



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

文科数学基础

第二版

戴 瑛 主编

戴 瑛 陈吉象 吴忠华 郑弃冰 顾 沛 编



高等教育出版社
Higher Education Press

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

文科数学基础

第二版

戴 瑛 主编

戴 瑛 陈吉象 吴忠华

郑弃冰 顾 沛 编

高等教育出版社

内容简介

本书是在普通高等教育“十五”国家级规划教材《文科数学基础》一书的基础上,经过多年教学实践,重新修订而成,已列入普通高等教育“十一五”国家级规划教材。

本书在内容取材、课程体系设计上针对文科学生特点,致力于文科学生的文化素质教育。本书内容涵盖了连续的微积分、离散的线性代数、随机的概率统计,最后由逻辑初步及数学软件 Mathematica 简介结尾。全书以数学知识为载体,在介绍数学知识的同时融入了数学科学的思想、精神、方法,渗透了数学的人文精神,使学生了解数学,体会数学的科学价值、应用价值、人文价值,增强他们理性思维的能力,为他们顺应时代的发展创造条件。本书可供高等学校文科类各专业学生及对数学有同等要求的读者使用。

图书在版编目(CIP)数据

文科数学基础/戴瑛主编. —2 版. —北京:高等教育出版社, 2009. 11

ISBN 978-7-04-028077-7

I. 文… II. 戴… III. 高等数学-高等学校-教材
IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 181760 号

策划编辑 于丽娜 责任编辑 李 陶 封面设计 于文燕 责任绘图 宗小梅
版式设计 余 杨 责任校对 杨雪莲 责任印制 尤 静

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
总 机 010-58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京凌奇印刷有限责任公司

开 本 787×960 1/16
印 张 22.25
字 数 420 000

购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2003 年 8 月第 1 版
2009 年 11 月第 2 版
印 次 2009 年 11 月第 1 次印刷
定 价 24.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 28077-00

第二版前言

随着 21 世纪知识经济时代和信息时代的到来,社会领域中许多研究对象的数量化趋势日渐加强,再加上计算机的广泛普及和应用,给人们一个现实的启示:每一个想成为有较高文化素质的现代人都应当具备较高的数学素质。因此,数学教育对文科大学生来说,必不可少。近些年来,数学的地位和作用越来越被大多数人认可。一些科学家把数学科学与自然科学、哲学社会科学并列,作为共同支撑人类知识宝库的三大类科学。大学生的数学素质成为其文化素质中的重要组成部分。

如何激发文科学生学习数学的兴趣?如何渗透数学的思想方法?如何提高数学能力?这是高等数学课程面临的一个新的课题,如何能够提高学生的数学素质和文化素质,数学文化无疑是促进高等数学课程教学的一个重要环节,这已经是不争的事实。将数学文化融合在各知识点中,即将数学文化体现在各教学环节之中,也势在必行。

在上述背景和认识下,本书重新修订的主要思路是——对于文科大学生,数学教育将从以下四个方面发挥作用:第一,掌握必要的数学工具,用来处理和解决人文学科中普遍存在的数量化问题与逻辑推理问题;第二,了解数学文化,提高数学素质,这种素质将使人终生受益;第三,潜移默化地培养学生“数学方式的理性思维”,如抽象思维、逻辑思维等,它会使文科学生在日后的具体工作中高人一筹;第四,培养全面的审美情操,数学的美感使得有人把它与史诗、音乐、造型并列为美学的四种中心构架。

因此在本书的修订编写中注重两点:一是如何挖掘若干知识点中的数学文化,二是如何寻找数学文化的切入点,在教学中渗透数学文化,达到“润物细无声”的教学效果,从而提升高等数学课堂教学的质量。切入点的选择要采取灵活多变的方式,以数学知识为载体,讲授数学的思想和方法、数学史中的重大事件、数学中的美、数学与其他文化的关系以及数学的现状和未来。这样,不仅增加了这门课程的趣味性,更重要的是能够提高大学生的数学文化素养。

在高等数学课程中融入数学文化,不但有利于学生理解数学知识,掌握数学技能,还有利于学生从思想上树立数学理念,从而实现培养学生数学素质的教育目的。这样,不仅使学生掌握数学知识、技能,而且还使数学知识所表现的理性精神和思想方法渗入学生的头脑,使其养成冷静、客观、公正的思维习惯,能用数学眼光看问题,能用数学思想解决问题。

