D. English. Handbook of International Research in Mathematics Education, Routledge, 2008.

一、数学教学论发展的历史

数学教学历史悠久。据记载，中国周代典章制度的《礼记·内则》就有明确的要求：“六年教之数与方名……九年教之数日，十年出就外傅，居宿于外，学书计。”又据《周礼·地官》：“保氏掌谏王恶，而养国子以道，乃教之六艺，一曰五礼；二曰六乐；三曰五射；四曰五驭；五曰六书；六曰九数。”《汉书》：“八岁入小学，学六甲、五方、书计之事。”尽管自周代以来，历代史书多有关于数学教育的记载，但是正规的数学教育制度的确立和数学专门人材的培养却是从隋代才开始，而且规模很小，效果并不好，稍有名望的数学家、天文学家，如刘焯、刘炫、刘佑、王孝通、李淳风、一行、边冈等，都不是经过正规的官学(数学)教育培养出来的。我国民间的数学教育起到了一定的作用，主要以师徒相传、民间书院中的数学教育、明代的商业数学等形式存在。如北宋数学家贾宪是楚衍的学生，南宋数学家秦九韶“尝从隐君子受数学”，元初数学家王恂、郭守敬都是刘秉忠的学生。民间书院中的数学教育有：李冶封龙山书院，朱世杰扬州书院。清同治元年(1862)我国开始兴办学堂，创办京师同文馆。中国古代的数学教育作为官方教育的一个组成部分，完备于隋唐，衰微于明清，其目的主要是培养管理型和技术型人才。

在西方，公元前3世纪，柏拉图就在雅典建立学派，创办学园。他非常重视数学，强调数学在训练智力方面的作用，主张通过几何的学习培养逻辑思维能力，因为几何能给人以强烈的直观印象，将抽象的逻辑规律体现在具体的图形之中。柏拉图学院培养出不少数学家，如欧多克索斯就曾求学于柏拉图，他创立了比例论，是欧几里得的前驱。柏拉图的学生亚里士多德也是古代的大哲学家，是形式逻辑的奠基者。他的逻辑思想为日后将几何学整理在严密的逻辑体系之中开辟了道路。

在数学教育发展的历史进程中，相当一段时间内主要是由数学家在从事数学研究的同时兼教数学。这主要是因为学数学的人并不多，没有(也没有必要)形成专职数学教师队伍，自然就不需要对数学教育(学)进行系统的研究。数学教师除了需要掌握数学知识，还要懂得教学法才能胜任数学教育工作，这一点直到19世纪末才被人们充分认识到。“会数学不一定会教数学”“数学教师是有别于数学家的另一种职业”这样的观念开始逐渐被认同。最早提出把数学教育过程从教育过程中分离出来，作为一门独立的科学加以研究的是瑞士教育家别

斯塔洛齐(J. H. Pestalozzi)。①

1911年,哥廷根大学的Rudolf Schimmack成为第一个数学教育的博士,其导师便是赫赫有名的德国著名几何学家、数学教育学家F. 克莱因。有关数学教育、教学方面的课程逐渐在大学数学系(学院)开设,有些国家专门成立了数学教育系,有些设在教育学院,有些则设在数学学院。

我国最早的关于数学教育的学科称为“数学教授法”。在清末,京师大学堂里开始设有“算学教授法”课程。1897年,清朝天津海关道盛宣怀创办南洋公学,内设师范院,也开“教授法”课。之后,一些师范院校便相继开设了各科教授法。1917年北京大学就有专门研究数学教授法的学者胡睿济,20世纪40年代商务印书馆还专门出版了中国人自己编写的数学教学法书籍。20世纪20年代前后,任职于南京高等师范学校的陶行知先生,提出改“教授法”为“教学法”的主张,虽被校方拒绝,但这一思想却逐渐深入人心,得到社会的承认。“数学教学法”的名称一直延续到20世纪50年代末。无论是“数学教授法”还是“数学教学法”,实际上只是讲授各学科通用的一般教学法。20世纪30年代至40年代,我国曾陆续出版了几本关于数学教学法的书,如1949年商务印书馆出版了刘开达编著的《中学数学教学法》。但这些书大多数是对前人或外国关于教学法的研究成果,根据自己教学实践进行修补而总结的经验,并没有形成成熟的教育理论。

