

21世纪

普通高等教育规划教材

线性代数

XIANXING
DAISHU

张文彬

刘大瑾 ◎ 主 编
李文涛 ◎ 副主编



化学工业出版社

21 世纪普通高等教育规划教材

线 性 代 数

刘大瑾 主编

张文彬 李文涛 副主编



化学工业出版社

· 北 京 ·

本书内容分为八章,其中前六章为基础理论部分,内容包括行列式、短阵、 n 维向量空间、线性方程组、矩阵的特征值与对角化、实二次型。另外,为了帮助学生提高数学素养、培养创新意识、掌握运用数学工具去解决实际问题的能力,本书第七章、第八章利用 MATLAB 工具,结合前面的基础理论,给出了一些数学实验与具体应用实例。最后书末还附有习题参考答案。

本书可作为理工科院校线性代数课程的教科书,也可作为其他相关专业的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/刘大瑾主编. —北京:化学工业出版社, 2010.6

21 世纪普通高等教育规划教材

ISBN 978-7-122-08557-3

I. 线… II. 刘… III. 线性代数-高等学校-教材
IV. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 088193 号

责任编辑:袁俊红 唐旭华
责任校对:陈 静

文字编辑:马冰初
装帧设计:周 遥

出版发行:化学工业出版社(北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011)

印 刷:北京市振南印刷有限责任公司

装 订:三河市宇新装订厂

720mm×1000mm 1/16 印张 10 字数 200 千字 2010 年 7 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询:010-64518888(传真:010-64519686) 售后服务:010-64518899

网 址: <http://www.cip.com.cn>

凡购买本书,如有缺损质量问题,本社销售中心负责调换。

定 价:19.80 元

版权所有 违者必究

前 言

在自然界与社会现象中，许多变量之间的关系可以直接地或近似地表示为线性函数，所以研究线性函数是非常重要的。线性代数是理工科院校各专业重要的公共基础课程，以线性函数为主要研究对象，是科学研究及工程实践中对离散量的基本分析方法，有着十分抽象的形式和严格的逻辑体系，对培养人的素质、数学思维能力和进行数值计算能力方面具有不可替代的作用，已成为学习近代科学技术的基础。

本书是作者在多年教学实践的基础上，为适应教学改革的新要求而编写的。编写时，为了适应不同的教学要求，力求深入浅出，把可读性与实际应用性相结合，全面提高读者运用数学方法分析问题和解决问题的能力。

全书共八章，分为两大部分：前六章讲线性代数的经典理论，主要内容包括行列式、矩阵、 n 维向量空间、线性方程组、矩阵的特征值与对角化、实二次型；后两章讲实践，主要内容包括 MATLAB 解题和应用实例。

本书由刘大瑾担任主编，张文彬、李文涛担任副主编。参加本书编写的还有（以姓氏笔画为序）：叶建兵、刘明颖、谌文超、谭沈阳。

限于编者水平，书中难免有不当之处，恳请广大读者不吝指正。

编者

2010 年 5 月

目 录

第一章 行列式	1
第一节 二阶、三阶行列式	1
一、二阶行列式	1
二、三阶行列式	2
第二节 n 阶行列式	4
一、全排列与逆序	4
二、 n 阶行列式的定义	5
三、行列式的基本性质	8
第三节 n 阶行列式的计算	11
一、 n 阶行列式的计算	11
二、行列式的乘法	19
第四节 克拉默法则	22
第二章 矩阵	27
第一节 矩阵的概念与运算	27
一、矩阵的概念	27
二、矩阵运算	29
三、矩阵的转置	34
第二节 矩阵的逆	36
一、可逆矩阵的概念	36
二、可逆矩阵的逆矩阵的求法	37
三、逆矩阵的性质	39
第三节 分块矩阵	41
一、分块矩阵的概念	41
二、分块矩阵的运算	43
第四节 初等变换与初等矩阵	46
一、矩阵的初等变换与初等矩阵	46
二、矩阵的标准形	48
第五节 矩阵的秩	53

