高等学校教材配套辅导丛书

高等数学

辅导·习题详解

同济第六版

同济大学 马志敏主编

上册

同济六版习题－详解

启发式解题思路全程辅助

TOPWAY

华研教育

汕頭大學出版社

高等学校教材配套辅导丛书

高等数学
辅导·习题详解

同济第六版

同济大学 马志敏主编

上册

TOP WAY

华研教育

江苏大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导(上册)/马志敏主编. 一汕头:汕头大学出版社,2008.6
ISBN 978-7-81120-357-8

Ⅰ.高… Ⅱ.马… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 076144 号

高等数学辅导(上册)

策　　划:华研教育
主　　编:马志敏
责任编辑:胡开祥　姚待春
出版发行:汕头大学出版社
(广东省汕头市大学内　邮编:515063)
电　　话:0754-82903126
经　　销:各地新华书店
印　　刷:广东广彩印务有限公司
版　　次:2008 年 9 月第 1 版
2008 年 9 月第 1 次印刷
开　　本:880mm×1230mm　32 开
印　　张:27
ISBN 978-7-81120-357-8
定　　价:31.60 元

前言

高等数学是理工科各专业的重要基础课程,也是硕士研究生入学考试的重点科目。同济大学在编撰理工科的数学教材方面造诣深厚,其主编的《高等数学》第六版在全国许多院校都得到广泛使用。

《高等数学辅导·习题详解》是根据广大学生学习《高等数学》的反馈信息、历届本科毕业生考研的深刻体会、再结合编者多年的教学经验编写而成的,与《高等数学》第六版教材配套使用,能够指导学生更好地学习该课程,并且帮助有志于考研的学生打下扎实的数学基础。

本书上册共七章,与《高等数学》第六版教材一致。每章的内容结构如下:

一、主要内容归纳

此板块以图表的形式将每一章、每一节必须掌握的概念、性质和公式进行了系统梳理和归纳,并对容易出错的地方做了详尽的注解,让学生对每课重点、难点有一个总体了解。

二、例题分类及详解

此板块对每一章、每一节中常考的题型进行分类,通过大量的例题讲解细心点拨,并归纳总结每种题型的解题思路和技巧。

目录

第一章 函数、极限与连续

函数是高等数学的研究对象，极限的思想方法是研究与讨论函数的一种重要方法，其思想理念贯串于高等数学始终，理解函数的概念，掌握极限的概念及计算是学好高等数学的基础.

本章重点：1. 函数的概念及几何特性

2. 反函数、复合函数、初等函数
3. 极限的概念与性质
4. 极限的运算法则
5. 极限存在准则、两个重要极限
6. 无穷小的概念、性质与比较
7. 连续与间断
8. 闭区间上连续函数的性质

第一节 函数

1 • 主要内容归纳

表1–1.1 集合的概念

集合的定义	具有某种特定性质的事物或对象的全体称为集合，其中每个对象或事物称为集合的元素
集合的类型	①有限集 ②无限集
集合的表示	①列举法 ②描述法
空集	不含任何元素的集合称为空集
集合的关系	①子集 若对 $\forall x\in A\Rightarrow x\in B$，则称 A 是 B 的子集或 A 包含于 B，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$ ②相等 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$

续表1-1.1

集合的运算	①并集 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ ②交集 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$ ③差集 $A\backslash B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$ ④余集 $A^C=\{x\mid x\notin A\}$
运算性质	①交换律 $A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$ ②结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ ③分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ ④对偶律 $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$, $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$
邻域	①$U(a,\delta)=\{x\mid \lvert x-a\rvert<\delta\}$ 称为a的δ邻域 ②$\overset{0}{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<\lvert x-a\rvert<\delta\}$ 称为a的δ去心邻域

表1-1.2 映射的概念

定义	设X,Y是两个非空集合,如存在一个对应法则f,使得对$\forall x\in X$,按照法则f总有Y中唯一确定的元素$y\in Y$与该x对应,则称f为从X到Y的映射,记为 $$f:X\to Y$$ 其中X称为f的定义域,记为D_f,x称为原象,y称为x在f下的象,即$y=f(x)$,$R_f=f(X)=\{y\mid y=f(x),x\in D_f\}$称为$f$的值域
满射	设$f:X\to Y$,若$R_f=Y$,则称f为满射
单射	设$f:X\to Y$,若对X中的任意两个不同元素$x_1\neq x_2$,都有$f(x_1)\neq f(x_2)$,则称f为单射
双射 (一一映射)	设$f:X\to Y$,若f既是单射,又是满射,则称f为双射
逆映射	设f是X到Y的单射,则对$\forall y\in R_f$,有唯一的$x\in X$,满足$f(x)=y$,由此可确定一个从R_f到X的映射f^{-1},即$f^{-1}:R_f\to Y$其中$f^{-1}(y)=x$满足$f(x)=y$,称f^{-1}为f的逆映射
复合映射	设$g:X\to Y_1$,$f:Y_2\to Z$,且$Y_1\subset Y_2$则可得$fog:X\to Z$,$(fog)(x)=f[g(x)]$,$x\in X$ 称fog为g和f所构成的复合映射

