中国科学院“十一五”规划教材

经·济·应·用·数·学·基·础·系·列

经济与金融分析数学基础

王生喜 编著

科学出版社
www.sciencep.com

中国科学院“十一五”规划教材·经济应用数学基础系列

经济与金融分析数学基础

王生喜　编著

科学出版社

内 容 简 介

本书介绍了现代经济学、金融学及管理科学中相关的数学基础和模型.全书分3篇,共12章.上篇概括了经济(金融)数学基础知识,中篇讲授经济(金融)分析中的基本数学模型,下篇简要介绍若干经济(金融)数学专题.书中突出经济与金融分析中实际问题的需要,重点放在如何运用数学的语言、公式、关系反映经济(金融)研究及管理实践中所面临的问题,兼顾了教材的严谨性和可读性.

本书可作为经济管理类、统计类、应用数学类高年级本科生及研究生的教材,也可供从事上述专业教学的青年教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

经济与金融分析数学基础/王生喜编著.—北京:科学出版社,2010.8
中国科学院"十一五"规划教材·经济应用数学基础系列
ISBN 978-7-03-028528-7

Ⅰ.①经… Ⅱ.①王… Ⅲ.①经济数学-高等学校-教材②金融-分析-经济数学-高等学校-教材 Ⅳ.①F224.0②F830

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第153557号

责任编辑:王春福 李鹏奇 杨 然 / 责任校对:何艳萍
责任印制:张克忠 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

铁成印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010年8月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2010年8月第一次印刷 印张:16 1/2
印数:1—3 000 字数:330 000

定价: 28.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

总　　序

随着科学技术的迅猛发展和经济建设的快速腾飞，数学与各门学科的联系变得更加紧密，在人类实践活动中的应用也更加广泛和深入. 不仅自然科学和工程技术离不开数学，财经科学、管理科学及其他社会科学同样离不开数学.

20 世纪 80 年代以来，我国高校按照教育部的要求，普遍为经济管理类各专业的本科学生开设了包括微积分、线性代数、概率论与数理统计等在内的经济应用数学基础课程. 在多年的经济数学教学实践中，曾经涌现出一批具有时代特色的优秀教材，这些教材对培养合格的财经管理人才发挥过重要作用. 近年来随着招生规模的不断扩大，我国已迅速进入高等教育的大众化时代. 新的时代呼唤经济数学教材的改革和创新. 如何为全日制经济类与管理类本科生编写一套既适合学生现状又兼顾考研需要、既传授数学思想又突出实际应用、既介绍经典理论又穿插现代理念、既适当研究解题技巧又学会使用数学软件的教材，是编者多年的夙愿，当然也是一件很有意义的事情.

基于上述想法，我们按照教育部“经济类与管理类本科数学基础课程教学大纲及要求”，深入研究了国内外经济数学教育教学改革动态，借鉴了许多优秀教材的内容结构和处理方法，并结合编者长期从事经济数学教学的经验体会编写了这套系列教材，包括《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《经济与金融分析数学基础》，共四册.

本系列教材的前三册(《微积分》,《线性代数》,《概率论与数理统计》)的读者对象是经济类和管理类的一、二年级本科生. 上述教材在编写思想、结构安排、内容取舍、教学方法等方面做了一些新的尝试，其共同特点如下：

(1) 努力体现分层次教学的思想. 针对不同层次学生的学习要求，对教学内容和课后习题两个方面进行了处理. 将内容分为必学内容和选学内容(加 * 号区分)，习题依照难易程度划分为(A)、(B)两组. 教材综合考虑了财经类各专业学习该课程和后续课程的需要、报考研究生的需要以及将来从事相关实际工作的需要. 文字叙述上尽量为初学者着想，对基本概念和证明思路的叙述力求准确和富有启发性.

(2) 突出数学的经济应用. 教材引入了简单的经济(管理)应用模型，目的在于加强对学生数学应用能力的培养，引导学生学以致用，提高学生学习经济数学的兴趣. 例如《微积分》中介绍了常用的边际分析与弹性分析等经济学经典模型，《线性代数》中介绍了投入产出分析等线性模型，《概率论与数理统计》中介绍了彩票模型

及报童问题等随机模型.

(3) 穿插数学建模的思想和方法,尝试使课程内容与数学软件使用有机结合.书中运用 Mathematica 5.0 编排了若干数学实验,由此也就适当弱化了对某些复杂计算技巧的介绍.