第三章 n 维向量空间	59
第一节 n 维向量空间	59
一、 n 维向量的概念	59
二、 n 维向量的运算	59
三、 R^n 的子空间	60
第二节 向量的线性相关性	62
一、向量的线性组合与向量组间的线性表示	62
二、向量组的线性相关性	63
三、向量组线性关系的性质	65
第三节 基、维数、坐标	68
一、向量组的结构	68
二、向量空间 R^n 及其子空间	72
三、基变换和坐标变化	72
第四章 线性方程组	75
第一节 消元法	75
第二节 线性方程组解的存在定理	78
第三节 线性方程组解的结构	82
一、齐次方程组解的结构	82
二、非齐次方程组解的结构	86
第五章 矩阵的特征值与对角化	92
第一节 特征值与特征向量	92
一、特征值与特征向量的概念	92
二、特征值与特征值的求法	92
三、特征值与特征值的性质	94
四、矩阵的对角化	96
第二节 向量的内积	98
一、内积与正交	98
二、施密特 (Schmidt) 正交化	99
三、正交矩阵	100
第三节 实对称矩阵的对角化	102
一、实对称矩阵的定义和性质	102
二、实对称矩阵正交相似对角化的计算	102
第六章 实二次型	105
第一节 二次型的基本概念	105
一、二次型及其矩阵表示	105
二、二次型的标准形	107

第二节 化二次型为标准形	109
一、用配方法化二次型为标准形	109
二、用正交变换化二次型为标准形	111
三、用合同变换法化二次型为标准形	115
第三节 规范形	117
第四节 正定二次型	120
第七章 MATLAB 解题	124
第一节 基本语法	124
一、标示符	124
二、矩阵及其元素的赋值	124
三、复数	124
四、变量检查	124
第二节 MATLAB 解题实例	125
一、行列式的计算方法	125
二、逆矩阵的计算方法	125
三、用矩阵“除法”解线性方程的计算方法	127
四、超定矛盾方程的最小二乘法的计算方法	129
五、正交基向量的计算方法	130
六、矩阵特征值和特征向量的计算方法	131
七、求正交矩阵将是对称矩阵化成对角阵的计算方法	132
八、求矩阵的 Jordan 标准型的计算办法	133
九、矩阵奇异值分解的计算办法	133
第八章 应用实例	136
第一节 线性方程组的应用	136
一、曲线拟合	136
二、运输管理中的流量问题	137
第二节 矩阵的应用	138
一、马尔科夫链	138
二、线性经济模型	139
第三节 实向量空间的应用	141
第四节 特征值特征向量的应用	142
一、斐波那契序列	142
二、二次型中的应用	143
习题参考答案	145
参考文献	154

第一章 行列式

第一节 二阶、三阶行列式

一、二阶行列式

考虑二元一次方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & (1) \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & (2) \end{cases}$$

不妨设 $a_{11} \neq 0$ ，则

$$(1) \times \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) \text{ 得 } -a_{21}x - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}y = -\frac{b_1a_{21}}{a_{11}} \quad (3)$$

$$(2) + (3) \text{ 得 (消去 } x) \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}}y = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}}$$

$$\text{即} \quad y = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (4)$$

$$\text{将 (4) 代入 (1) 得} \quad x = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

可见，方程组的解完全可由方程组中的未知数系数 a_{11} ， a_{12} ， a_{21} ， a_{22} 以及常数

$$\text{项 } b_1, b_2 \text{ 表示出来} \quad \begin{cases} x = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ y = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

如果规定记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ，则有

$$b_1a_{22} - a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad a_{11}b_2 - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

因此二元一次方程组的解可以表示为

$$\begin{cases} x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \\ y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \end{cases}$$

定义 1 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 称为二阶行列式. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

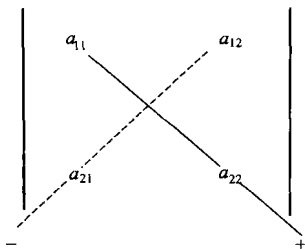


图 1-1

行列式中的元素用小写英文字母表示, 下标的两个数据表示该元素所在的行和列, 分别叫行标和列标. 一般行列式中位于第 i 行第 j 列的元素记为 a_{ij} , 比如 a_{21} 是指位于第二行第一列的元素.