在本书的修订过程中得到了南开大学数学学院顾沛教授的指导和帮助,本

书作为教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会高等理工教育数学基础课程教学改革与实践项目“数学文化融入文科数学课程教学的研究与实践”的成果,也得到了项目组其他老师的支持和帮助,在此一并表示感谢。

将数学文化融入高等数学课程是在本书修订中的一种大胆尝试,由于水平所限,本次修订不当之处难以避免,恳请读者批评指正。

编者

2008年12月

第一版前言

数学对于自然科学的巨大作用是不言而喻的,它是构筑现代物质文明的重要基石。然而数学对于社会与人文科学(我们所说的文科不包括经济管理类)的作用,数学对于现代人整体素质的意义,却是逐渐被人们所认识的。随着知识经济时代的来临,社会经济领域中许多研究对象的数量化趋势越发加强,计算机的广泛普及并深入到人们生活工作中的各个角落,诸如此类现象,向人们提出了一个迫切的问题:每个要想成为有较高文明素养的现代人,应当具备一定的数学素质,因此数学教育对于文科大学生来说,应该是必不可少的了。

事实上,21 世纪资源、环境、人口等的压力,知识和信息的大爆炸,越来越短周期的技术更新等等,正在向我们发起严峻的挑战,对学生的应变能力与思维素质的培养,已被提到首要的地位。大学生在大学的几年只是终生学习最重要的一个基础台阶,他们应该在教师的帮助和校园环境的陶冶下,通过适当的知识载体,不断地、自觉地学习和提高自身选择、吸取、整理和创造知识的能力。数学正是这样一个重要的不可或缺的载体。

文科与理科终究有所区别,这不仅在于学科本身,还在于学生素质的差异。不少文科学生由于数学基础(包括数学知识与数学思维能力)较理科学生差一些(当然,少数文科学生也有很好的数学基础),对数学缺乏兴趣,学习数学的动力不足。对于文科学生的数学教育必须考虑到这些。

20 世纪 80 年代后期,南开大学曾自编过文科数学讲义,1995、1999 年分别出版过两种文科数学教材。根据多年来的教学实践,同时吸取了许多兄弟院校的经验,我们对原有教材进行了修改和补充,在教育部现代远程教育资源建设委员会和高等教育出版社的支持下,制作了《文科数学基础网络课程》,本书基本上是该网络课件的配套文字教材,可以作为文科专业的本科数学课教材。下面有几点说明:

1. 关于选材。现代数学分支五花八门,极其繁多,对于文科学生来说,尤其要抓住主要的基础性部分。现代数学总体上可以理解为离散、连续和随机三个门类,又通过逻辑互相关联,因此我们选取了离散的线性代数、连续的微积分、随机的概率与数理统计,然后是逻辑初步,最后用数学实验作为结尾。

2. 关于数学实验。教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革”课题组在 20 世纪 90 年代提出了设想,并在 1998 年 10 月教育部“数学教育研讨班”(香山会议)上正式公布了方案,把数学实验作为理科非数学专业高等数学课程的一部分。我们以为,文科学生选学一点适当的数学实验,通过亲自动

手,可以提高他们对数学的兴趣,有助于培养数学素质。另一方面,通过数学实验,了解 Mathematica 软件的基本功能与使用方法,有助于掌握《文科数学基础网络课程》中的有关操作. 因此我们把数学实验作为本书的最后一章。

3. 关于层次。教材内容(包括习题)一般分两个层次,凡是带*的内容与习题应当作为提高与选学的,当然要根据实际情况来掌握。

4. 关于习题。本书前四章每一节后都配有较多数量的习题,教师可根据实际情况选用。对于学生来说,学数学不做习题是不行的,但也要根据自己的实际进行练习。我们建议读者在有条件时做适当数量的习题,对于微积分的计算题来说,可利用《文科数学基础网络课程》中的“智能练习”,按照 Mathematica 软件的输入规则录入自己做的练习,系统就会作出判断,指出有没有错误,错在哪里。

5. 关于课时建议。第一、二、三、四各章分别用 18、50、60、8 学时,第五章选学。

本书由陈吉象主编,第一、三章分别由郑弃冰、戴瑛编写,陈吉象编写了第二、四章,第五章数学实验由陈吉象和吴忠华共同编写。南开大学数学科学学院的领导,以及吴越思、温媛、高敏芬、陈学民等老师为本书的完成都作出了贡献,作者在此表示衷心的感谢! 最后还要感谢高等教育出版社的徐刚、李艳馥等老师的支持和帮助!