本系列教材的第四册(《经济与金融分析数学基础》)内容是前三册数学基础知识的自然延伸、提高和综合应用,读者对象为经济类、管理类、统计类、应用数学类高年级本科生及研究生.该书在内容取舍、体系结构安排及写作风格上都做了新的尝试,突出经济(金融)分析中实际问题的需要,重点放在如何运用数学的语言及模型反映经济(金融)分析及管理理论与实践中所面临的问题,而不刻意强调数学本身的系统性和严谨性.

本系列教材集中了众多专家学者及一线教师的智慧和力量,王春福主任,李鹏奇副编审以及科学出版社的许多朋友为本套书的出版付出了辛勤劳动,在此一并表示感谢.

限于编者的知识水平,书中不当之处在所难免,敬请读者批评指正.

丛书编委会

2010 年 6 月

前　　言

本书是中国科学院“十一五”规划教材·经济应用数学基础系列教材中的第四册，其内容是前三册数学知识的自然延伸、提高和综合应用. 本书读者对象为经济类、管理类、统计类、应用数学类高年级本科生及研究生. 阅读本书的先修课程为微积分、线性代数、初等概率论，以及初级微观经济学.

近年来，我国高校普遍为经济管理类各专业的学生开设了包括微积分、线性代数、概率论与数理统计在内的经济应用数学基础课程. 由于种种原因，学生所学的数学知识往往游离于专业学习之外，许多学完数学课程的学生都不能自如地运用所学知识处理实际问题. 解决学生“学用脱节”的主要手段之一，就是改革经济数学教材的内容和体系. 作者集多年的教学实践，在本书的写作中就教学内容的取舍、体系结构的安排和编写风格三方面做了如下尝试.

一、内容取舍. 从大的方面讲，现今几乎所有的数学分支在经济(金融)分析及管理科学中都有不同程度的应用. 客观地说，本书中的每一章都可以写成一部或几部厚厚的著作. 在这样一本篇幅不大的教材中要涉及经济(金融)数学的方方面面几乎是不可能的，也是作者力不能及的. 作者根据自己有限的学识和偏好并按照“学以致用”的原则，对目前国内外流行的经济(金融)学及管理学教材和文献中最常用的数学知识进行了筛选与加工提炼，内容大体上涵盖了中高级经济学、金融经济学和管理科学中所需要的数学基础.

二、体系结构. 在体系结构安排上，作者按照数学的内在逻辑关系，将全书分为 3 篇 12 章.

上篇是“经济(金融)数学基础概要”，分 4 章简要概括了经济(金融)数学的基础知识. 在先修课程的基础上，选取了线性空间、距离-范数-内积、特征值理论、二次型、隐函数存在定理、多元泰勒公式与函数矩阵、凸(拟凸)函数、概率测度积分、条件期望、随机序列收敛性等内容.

中篇是“经济(金融)数学基本模型”，分 4 章介绍了经济(金融)分析中的基本数学模型. 本篇选取了有限维实空间上的静态最优化基础、效用与需求、生产与消费、投入产出分析、线性规划、层次分析法、利率及现值等基本模型. 通过对上述模型的介绍，试图使数学自然融入经济(金融)分析，让读者切身感受到数学与经济学、金融学及管理科学是“水乳交融”的关系. 这部分内容以讲清这些模型的数学原理为重点，不过多涉及模型的经济(金融)学分析.

下篇是“经济(金融)数学专题导引”，简要介绍了对现代经济(金融)学的发展

产生重大影响的若干经济(金融)数学专题,包括金融随机分析、经济均衡模型、博弈论模型以及动态经济模型等 4 章. 本篇选取了布朗运动与鞅、随机积分、布莱克-斯克尔斯模型与金融衍生品定价的鞅方法、欧氏空间上的点集拓扑与微分流形、非合作博弈与联盟博弈、微(差)分方程、动态经济模型及动态最优化等重要模型. 本篇涉及的内容广泛,属于“开放式”专题介绍,目的是让读者开阔视野,了解经济学、金融学及管理科学研究前沿中数学工具的重要性和普遍性.

三、编写风格. 众所周知,经济(金融)学及管理科学中不同专业方向对数学的应用已经形成了各自的独特风格和符号体系,试图统一它们的风格和符号不但有“画蛇添足”之嫌,而且也很难做到整齐划一. 鉴于此,本书相对保留了不同学科中数学体系的“原始”风格. 教材中突出经济与金融分析中实际问题的需要,重点放在如何运用数学的语言、公式、关系反映经济(金融)分析及管理实践中所面临的问题,而不刻意强调数学本身的系统性和严谨性,大部分内容采用了非公理化的处理方法.