新中国成立后,通过苏联教育文献的引入而使数学教学法得到系统的发展。我国的《中学数学教学法》,用的是从苏联翻译的伯拉基斯的《数学教学法》,其内容主要介绍中学数学教学大纲的内容和体系,以及中学数学中的主要课题的教学法,这些内容虽然仍停留在经验上,但比以往只学一般的教学方法有所进步,毕竟变成了专门的数学教学方法。数学教学法一度以“数学教育学”的名称出现,涵盖更为广泛的内容,近年来则又进一步细分为:数学教学论、数学课程论、数学教育心理学、数学教育测量与评价等方向。

20世纪70年代,国外已把数学教育作为单独的科学来研究,我国的《数学教学法》或《数学教材教法》一直是高等师范院校数学系(科)体现师范特色的一门专业基础课。1979年,北京师范大学等全国13所高等师范院校成立协作编写组,编写了《中学数学教材教法》(《总论》和《分论》)一套书,作为高等师范院校的数学教育理论学科的教材,是我国在数学教学论建设方面的重要标志。协作编写组先后于1980年(广西桂林)、1981年(江苏苏州)、1982年(福建福

① [美]格劳斯·数学教与学研究手册. 上海:上海教育出版社,1999:4~78.

州)、1983年(贵州安顺)举办了数学教育理论学术讨论会。1985年12月,在湖北襄樊举行的协作编写组会议上,决定以协作编写组为基础,成立全国高等师范院校数学教育研究会(2009年起,更名为全国数学教育研究会,学会网站:www.camedu.org.cn),该研究会定期召开会议,对数学教育相关问题开展广泛深入的研究。

20世纪80年代,在数学教材教法的基础上,开始出现数学教学的新理论。国务院学位委员会公布的高等学校“专业目录”中,在“教育学”这个门类下设“教材教法研究”(后改为“学科教学论”)。事实上,我国早在1962年就开始招收数学教育方向的硕士研究生,1998年开始招收学科教学(数学)方向教育专业硕士研究生,并于2004年启动实施“农村学校教育硕士师资培养计划”(简称“硕师计划”),该计划是通过推荐免试攻读教育硕士、“特岗计划”等政策导向,鼓励和吸引优秀大学毕业生服务农村教育事业的重要途径,也是创新教师培养模式、造就大批高层次、高素质骨干教师的重要举措。截至2009年,全国共有4400多名“硕师计划”研究生赴国家级和省级扶贫开发工作重点县的农村中学任教。20世纪末,开始招收数学课程与教学论方向博士研究生,2010年开始计划招收学科教学方向教育专业博士。教育专业学位研究生的培养成为未来高层次数学教学与研究人员培养的主渠道。

二、数学教学论研究的对象及其特点

数学教学论是研究数学教学过程中教和学的联系、相互作用及其统一的科学。广义地说,数学教学论所要研究的是与数学教育有关的一切问题,包括:数学教学原则、数学教学组织形式、数学教学设计、数学教学模式的选择与应用,现代化技术手段的使用,数学教师的素养与培训,数学教材的编写与评价,学生学习规律的研究,数学思维的结构与培养,数学能力的含义与培养,数学教学过程的实质与规律,数学教学研究方法,等等。

狭义地讲,数学教学论以一般教学论和教育学的基本理论为基础,从数学教学的实际出发,分析数学教学过程的特点,总结长期以来数学教学的历史经验,揭示数学教学过程的规律,研究数学教学过程中的诸要素(教学方法、教学组织形式、教学的物质条件等)及其相互间的关系,帮助教师端正教学思想和形成教学技能,并对数学教学的效果开展科学的评价。目前主要有两种展开讨论的形式:一种是以教学方法为主线,通过对概念、定理、解题教学研究来展开;另一种则以知识内容为主线,通过对代数、几何、统计与概率等知识领