二阶行列式表示的代数和, 可以用画线的方法记忆 (见图 1-1), 即实线连接的两个元素的乘积减去虚线连接的两个元素的乘积.

例 1 计算下列行列式的值:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

解 (1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$

(2) $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 \times 2 - 0 \times 0 = -2$

(3) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - (-1) \times 0 = 6$

二、三阶行列式

定义 2 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示代数和:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

称为三阶行列式, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} +$$

$$a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} -$$

$$a_{11}a_{23}a_{32}$$

三阶行列式也可以用画线的方法记忆 (见图 1-2). 图中各实线 (主对角线方向) 连接的三个元素的乘积是代数和中的一项, 各虚线 (副对角线方向) 连接的三个元素的乘积是代数和中的一项.

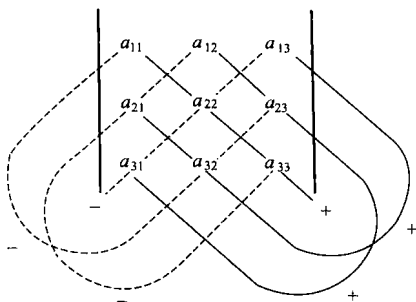


图 1-2

例 2 计算下列三阶行列式: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$

解 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times (-2) + 2 \times 1 \times (-3) + (-4) \times (-2) \times 4 -$

$$(-4) \times 2 \times (-3) - 2 \times (-2) \times (-2) - 1 \times 1 \times 4$$

$$= (-4) + (-6) + 32 - 24 - 8 - 4$$

$$= -14$$

习题 1-1

1. 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ y & -z & 0 \end{vmatrix}$$

2. 设 $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$, 求 x 的值.

3. 求函数 $f(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & -1 \\ -x & -x & x \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数.

第二节 n 阶行列式

一、全排列与逆序

定义 1 由 n 个不同元素排成一行, 称为这 n 个元素的一个全排列 (或简称 n 级排列).

n 个不同元素的所有不同的排列共有 $P_n = n!$ 种. 这里主要讨论 n 个自然数 $1, 2, \dots, n$ 所构成的排列.

首先规定一个标准排列次序: 称 $1, 2, \dots, n$ 为标准序 (即规定左小右大为顺序). 由 $1, 2, \dots, n$ 所构成的任一排列中, 若某两个元素的排列次序与顺序不同, 就称为一个逆序. 例如 $1, 2, 3$ 排成的 3 级排列, 共可有 $P_3 = 3! = 6$ 种: $123, 132, 213, 231, 312, 321$. 其中 123 就是标准排列, 而在 132 中, 3 在 2 的左边, 与标准序不同, 故 $3, 2$ 之间有 1 个逆序.

一般地, n 个自然数 $1, 2, \dots, n$ 的一个任意排列记作 $p_1 p_2 \cdots p_n$, 若第 i 个位置上的元素 p_i 的左边有 t_i 个元素比 p_i 大, 就说元素 p_i 的逆序是 t_i . 一个排列中所有逆序的和称为这个排列的逆序数, 记作 t . 因此排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数就是:

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^n t_i \quad (1-1)$$

例 1 求排列 641523 的逆序数.

解 6 级排列的标准序为 123456 , 下面逐一分析各数的逆序数.

首位 6 的逆序数为 0; 4 的逆序数为 1; 1 的逆序数为 2; 5 的逆序数为 1; 2 的逆序数为 3; 3 的逆序数为 3. 所以, 由公式 (1-1), 排列 641523 的逆序数 $t = 0 + 1 + 2 + 1 + 3 + 3 = 10$.

例 2 求排列 $n(n-1)\cdots 1$ 的逆序数.

解 n 级排列的标准序为 $12\cdots n$. 首位 n 的逆序数为 0; $n-1$ 的逆序数为 1; $n-2$ 的逆序数为 2; $\cdots$, 2 的逆序数为 $n-2$; 1 的逆序数为 $n-1$. 所以, 由公式 (1-1), 排列 $n(n-1)\cdots 1$ 的逆序数为:

$$t = t[n(n-1)\cdots 1] = 0 + 1 + \cdots + (n-2) + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

称 t 为奇数的排列为奇排列, t 为偶数的排列为偶排列. 如例 1 中的排列就是一个偶排列; 排列 561423 也是一个偶排列, 而排列 461523 就是一个奇排列. 容易想到, $n!$ 个不同的 n 级排列中, 奇排列和偶排列各占一半.