综上可知,无论在内容选择、体系结构安排还是写作风格上,本书都不是一本传统意义上的经济数学教材. 作者最初的目标,是既要把庞杂的经济数学知识“浓缩”在一本篇幅不大的教材中,又要兼顾到严谨性和可读性. 写作过程中,为实现这一“理想化”的目标,作者常常陷入“鱼与熊掌不可兼得”的两难境地. 经过几年艰辛的探索和思考,作者决定采用一种折中的“次优”模式. 这种尝试已体现在全书的各个章节中.

本书的上篇和中篇(共 8 章)配备了习题,书后附有习题参考答案.

本书是在作者多年授课讲义的基础上形成的. 自 1998 年起,作者每年都为高年级本科生、研究生及高校教师硕士班讲授经济应用数学基础. 学生们学习本课程的欲望和热情令作者深受感动,他们的鼓励和鞭策给予作者写作本书的勇气和力量. 许多同行和学生参加了初稿的讨论,陈启宏教授、梁治安教授、李仁骏教授和文平教授阅读了本书初稿,并提出了宝贵的修改意见,在此一并致谢.

本书在写作过程中参阅了大量中外文献,有些章节的内容直接来自于这些文献资料. 作者由此更加体会到经济学中“搭便车”概念的深刻含义.

由于作者学识浅陋,书中的不妥及疏漏在所难免,恳请读者批评指正.

作　者

2010 年 6 月

目　　录

中篇 经济(金融)数学基本模型

下篇 经济(金融)数学专题导引

上　篇

经济(金融)数学基础概要

本篇概要回顾和介绍经济(金融)分析与管理工程中所需要的基本数学工具,内容涉及向量与矩阵、多元微分法、凸分析,以及概率论基础.

(1) 向量与矩阵是研究现代经济(金融)科学及管理科学的基本工具之一.

线性空间起源于普通物理和解析几何中的向量概念,真正使线性空间这一数学概念普及化的是经济学.经济学家 G. Debreu 在他的诺贝尔经济学奖获奖演说中说:“商品空间有实向量空间结构这一事实是经济学数学化成功的根本原因.”有了“商品空间”的这一概念,线性空间就变得非常容易理解.商品空间的概念也是经济学家建立一般经济均衡数学理论的出发点.

矩阵分析是构建线性经济(金融)模型的基本框架和灵魂.经济(金融)学不但成功应用了矩阵工具,而且成为线性数学理论创新和发展的重要源泉之一.

(2) 运用微积分方法研究经济问题始于 19 世纪初期.比较系统地运用微积分学研究经济问题的经济学家是数理学派先驱古诺(Cornot).他于 1838 年出版《财富理论的数学原理的研究》,书中第一次提出了需求函数和收益函数,对垄断、双头垄断、寡头垄断及完全竞争下的价格决定作出了数学解释.随着边际效用理论的创立和发展,微积分逐渐成为主流经济学的核心工具.杰文斯甚至说,经济学是“快乐与痛苦的微积分学”.

(3) 函数的凹凸性是构造各类经济函数的重要依据,也是最优化理论的基础.大量经济、金融与管理方面的著作及文献中经常涉及“凸性”、“ 拟凸性”等概念.只有真正明白了这些概念,才能对基本经济函数有透彻理解,才能读懂和应用一系列的经济(金融)优化模型.可见,有关“凸”的知识也应该是我们“数学工具箱” 中必备的工具之一.

(4) 现代金融分析及不确定性研究对随机数学的需求日益增长.概率统计是极具应用特色、充满活力的数学分支,也是研究不确定性经济、金融与管理问题的主流方法.较高(测度论)观点下的概率论概念确实比较抽象,但这些概念和结果是理解大量随机金融模型的“金钥匙”.

第 1 章　向量与矩阵

1.1 线性空间

一、n 维向量

定义 1.1　数域 F 上的 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的一个有序数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 称为一个 n 维行向量，记作 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 一般用 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 等表示向量，用 a_i,b_j 或 c_{ij} 表示向量的分量. 也可把向量表示为 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，称为 n 维列向量. 本书中所讨论的向量均可理解为列向量.