表1-1.3 函数的概念

定义	设数集$D \subset R$,则称映射$f:D \to R$为定义在D上的函数,记为: $y=f(x), x \in D$ 其中x称为自变量,y称为因变量,D称为函数f的定义域,记为D_f,函数值全体$R_f=f(D_f)=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$称为$f$的值域
图像	平面点集$\{(x,y) \mid y=f(x), x \in D\}$称为函数$y=f(x)$的图像,一般为平面上的一条曲线
反函数	设函数$f:D \to f(D)$是单射,则它的逆映射$f^{-1}:f(D) \to D$称为f的反函数,其中$D_{f^{-1}}=R_f=f(D)$,$R_{f^{-1}}=D_f=D$
复合函数	设函数$y=f(u)$的定义域为D_1,$u=\varphi(x)$的定义域为D_2,值域$W_2=\{u \mid u=\varphi(x), x \in D_2\} \subset D_1$.则消去$u$后所得$y$与$x$的函数关系$y=f[\varphi(x)]$称为由函数$y=f(u)$与$u=\varphi(x)$复合而成的复合函数,其中$u$称为中间变量. 复合函数即为复合映射$fog$所确定的函数.

表1-1.4 函数的几种特性

名称	定义	几何意义
有界性	设$f(x)$的定义域为D ①如存在k_1,使对$\forall x \in D$,恒有 $f(x) \leqslant k_1$ 则称$f(x)$有上界	图像位于直线$y=k_1$下方
	②如存在k_2,使对$\forall x \in D$,恒有 $f(x) \geqslant k_2$ 则称$f(x)$有下界	图像位于直线$y=k_2$上方
	③如存在$M>0$,使对$\forall x \in D$,恒有 $\lvert f(x) \rvert \leqslant M$ 则称$f(x)$有界	图像介于两直线$y=M$与$y=-M$之间
单调性	设$f(x)$在区间I内有定义,如对I内的任意两点x_1, x_2 当$x_1<x_2$时,恒有①$f(x_1)<f(x_2)$ 则称$f(x)$在I内单调增加; ②$f(x_1)>f(x_2)$ 则称$f(x)$在I内单调减少	图像从左至右往上升 图像从左至右往下降

续表1-1.4

名称	定义	几何意义
奇偶性	设$f(x)$的定义域D关于原点对称 如对$\forall x\in D$,恒有 ① $f(-x)=f(x)$ 则称$f(x)$为偶函数; ② $f(-x)=-f(x)$ 则称$f(x)$为奇函数	图像关于y轴对称 图像关于原点对称
周期性	如存在常数$l>0$,使对$\forall x$,恒有 $f(x+l)=f(x)$ 则称$f(x)$为周期函数	每隔一个周期图像形状相同

表1-1.5　基本初等函数与初等函数

基本初等函数	①幂函数 ②指数函数 ③对数函数 ④三角函数 ⑤反三角函数	$y=x^{\alpha}\quad(\alpha\in R)$ $y=a^{x}\quad(a>0,a\neq 1)$ $y=\log_a x\quad(a>0,a\neq 1)$ $y=\sin x,y=\cos x$ $y=\tan x,y=\cot x$ $y=\sec x,y=\csc x$ $y=\arcsin x,y=\arccos x$ $y=\arctan x,y=\mathrm{arccot}\,x$
初等函数	由常数和基本初等函数经有限次的四则运算及有限次的复合运算所构成并用一个解析式表示的函数统称为初等函数	

2 • 例题分类及详解

本节的基本要求为理解函数的两个要素,会求函数的定义域,熟练应用函数的符号,掌握反函数的求法,函数的几何特性的判别.

1 函数的两个要素

函数的对应法则与定义域是确定函数的本质,称为函数的两大要素;而变量的符号的选取并非函数的本质.

例 1 设

$$f(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0\\ 2, & 0\leqslant x<1\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$$

求$f(2)$，$f(\frac{1}{2})$，$f(-\frac{1}{2})$.