定义 2 将一个排列中的任意两个元素的位置对换, 而其余元素不动, 得到一个新的排列, 这称为对换. 若对换的是相邻的两个元素, 则称为相邻对换.

排列 461523 可由排列 641523 进行一次相邻对换得到, 也可由排列 561423 进

行一次不相邻对换得到, 这里排列 641523 和排列 561423 都是偶排列, 而排列 461523 是一个奇排列, 可见进行一次对换 (无论相邻与否) 将改变排列的奇偶性. 一般地, 有以下结论.

定理 1 一个排列经过一次元素对换, 排列的奇偶性改变一次.

证明 先证相邻对换的情形:

设排列 $\cdots ij \cdots$ (2) 经过一次相邻对换后变成排列 $\cdots ji \cdots$ (3), 这里 “ $\cdots$ ” 表示排列中其余那些不动的元素. 容易看出, i, j 和其他的元素之间的逆序没有改变, 改变的只是 i 和 j 二者的次序: 若 $i < j$, 则在排列 (2) 中 ij 不构成逆序, 但在排列 (3) 中 ji 构成一个逆序, 故排列 (3) 的逆序数比排列 (2) 的逆序数增加 1; 若 $i > j$, 则在排列 (2) 中 ij 构成一个逆序, 但在排列 (3) 中 ji 则没有逆序, 故排列 (3) 的逆序数比排列 (2) 的逆序数减小 1. 总之, 排列 (3) 与排列 (2) 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形:

设排列 (4): $\cdots ib_1 b_2 \cdots b_k j \cdots$, 将 i 与 j 对换, 变成排列 (5): $\cdots j b_1 b_2 \cdots b_k i \cdots$, 这一过程可视为排列 (4) 先经 k 次相邻对换 (i 向后换), 变成排列 (6): $\cdots b_1 b_2 \cdots b_k i j \cdots$, 又经 $k+1$ 次相邻对换 (j 向前换), 就变成了排列 (5), 于是可知排列 (4) 可经 $2k+1$ 次相邻对换变成排列 (5), 因此排列 (4) 与排列 (5) 的奇偶性改变了 $2k+1$ 次, 故必相异.

推论 1 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数, 偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

证明 由定理 1 知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数, 而标准排列是逆序数为零的偶排列, 故推论成立.

二、 n 阶行列式的定义

定义 3 由 n^2 个元素 a_{ij} ($i, j=1, 2, \cdots, n$) 排成 n 行、 n 列构成的运算式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1q_1} a_{2q_2} \cdots a_{nq_n} \quad (1-2)$$

称为 n 阶行列式, 简记为 $\det(a_{ij})$. 其中 a_{ij} 为行列式 $\det(a_{ij})$ 的元素; $q_1 q_2 \cdots q_n$ 为 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列; t 为 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 的逆序数.

从定义 3 可知, n 阶行列式的运算式 $\sum (-1)^t a_{1q_1} a_{2q_2} \cdots a_{nq_n}$ 中, 一般项 $(-1)^t a_{1q_1} a_{2q_2} \cdots a_{nq_n}$ 由 n 个位于不同行不同列的元素相乘而得, 符号由排列 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 的逆序数的奇偶性决定.

特别规定: 一阶行列式 $|a| = a$. 注意这里的行列式记号不要与绝对值记号混淆.

例 3 用定义计算下列 4 阶行列式: $D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

解 在 $\sum (-1)^t a_{1q_1} a_{2q_2} a_{3q_3} a_{4q_4}$ 中, 要使 $a_{1q_1} a_{2q_2} a_{3q_3} a_{4q_4} \neq 0$, 应取 $a_{3q_3} = a_{32}$, 从而 $a_{1q_1} = a_{14}$, $a_{4q_4} = a_{43}$, $a_{2q_2} = a_{21}$, 所以 $a_{1q_1} a_{2q_2} a_{3q_3} a_{4q_4} = a_{14} a_{21} a_{32} a_{43}$, 4123 的逆数字为 3, 故

$$D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1q_1} a_{2q_2} a_{3q_3} a_{4q_4} = (-1)^3 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = -1.$$

在行列式 D 中, 将 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ 所组成的对角线称为 D 的主对角线, 这些元素称为主对角元. 而 $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ 所组成的对角线称为 D 的副对角线.