编者
2003 年 1 月

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581896/58581879

传 真：(010) 82086060

E - mail：dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

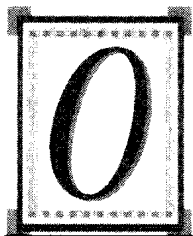
邮 编：100120

购书请拨打电话：(010)58581118

目 录

第 0 章	数学与人文社会科学	1
第 1 章	微积分	4
1.0	国际数学组织及数学问题简介	4
1.1	函数	7
1.2	极限	22
1.3	导数与微分	40
1.4	导数的应用	57
1.5	不定积分	70
1.6	定积分	86
1.7	积分应用	100
第 2 章	线性代数	115
2.1	行列式	115
2.2	矩阵及其运算	125
2.3	一般线性方程组的求解	146
第 3 章	概率统计	161
3.1	随机事件及其运算	161
3.2	概率的定义	169
3.3	条件概率及全概率公式	179
3.4	随机变量及其分布	194
3.5	随机变量的数字特征	211
3.6	抽样分布	225
3.7	参数估计	236
3.8	假设检验	253
3.9	线性回归分析	273
第 4 章	逻辑初步	289
4.1	概念与命题	289
4.2	逻辑运算的基本定理	296
第 5 章	数学软件 Mathematica 简介	308
5.1	基本语法	309
5.2	数组与线性代数	313
5.3	微积分	317

5.4 概率统计.....	318
5.5 图形与可视化	322
习题答案	328
附表 1 泊松分布数值表	340
附表 2 标准正态分布函数数值表	343
附表 3 t 分布临界值表.....	344
附表 4 相关系数显著性检验表	345
参考文献	346



第 0 章

数学与人文社会科学

马克思曾经指出：“一门科学只有在成功地应用数学时，才算达到了真正完善的地步。”马克思所说的科学“真正完善”的时代已经到来，其中最先成功应用数学的是自然科学，进入 20 世纪，人文社科的领域，数学的应用已经发展到不懂数学的人望尘莫及的阶段。社会科学方面的重大成就中数学化的定量研究占相当大的比例。可以说，数学与人文社会科学的联系，已不仅仅停留在文化范畴或思维方式层面，数学已经直接成为人文社会科学研究必不可少的工具。

一、数学在语言学研究方面的应用

语言学和数学是最古老的学科，也是在学校教育中最重要的基础学科。虽然语言学属于人文科学，数学通常被归为自然科学，二者看似风马牛不相及，但却有着深刻的内在联系。一般语言和数学语言都是由符号组成，都遵循一定的规则和结构，而语言符号所具有的许多特点和数学的思想方法有着内在的关联。因此法国数学家阿达马曾深刻地指出“语言学是数学和人文科学之间的桥梁”。

数学与语言学的结合是数学成功应用的一个范例。运用数学方法来研究语言现象的设想始于 19 世纪中叶，1847 年，俄国数学家布里亚柯夫斯基认为，可以用概率论进行语法、词源及语言历史比较的研究。1904 年，波兰语言学家库尔特内认为，语言学家不仅应该掌握初等数学，而且还有必要掌握高等数学。他相信语言学将日益接近精密科学，将根据数学的模式，一方面“更多地扩展量的概念”，一方面“将发展新的演绎思想的方法”。1933 年，美国语言学家布龙菲尔德提出了“数学不过是语言所能达到的最高境界”的观点。

不少学者将上述设想付诸于实际的行动。如 1881 年，德国学者迪丁贝尔格用统计方法把柏拉图著作的执笔时期分为前期、中期和后期三个阶段；1898 年，德国学者凯定编制了世界上第一部频率词典《德语频率词典》；1944 年，英国数学家尤勒发表著作《文学词语的统计分析》，大规模地使用概率和统计方法来研究语言。我国著名教育学家陈鹤琴早在 20 世纪 20 年代就开始进行汉字的频率统计研究，通过对大量报刊、书籍等统计，于 1925 年完成了《语体文应用词汇》