所有分量都是零的向量称为零向量，记作 $\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$.

n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 的各分量都取相反数组成的向量，称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量，记作

$$-\boldsymbol{\alpha}=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)^{\mathrm{T}}.$$

如果 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 的对应分量全相等，即 $a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$，则称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 相等，记作 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

定义 1.2　设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和记作 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)^{\mathrm{T}}$. 利用负向量的概念，可定义向量的减法，即

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})=(a_1-b_1,a_2-b_2,\cdots,a_n-b_n)^{\mathrm{T}}.$$

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 是一个 n 维向量，$k\in F$，则数 k 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的乘积称为数乘向量，简称为数乘，记作 $k\boldsymbol{\alpha}$，其中 $k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)^{\mathrm{T}}$.

向量的加法和数乘运算，统称为向量的线性运算. 显然，数域 F 上的向量经过线性运算后，仍为数域 F 上的向量.

利用上述定义，容易验证向量的线性运算满足以下 8 条运算律：

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$；　　(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$；

(3) $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$；　　(4) $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$；

(5) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$；　　(6) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$；

(7) $(kl)\boldsymbol{\alpha}=k(l\boldsymbol{\alpha})$；　　(8) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.

其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 为数域 F 上的 n 维向量；k,l 是数域 F 中的任意数.

n 维向量概念是物理矢量的自然推广. 将 n 维向量的概念及运算性质再加以推广,就得到线性空间这一应用广泛的数学概念.

二、线性空间

定义 1.3　设 V 是一个非空集合,F 是一个数域,在 V 中定义了两种代数运算.

(1) 加法:对于 V 中任意两个元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$,按某一法则,在 V 中都有唯一的一个元素 γ 与它们对应,称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和,记作 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$.

(2) 数乘:对于 V 中的任意元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 和数域 F 中的任意数 k,按某一法则,在 V 中都有唯一的一个元素 $\boldsymbol{\delta}$ 与之对应,称为 k 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的数乘,记作 $\boldsymbol{\delta}=k\boldsymbol{\alpha}$.

一般称集合 V 对于加法和数乘这两种运算封闭.

如果以上定义的加法和数乘满足以下 8 条运算律,则称 V 是数域 F 上的一个线性空间:

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;

(3) 对于 V 中的任一元素 $\boldsymbol{\alpha}$,都有 $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$,称元素 $\mathbf{0}$ 为 V 的零元素;

(4) 对于 V 中的每个元素 $\boldsymbol{\alpha}$,都有 V 中的元素 $\boldsymbol{\beta}$,使得 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$,称 $\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元素,记作 $-\boldsymbol{\alpha}$,即 $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$;

(5) 对数域 F 中的数 1 和 V 中的任一元素 $\boldsymbol{\alpha}$,都有 $1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(6) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$;

(7) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$;

(8) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$.

其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 是 V 中的任意元素;k,l 是数域 F 中的任意数.

下面是一些常见的线性空间:

① 实数域 $\mathbf{R}$ 上的所有 n 维向量组成的集合,连同它们上面定义的线性运算,称为实数域上的 n 维向量空间,记作 $\mathbf{R}^n$.

当 $n=3$ 时,$\mathbf{R}^3$ 就是三维几何空间;当 $n=2$ 时,$\mathbf{R}^2$ 就是二维几何空间,即平面.

② 设 V 是实数域 $\mathbf{R}$ 上所有 $m\times n$ 矩阵的集合,对于矩阵的加法和数乘运算,构成 $\mathbf{R}$ 上的一个线性空间.

③ 实数域 $\mathbf{R}$ 上所有一元多项式的集合,记作 $\mathbf{R}[x]$. 对于多项式的加法及数与多项式的乘法,构成 $\mathbf{R}$ 上的一个线性空间. 特别地,$\mathbf{R}[x]$中次数小于 n 的所有一元多项式(包括零多项式)组成的集合记作 $\mathbf{R}[x]_n$,它对于多项式的加法和数与多项式的乘法,也构成 $\mathbf{R}$ 上的一个线性空间.

④ 设 $V=\{\mathbf{0}\}$只包含一个元素. 对于任意数域 F,定义 $\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0},k\mathbf{0}=\mathbf{0}(k\in F)$. 可

以验证上述运算也满足 8 条运算法则，$\mathbf{0}$ 就是 V 的零元素，则 $V=\{\mathbf{0}\}$ 是 F 上的一个线性空间，称为零空间.