称主对角线以上(下)的元素全为零的行列式为下(上)三角形行列式.

用例 3 的思想可以推得:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

除了主(副)对角线元素外其他元素都为零的行列式称为主(副)对角行列式. 如主对角行列式:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \quad (1-3)$$

副对角行列式:

$$D_2 = \begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \ddots & & \\ a_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n \quad (1-4)$$

式(1-3) 是显然成立的, 下证式(1-4) 成立.

在行列式定义式 $\sum (-1)^t a_{1q_1} a_{2q_2} \cdots a_{nq_n}$ 中, 非零的只有一项:

$$a_{1q_1} a_{2q_2} \cdots a_{nq_n} = a_{1n} a_{2(n-1)} \cdots a_{n1} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

而其逆序数 $t = t(q_1 q_2 \cdots q_n) = t[n(n-1) \cdots 1] = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, 所以 $D_2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$.

定理 2 n 阶行列式也可定义为

$$D = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n} \quad (1-5)$$

其中 t 为排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数.

证明 由行列式定义, $D = \sum (-1)^N a_{1q_1} a_{2q_2} \cdots a_{nq_n}$, N 为 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 的逆序数. 记

$$D_T = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

取 D 中任一项 $(-1)^N a_{1q_1} \cdots a_{iq_i} \cdots a_{jq_j} \cdots a_{nq_n}$, 其行标 $1 \cdots i \cdots j \cdots n$ 为标准排列, 逆序数为 $t_1 = 0$, 记列标的逆序数为 $t_2 = t(q_1 \cdots q_i \cdots q_j \cdots q_n)$. 对换 a_{iq_i} 与 a_{jq_j} 得 $a_{1q_1} \cdots a_{jq_j} \cdots a_{iq_i} \cdots a_{nq_n}$, 记对换后的行标排列的逆序数为 $r_1 = t(1 \cdots j \cdots i \cdots n)$, 列标排列的逆序数为 $r_2 = t(q_1 \cdots q_j \cdots q_i \cdots q_n)$. 则 r_1 为奇数, r_2 与 t_2 的奇偶性也不同. 由于该项中两元素的次序对换, 使行标排列与列标排列同时作了一次对换, 则对换后的行标、列标排列的逆序数之和的奇偶性与原来行标、列标排列的逆序数之和的奇偶性必相同: $(-1)^N = (-1)^{t_1+t_2} = (-1)^{r_1+r_2}$. 故该项的值 (连符号) 不变:

$$(-1)^T a_{1q_1} \cdots a_{iq_i} \cdots a_{jq_j} \cdots a_{nq_n} = (-1)^{r_1+r_2} a_{1q_1} \cdots a_{jq_j} \cdots a_{iq_i} \cdots a_{nq_n}$$

依此类推, 经若干次元素对换, 将该项的列标排列 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 变成标准排列 $1, 2, \cdots, n$, 同时行标排列也就从自然排列 $1, 2, \cdots, n$ 变成了 $p_1 p_2 \cdots p_n$, 此时逆序数分别变为 $R_1 = t(p_1 p_2 \cdots p_n)$, $R_2 = t(1, 2, \cdots, n) = 0$. 由于每次对换都不改变两个逆序数之和的奇偶性, 故最后该项的符号仍不变:

$$(-1)^N = (-1)^{R_1+R_2} = (-1)^t$$

$$\text{即} \quad (-1)^N a_{1q_1} a_{2q_2} \cdots a_{nq_n} = (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

因此, 对 D 中任一项 $(-1)^N a_{1q_1} a_{2q_2} \cdots a_{nq_n}$, D_T 中有且仅有一项 $(-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$ 与之对应并相等. 同理, 对 D_T 中的任一项, D 中也有且仅有一项与之对应并相等. 即 D 与 D_T 中的项可以一一对应并相等, 故 $D = D_T$.