一书。

随着计算机的问世,进一步促进了数学与语言学的研究,数学渗透到了语言学的各分支领域,形成许多交叉学科如应用数理语言学、统计语言学、代数语言学等,利用数学方法可以开展对语言学中字频、词频、方言、写作风格等方面的研究,例如利用统计方法可以鉴定莎士比亚新诗的真伪;世界名著《静静的顿河》的真正作者;判断《红楼梦》后四十回是否为曹雪芹的原作等。数学、语言学和计算机结合,实现了机器对文字和语言的自动翻译。1952年,我国教育部曾经公布过《常用字表》,后又根据社会用字的实际情况,利用计算机重新研究《现代汉语常用字表》,通过抽样,统计分析,统计检验,于1988年1月制定出新的《现代汉语常用字表》。

二、数学在其他人文学科中的应用

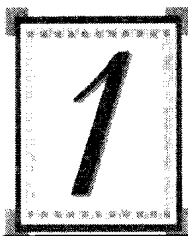
在法学中,建立在数学基础上的指纹识别和基因测试等现代侦查手段已经成为侦案断案的强有力的工具。数学的逻辑推理、公理化方法和数理统计方法等也广泛地应用于法学的研究。例如有人说美国没有种族歧视,因为根据某年的数据进行统计分析,白人杀人后被判死刑的概率为 $19/160$,黑人杀人后被判死刑的概率是 $17/160$,由此说明美国没有种族歧视,后来有人仔细研究这组数据,发现如果再看被害人是什么人,则情况是:白人杀白人被判死刑的概率是 12.6% ,白人杀黑人判死刑的概率是 0 ,黑人杀白人判死刑的概率是 17.5% ,黑人杀黑人判死刑的概率是 5.8% ,由此可看到明显的种族歧视,这是同一组数据,制成了统计中的列联表,原来用的是二维列联表,后来只不过多加了一列,成为三维列联表。所以对同一组数据使用不同的统计方法可能使结果大相径庭。统计研究数据时能不能把真实的东西挖掘出来,这点很重要。

对于历史学科,有意识地系统地利用数学方法,始于20世纪的上半叶,统称为计量史学。计算机的广泛应用,计量史学的研究领域更加广泛,应用计量方法的史学家日益增多,有关计量史学的论文不断涌现,计量史学已成为国际史学研究中最庞大的流派,发展非常迅速。计量化将数学语言和方法引入史学研究,定量和定性方法的有机结合使历史学趋于严谨、精确。无疑将大大推动历史学的研究。

在政治学中,任何一个国家、一个社会团体,或者一个股份制企业都会涉及选举权力机构或通过投票决策的问题。利用数学模型,可以定量与定性相结合,研究比较不同的选举制度和具体的选举方法,以保证选举和投票结果合理公正。在政治社会学科,相关的社会选择,投票体制委员会决策、联盟行为和策略的相互作用等课题的研究,已经形成了数学的一个主要分支。在社会学人口学领域,利用统计学研究人的出生与死亡问题,研究婚姻的数量和居民的密度与富裕程度的依赖性,研究影响生育能力的各种原因,分析死亡与城市和农村生活条件、

居民密度、流行病的依赖关系,现在社会统计学已经成为社会学研究必备的知识.

在其他学科,如哲学、逻辑学、心理学、艺术等领域,数学的应用也都有了很多进展,客观地讲目前人文社会科学领域数学的应用还处于初级阶段,人文社会科学的基本特征乃至整个社会的基本特征与现代数学的基本特征十分相似,人文社会科学领域应该是数学,特别是现代数学或未来数学发展的很好的背景空间和应用领地,人文社会学科的学生应该面向未来,学习掌握必要的数学工具,推动本学科数学化的进程.



第 1 章 微积分

本章微积分的基本知识, 包括函数概念、函数的极限、导数与微分、不定积分与定积分、反常积分与微分方程等基本概念及其简单计算方法与应用.