解 由于$2\in[1,3]$，由定义知$f(2)=2-1=1$

$\frac{1}{2}\in[0,1)$，由定义知$f(\frac{1}{2})=2$

$-\frac{1}{2}\in(-1,0)$，由定义知$f(-\frac{1}{2})=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

例 2 下列函数$f(x)$与$g(x)$是否相同？

(1) $f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$，$g(x)=\frac{1}{x+1}$；

(2) $f(x)=\sqrt{(1-x)^2}$，$g(x)=1-x$；

(3) $f(x)=x$，$g(x)=\ln e^x$.

解 (1) $f(x)$的定义域为$x\neq\pm1$，$g(x)$的定义域为$x\neq-1$，故$f(x)$与$g(x)$是不同函数.

(2) $f(x)=\sqrt{(1-x)^2}=|1-x|$
所以当$x>1$时，$f(x)\neq g(x)$，即$f(x)$与$g(x)$的对应法则不相同，故$f(x)$与$g(x)$是不同函数.

(3) 对$\forall x$，$\ln e^x=x$
所以$f(x)$与$g(x)$的定义域相同且对应法则也相同，故$f(x)$与$g(x)$是同一函数.

2 函数定义域的求法

求初等函数的自然定义域有下列原则：
①分母不能为零；②偶次根式的被开方数不能为负数；③对数的真数不能为零或负数；④$\arcsin x$或$\arccos x$的定义域为$|x|\leqslant1$；⑤$\tan x$的定义域为$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$；⑥$\cot x$的定义域为$x\neq k\pi, k\in Z$.
由函数的解析式按以上原则可得自变量所满足的不等式组，求解不等式组即可求得函数的定义域.

例 3 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；　　(2) $y=\ln(x^2-1)+\arcsin\dfrac{1}{x+1}$.

解 (1) 依题意必须$\begin{cases}1-x^2\neq 0\\ x+2\geqslant 0\end{cases}$

解得$x\neq\pm1$，且$x\geqslant-2$

故定义域为$[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

(2) 必须$\begin{cases}x^2-1>0\\ x+1\neq 0\\ \left|\dfrac{1}{x+1}\right|\leqslant 1\end{cases}$

由$x^2-1>0$，得$x<-1$或$x>1$

由$\left|\dfrac{1}{x+1}\right|\leqslant 1$，得$x\leqslant-2$或$x\geqslant 0$

故定义域为$(-\infty,-2]\cup(1,+\infty)$

例 4 对于下列函数$f(x)$与$g(x)$，求复合函数$f[g(x)]$和$g[f(x)]$，并确定它们的定义域：

(1) $f(x)=\sqrt{x+1}$，$g(x)=x^4$；

(2) $f(x)=\sqrt{1-x}$，$g(x)=\sqrt{x-1}$.

解 (1) $f[g(x)]=\sqrt{x^4+1}$，定义域为$(-\infty,+\infty)$

$g[f(x)]=(\sqrt{x+1})^4=(x+1)^2$，定义域为$x+1\geqslant 0$

即$[-1,+\infty)$

(2) $f[g(x)]=\sqrt{1-\sqrt{x-1}}$

定义域满足$\begin{cases}1-\sqrt{x-1}\geqslant 0\\ x-1\geqslant 0\end{cases}$　即　$1\leqslant x\leqslant 2$

$g[f(x)]=\sqrt{\sqrt{1-x}-1}$

定义域满足$\begin{cases}\sqrt{1-x}-1\geqslant 0\\ 1-x\geqslant 0\end{cases}$　即$x\leqslant 0$

3 函数符号的运用

主要是复合函数问题，对于复合函数要搞清复合的成分或结构，有时需适当引入中间变量.

例 5 已知$f(x-1)=x^2+x+1$,求$f(\frac{1}{x-1})$.

解 本题为复合函数问题,关键在于求得$f(u)$,故引入中间变量,令$u=x-1$,则$x=u+1$,得

$$f(u)=(u+1)^2+(u+1)+1=u^2+3u+3$$

故$f(\frac{1}{x-1})=\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}+3$

例 6 设$f(x)=e^{x^2}$,$f(\varphi(x))=1-x$且$\varphi(x)\geqslant 0$,求$\varphi(x)$.

解 $f(\varphi(x))$是复合函数,这里要求中间变量$\varphi(x)$与x的函数表达式

$\because f(u)=e^{u^2}$

$\therefore f(\varphi(x))=e^{\varphi^2(x)}$

得$e^{\varphi^2(x)}=1-x\Rightarrow\varphi^2(x)=\ln(1-x)$

$\because \varphi(x)\geqslant 0 \quad \therefore \varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$

函数与变量记号无关

4 反函数的求法

由$y=f(x)$出发解出x的表达式,然后交换x与y的位置,即可求得反函数$y=f^{-1}(x)$.