线性空间的元素一般仍称为向量，从而线性空间也称为向量空间. 显然，这里所说的向量，其含义要比 $\mathbf{R}^n$ 中的向量广泛得多.

⑤ p 方可和数列空间 $l^p(p\geqslant 1)$. l^p 为满足条件 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<+\infty$ 的数列 $(x_1, x_2,\cdots,x_n,\cdots)=(x_k)$ 全体组成的集合，即

$$l^p=\left\{x \mid x=(x_k),\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<+\infty\right\}.$$

设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in l^p$，定义代数运算 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_k)+(y_k)=(x_k+y_k)$，$\lambda x=\lambda(x_k)=(\lambda x_k)$.

容易验证 l^p 为一线性空间.

⑥ 连续函数空间 $C[a,b]$. $C[a,b]$ 是定义在有限区间 $[a,b]\subset\mathbf{R}$ 上的连续实函数全体所组成的集合，设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 为其任意元素，定义代数运算

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})(t)=x(t)+y(t),\quad (\lambda\boldsymbol{x})(t)=\lambda x(t),$$

则 $C[a,b]$ 为连续函数线性空间.

⑦ k 阶光滑函数空间 $C^k[a,b]$. 设 $C^k[a,b]$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上具有直至 k 阶连续导数的函数的全体所组成的集合(在区间的端点处存在单侧导数). 若对 $C^k[a,b]$ 定义与 $C[a,b]$ 类似的代数运算，则为线性空间，称其为 k 阶光滑函数空间.

定义 1.4 设 V 是数域 F 上的一个线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geqslant 1)$ 是 V 中的一组向量，$k_1,k_2,\cdots,k_s$ 是数域 F 中的数，则向量

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$$

称为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个线性组合，或称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示.

定义 1.5 设

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s, \tag{A}$$

$$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t \tag{B}$$

是线性空间 V 中的两个向量组. 如果(A)中的每个向量都可由向量组(B)线性表示，则称向量组(A)可由向量组(B)线性表示. 如果向量组(A)与(B)可以互相线性表示，则称向量组(A) 与(B)等价.

定义 1.6 线性空间 V 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geqslant 1)$ 称为线性相关，如果在数域 F 中有 s 个不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}. \tag{1.1}$$

如果等式(1.1)中只有当 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$ 时才能成立,则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

定理 1.1　由一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 组成的向量组线性相关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$. 两个以上的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关的充分必要条件是其中至少有一个向量可以表为其余向量的线性组合.

定理 1.2　如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,并且可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示,则 $s\leqslant t$.

由此可以推出:两个等价的线性无关的向量组,一定含有相同个数的向量.

定理 1.3　如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示,并且表示法唯一.

$\mathbf{R}^n$ 中线性无关的向量组最多由 n 个向量组成,任意 $n+1$ 个向量都是线性相关的. 那么,在线性空间 V 中,最多能有多少线性无关的向量呢? 这是线性空间的一个重要特征.

定义 1.7　如果在线性空间 V 中有 n 个线性无关的向量,而没有更多数量的线性无关的向量,就称线性空间 V 是 n 维的,记作 $\dim V=n$. 并称这 n 个线性无关的向量为线性空间 V 的一组基.

当一个线性空间 V 中存在任意多个线性无关的向量时,就称 V 是无限维的.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基,则它们线性无关,并且对于任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关. 由定理 1.3 知,$\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出,且表示法唯一. 于是,可以引入坐标的概念.

定义 1.8　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基,$\boldsymbol{\alpha}$ 是 V 中任一向量. 如果

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则称线性组合系数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标,记作$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

例 1　在 n 维线性空间 $\mathbf{R}^n$ 中,显然 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$为 $\mathbf{R}^n$ 的一组基. 对于 $\mathbf{R}^n$ 中的任一向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$,有

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n.$$

因此,$\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标为$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

又 $\boldsymbol{e}_1=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{e}_2=(0,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{e}_n=(0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$ 也是 $\mathbf{R}^n$ 中 n 个线性无关的向量,从而也是 $\mathbf{R}^n$ 的一组基. 对于向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$,有

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{e}_1+(a_2-a_1)\boldsymbol{e}_2+\cdots+(a_n-a_{n-1})\boldsymbol{e}_n.$$

因此,$\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 下的坐标为$(a_1,a_2-a_1,\cdots,a_n-a_{n-1})$.

例 2　所有二阶实矩阵组成的集合 V,对于矩阵的加法和数量乘法,构成实数