1.0 国际数学组织及数学问题简介

人类的数学起源于埃及、巴比伦、希腊、中国、印度、玛雅等多种文明. 但是到 20 世纪, 地球上只有一种数学, 这就是以古希腊数学为基础, 通过文艺复兴以后在西欧形成, 并经世界各国数学家们共同努力日益发展的近现代数学. 任何一个民族, 尽管在语言、民俗、文化中仍有某些自己的数学传统, 但一旦进入学校, 现在都要学习全球通用的唯一的一种数学语言和数学体系. 国际数学界也以前所未有的广度和深度进行着交流和合作, 国际数学组织应运而生, 国际数学活动日益活跃与发展, 下面简要介绍其中最重要、影响最大的国际数学家大会及对现代数学发展影响具有重大意义的希尔伯特的 23 个问题.

1897 年元旦, 苏黎世联邦工业大学教授闵科夫斯基等 21 位数学家发起召开国际数学家会议. 同年 8 月 8 日, 第一次国际数学家大会在瑞士苏黎世召开, 会期 3 天, 来自 16 个国家的 208 名数学家到会, 庞加莱、F·克莱因等作了报告. 1900 年, 第二次数学家大会在巴黎举行, 在会上希尔伯特(Hilbert, 1862—1943)发表了著名演说, 提出了 23 个问题, 为 20 世纪的数学发展揭开了光辉的一页. 此后, 国际数学家大会(International Congress of Mathematicians, 简称 ICM) 每 4 年举行一次, 除两次世界大战期间外, 未曾中断. 现在 ICM 已经成为规模最大, 水平最高的全球性数学科学学术会议, 平均与会人数达三千人左右. 会议邀请的 1 小时大会报告和 45 分钟报告, 一般被认为代表了近期数学科学中最重大的成果与进展而受到高度重视. 另外每次大会开幕式上同时举行颇具声誉的菲尔兹奖颁奖仪式, 更使历届国际数学家大会成为数学界乃至舆论界瞩目的盛事.

在一国举办 ICM 是该国数学发展水平和国际地位的标志. 2002 年国际数

学家大会(简称 ICM2002)于 2002 年 8 月 20 日—8 月 28 日在北京举行,取得了圆满成功,来自 104 个国家和地区的 4157 名数学家到会(其中我国内地数学家 1965 名),与会人数是历届 ICM 最多的.为使公众更好地了解数学,加强数学与社会的联系,大会期间共组织了 4 场公众报告(General Public Talks).我国首届国家最高科技奖获得者吴文俊院士,诺贝尔奖获得者,美国普林斯顿大学的纳什教授,美国纽约大学的 Poovey 教授,就数学的作用和对其他科学乃至对社会的影响等方面作了公众报告.世界著名科学家,英国剑桥大学的霍金(Hawking)也做了一场公众报告.这些报告产生了广泛而热烈的反响. ICM2002 大会取得了巨大的成功,也得到了国际数学界广泛的高度评价,它得以 21 世纪数学界的首次最高盛会和历史上第一次在发展中国家举办的国际数学家大会而载入史册.

希尔伯特是 19 世纪末至 20 世纪上半叶最伟大的数学家之一,他提出的 23 个问题更是功勋卓著、影响深远.

希尔伯特于 1862 年 1 月 23 日出生于德国的哥尼斯堡,他一直在家乡上学,1884 年获哥尼斯堡大学博士学位,1895 年开始任著名的哥廷根大学的教授,1943 年 2 月 14 日去世.他在代数、几何、分析、公理化方法和元数学等数学的多个领域都做出了具有深远影响的工作.

在 1900 年于巴黎召开的第二届国际数学家大会上,年仅 38 岁的希尔伯特做了题为《数学问题》的著名演讲,根据 19 世纪数学研究的成果和发展趋势提出了 23 个问题,成为数学史上的一个重要里程碑.

希尔伯特在演讲的前言和结束语中,对各类数学问题的意义、源泉及研究方法发表了许多精辟的见解,整个演说的主体则是提出 23 个问题.希尔伯特说:“通过这些问题的讨论,我们可以期待科学的进步.”希尔伯特的演讲获得了极大的成功,各国的数学杂志争相转载.

在世纪之交提出的 23 个问题十分重要,涉及现代数学的许多领域.一个世纪以来,这些问题激发着数学家们浓厚的研究兴趣,对 20 世纪数学的发展起了巨大的推动作用.

希尔伯特提出的 23 个问题为:

1. 证明“连续统假设”,即证明“可数基数”与“连续统基数”之间不存在任何基数.

2. 研究算术公理的相容性.

3. 两个等底等高的四面体的体积相等.