例 7 求下列函数的反函数:

(1) $y=1+\log_4 x$; (2) $y=\frac{2^x}{2^x+1}$.

解 (1) $\log_4 x=y-1$,$x=4^{y-1}=\frac{1}{4}4^y$

故反函数为 $y=\frac{1}{4}4^x$

(2) $y2^x+y=2^x$,$2^x=\frac{y}{1-y}$,$x=\log_2\frac{y}{1-y}$

故反函数为 $y=\log_2\frac{x}{1-x}$

5 函数的几何特性问题

函数的有界性、单调性、奇偶性及周期性都有明确的几何意义,故又称为几何特性,根据它们各自的定义进行判别,而学习了后续内容后可有更好的判别法.

例 8 证明函数$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$在定义域$(-\infty,+\infty)$内有界.

证明 $|f(x)|=|\dfrac{x^2+1}{x^4+1}|\leqslant\dfrac{(x^2+1)^2}{x^4+1}=\dfrac{x^4+1+2x^2}{x^4+1}=1+\dfrac{2x^2}{x^4+1}\leqslant 1+1=2$

故$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有界.

例 9 设$f(x)$在$(0,+\infty)$上有定义,且$\dfrac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$内单调减小,证明:对任意两点$x_1>0,x_2>0$,有$f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$.

证明 不妨设　$x_1\leqslant x_2$,故有

$$\frac{f(x_2)}{x_2}\leqslant\frac{f(x_1)}{x_1}$$

因$\dfrac{f(x)}{x}$单调减小

$\therefore x_1f(x_2)\leqslant x_2f(x_1)$

又$\because x_2<x_1+x_2$,则

$$\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\leqslant\frac{f(x_2)}{x_2}$$

$\therefore x_2f(x_1+x_2)\leqslant x_1f(x_2)+x_2f(x_2)\leqslant x_2f(x_1)+x_2f(x_2)$

得$f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$

例 10 证明

(1) 两个偶函数的积是偶函数;

(2) 两个奇函数的积是偶函数;

(3) 偶函数与奇函数的积是奇函数.

证明

(1) 设$f(x),g(x)$为偶函数

则$f(-x)=f(x),g(-x)=g(x)$

令$\varphi(x)=f(x)g(x)$

则$\varphi(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)g(x)=\varphi(x)$

故$\varphi(x)$是偶函数.

(2) 设$f(x)$、$g(x)$为奇函数

则$f(-x)=-f(x)$，$g(-x)=-g(x)$
令$\varphi(x)=f(x)g(x)$
则$\varphi(-x)=f(-x)g(-x)=[-f(x)][-g(x)]$
$=f(x)g(x)=\varphi(x)$
故$\varphi(x)$是偶函数.

(3) 设$f(x)$为偶函数，而$g(x)$为奇函数
则$f(-x)=f(x)$，$g(-x)=-g(x)$
设$f(x)$为偶函数而$g(x)$为奇函数
令$\varphi(x)=f(x)g(x)$
则$\varphi(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)[-g(x)]=-\varphi(x)$
故$\varphi(x)$是奇函数.

例 11 设$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，且对$\forall x,y$都有$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$，且$f(x)\neq 0$，证明$f(x)$为偶函数.

证明 由$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$
用$-y$代y得
$f(x-y)+f(x+y)=2f(x)f(-y)$
得$2f(x)f(y)=2f(x)f(-y)$
又因$f(x)\neq 0$，故$f(-y)=f(y)$
$\therefore f(x)$为偶函数

例 12 若函数$f(x)$对其定义域内的一切x恒有$f(x)=f(2a-x)$，则称函数$f(x)$对称于$x=a$，证明：如果函数$f(x)$对称于$x=a$及$x=b\ (b>a)$，则$f(x)$必定是周期函数.

证明 若$f(x)=f(2a-x)$及$f(x)=f(2b-x)$
则$f[x+2(b-a)]=f[2b-(2a-x)]=f(2a-x)=f(x)$
所以$f(x)$为周期函数且$T=2(b-a)$为$f(x)$的周期.

第二节 极 限

1 • 主要内容归纳

表1-2.1 极限的概念

数列极限 (ε-N定义)	对于数列$\{x_n\}$，如存在固定常数A满足：对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，使当$n>N$时，恒有$\|x_n-A\|<\varepsilon$ 则称A是数列$\{x_n\}$的极限或称$\{x_n\}$收敛于A.记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$或$x_n\to A\ (n\to\infty)$