进而, 可得到更一般的行列式定义.

推论 2 n 阶行列式一般可定义为

$$D = \sum (-1)^{t_1+t_2} a_{p_1 q_1} a_{p_2 q_2} \cdots a_{p_n q_n} \quad (1-6)$$

其中 $p_1 \cdots p_n$, $q_1 \cdots q_n$ 分别为行标排列和列标排列; 它们的逆序数分别为 $t_1 = t(p_1 \cdots p_n)$, $t_2 = t(q_1 \cdots q_n)$.

当行标或列标呈标准排列时, 有 $t_1 = 0$ 或 $t_2 = 0$, 便得到前面的定义 3 和定理 2.

三、行列式的基本性质

把行列式 D 的行、列互换所得到的行列式称为 D 的转置行列式, 记作 D^T . 即若

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}$$

则

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}$$

性质 1 行列式与它的转置行列式相等, 即 $D = D^T$.

证明 将 $D = \det(a_{ij})$ 的转置行列式记作

$$D^T = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{nm} \end{vmatrix}$$

则 $b_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \cdots, n)$. 由定义知

$$D^T = \sum (-1)^t b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n} = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

于是由定理 2 推出

$$D = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n} = D^T$$

由性质 1 可知, 行列式中行与列具有对等的地位, 对行成立的性质对列也成立, 反之亦然. 以下仅讨论行的性质, 然后引申到列即可.

性质 2 行列式两行 (列) 互换, 行列式的值变号.

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}$$

$$\text{又记 } D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{vmatrix}$$

即 D_1 由行列式 D 互换第 i 行与第 j 行得到.

由定义知 $D = \sum (-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n}$

$$\begin{aligned} \text{而 } D_1 &= \sum (-1)^t b_{1p_1} \cdots b_{ip_i} \cdots b_{jp_j} \cdots b_{np_n} \\ &= \sum (-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n} \\ &= \sum (-1)^{t_1} a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n} \end{aligned}$$

其中 $t = t(p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n)$, $t_1 = t(p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n)$

由定理 1 知 t_1 与 t 的奇偶性正好相反, 故 $(-1)^t = -(-1)^{t_1}$, 所以 $D_1 = -D$.

由性质 2 即可得到下面的推论.

推论 1 若行列式 D 中有两行(列)元素对应相等, 则 D 的值为零.

证明 把 D 相同的两行(列)互换, 所得行列式记作 D_1 , 则由性质 2 得 $D_1 = -D$, 而 D 实际上没有变, 故应有 $D_1 = D$, 所以 $D = 0$.

性质 3 用数 k 乘以行列式 D , 等于将该数 k 乘到 D 的某一行(列)中所有的元素上.

证明 按定义

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1q_1} \cdots a_{iq_i} \cdots a_{nq_n} \\ kD &= k \left[\sum (-1)^t a_{1q_1} \cdots a_{iq_i} \cdots a_{nq_n} \right] = \sum (-1)^t a_{1q_1} \cdots (ka_{iq_i}) \cdots a_{nq_n} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

推论 2 行列式某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 3 若行列式有一行(列)的元素全为零, 则其值为零.

推论 4 若行列式有两行元素对应成比例, 则其值为零.

下面的性质称为“拆行”.

性质 4 若 D 的某一行(列)的元素都可表为两数之和, 则以下等式成立:

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

证明 按定义

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} \\
 &= \sum (-1)^t a_{1q_1} \cdots (a_{iq_i} + b_{iq_i}) \cdots a_{nq_n} \\
 &= \sum (-1)^t a_{1q_1} \cdots a_{iq_i} \cdots a_{nq_n} + \sum (-1)^t a_{1q_1} \cdots b_{iq_i} \cdots a_{nq_n} \\
 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

例如:

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} a_1 + c_1 & a_2 + c_2 \\ b_1 + d_1 & b_2 + d_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 + c_2 \\ b_1 & b_2 + d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & a_2 + c_2 \\ d_1 & b_2 + d_2 \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_2 \\ b_1 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & a_2 \\ d_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$