4. 直线作为两点间最短距离的问题.

5. 不要定义群的函数的可微性假设的李(S. Lie)的连续变换群的概念.

6. 物理学的公理化.

7. 某些数的无理性和超越性.
8. 素数问题.
9. 在任意数域中证明最一般的互反定律.
10. 丢番图方程的可解性.
11. 系数为任意代数数的二次型.
12. 阿贝尔域上的克罗内克定理在任意代数有理域上的推广.
13. 不可能用仅有两个变数的函数解一般的七次方程.
14. 证明某类完全函数系的有限性.
15. 舒伯特 (Schubert) 计数演算的严格基础.
16. 代数曲线与代数曲面的拓扑问题.
17. 正定形式的平方和表示.
18. 用全等多面体构造空间.
19. 正则变分问题的解一定是解析的吗?
20. 一般边值问题.
21. 具有指定单值群的线性微分方程解的存在性证明.
22. 通过自守函数使解析关系单值化.
23. 变分法的进一步发展.

经过整整一个世纪,希尔伯特的 23 个问题中有将近一半已经解决或基本解决,有些问题虽未解决,但也取得了重要进展;有的问题则离解决还差得很远.

能够解决一个或基本解决一个希尔伯特问题的数学家,就自然地被认为世界一流水平的数学家,由此可见希尔伯特问题的特殊地位.

重要的“问题”历来是推动科学前进的杠杆,但一位科学家如此自觉、如此集中地提出这样一整批问题,并且如此持久地影响了一门学科的发展,这在科学史上是绝无仅有的.

当然,希尔伯特的 23 个问题也不可能是尽善尽美的. 一些评论者认为,其局限性是希尔伯特问题未包括拓扑学、抽象代数和微分几何学,而这些在 20 世纪也成了数学的前沿和热点,这是希尔伯特没有预见到的. 此外,希尔伯特问题除数学物理外,很少涉及应用数学.

20 世纪数学发展的深度和广度都大大超过了当初的想象,但这并不能影响希尔伯特问题的光芒,许多重大数学奖项获得者的工作都与希尔伯特问题有关.

1.1 函数

教学要求

本节要求读者在复习中学函数知识的基础上加深理解函数概念.

1. 掌握由已知函数产生新函数的方法——函数的四则运算, 函数的复合, 反函数, 归纳出初等函数的概念.
2. 扩展对函数种种实例的认识, 熟悉基本初等函数的图像, 重点掌握复合函数与分段函数.
3. 结合图像理解函数的四种性态: 奇偶性, 周期性, 单调性, 有界性.

知识点

1. 函数概念.
2. 由已知函数产生新函数.
3. 函数的性态.

1.1.1 函数概念

1. 映射与变量

宇宙万物的基本特征是运动, 有时我们看到的静止状态则是相对的和暂时的, 而一种物体的运动变化又与其他物体的运动变化相关联, 反映到数学上, 就出现了集合、映射、变量与常量, 无限与有限这些概念. 初等数学研究的基本对象是常量是有限, 反映了物体暂时的、相对的静止状态, 为了更精确、更实际地反映物质世界运动变化的特征, 必须研究变量及其相互关系. 而高等数学研究对象是变量, 是利用“有限”来刻画“无限”, 又利用“无限”来研究“有限”. 映射是集合与集合间的对应关系, 它是社会或自然界中错综复杂的事物间相互依赖关系的反映. 例如: y 是 x 的儿子, 说 y 与 x 对应. 假如这对父母有三个儿子, 可以用图 1.1 表示: 这里父母亲集合 $X = \{x_1, x_2\}$, 儿子集合 $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, x (可取值 x_1, x_2) 称为**自变量**, y 称为**因变量**. 这是一个多值对应, 与一个自变量值对应的因变量值允许多于一个. 如果说 x 是 y 的生父, 那么 x 与 y 的对应 (儿子对应到他的生父) 就是单值对应了, 如图 1.2 所示.

2. 函数定义

如果只研究实数集合 (用 $\mathbf{R}$ 或 $(-\infty, +\infty)$ 表示) 或其子集合之间的单值对应, 这种映射就是函数.

定义 设 X 与 Y 都是 $\mathbf{R}$ 的子集合, 对于 X 中每个元素 (即数) x , 按照一个确