华中科技大学数学创新教材

一元分析学

◎刘　斌　编

科学出版社
www.sciencep.com

华中科技大学数学创新教材

一元分析学

刘 斌 编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是大学数学系列创新教材之一《一元分析学》，内容主要包括：实数集与函数、极限、连续性、一元微分学、一元积分学及常微分方程与常差分方程. 本书风格独特、特点鲜明、内容丰富、例题典型. 主要是基于研究型大学创新人才培养理工科各专业实验班或提高班，加强厚实的数学基础，加强数学思想方法和应用数学能力，强化逻辑思维能力的培养而编写.

本书可作为研究型大学理工科学生一年级第一学期的数学课程教材或教学参考书，也可作为参加研究生入学考试《高等数学》的复习资料.

图书在版编目(CIP)数据

一元分析学/刘斌编. —北京：科学出版社，2010.7

华中科技大学数学创新教材

ISBN 978-7-03-028258-3

Ⅰ. ①一… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①数学分析－高等学校－教材 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第130984号

责任编辑：房 阳 杨瑰玉/责任校对：张凤琴

责任印制：彭 超/封面设计：苏 波

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社编务公司排版制作

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010年8月第 一 版 开本：B5 (720 × 1000)

2010年8月第一次印刷 印张：14 1/2

印数：1—3 000 字数：273 000

定价：25.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《华中科技大学数学创新教材》

丛书编委会

丛　书　序

随着教学实践的深入进行，现行大学数学教育体系已呈现诸多弊病. 一方面，一些学生反映：数学太抽象，学习数学太枯燥，学完之后仅记得几个数学符号和概念，难以做到学以致用；另一方面，一些高年级本科生和研究生反映：本科阶段所学的数学远远不能满足其专业需求，学懂了的数学用不上，要用的数学没学过. 这一切都说明，现行的“教”与“学”、“学”与“用”严重脱节，现行的数学教学已远远不能满足现代教育及高速发展的科学技术的需要，改革与创新势在必行.

我国的大学数学教育长期以来沿用了前苏联的模式：从课程设置来说，着重于近代数学而较少融入现代数学；从教材内容来说，重理论及其推导而轻知识拓展及其应用. 众所周知，数学是自然科学与工程技术的基础，它已渗透到当代社会科学的众多领域，对于培养和开发学生潜能起着重要作用. 如何构建当代大学数学知识体系，使学生乐而学之、学以致用，是摆在我们每位大学数学教师面前的艰巨任务.

对于非数学专业的数学课程设置问题，我们对国内外高校及我校的开课现状进行了全面调研. 从国外高校情况来看，其课程设置各不相同，没有统一模式，而且他们的非数学专业与数学专业、本科生与研究生的大部分课程是相通的，即非数学专业的学生可修数学专业各层次课程. 对于我们来说，这点是没有可参照性的，因为我国高校的各专业、各层次课程基本上是各自为阵，教育管理部门也有相关规定予以制约. 但从其最基本的数学课程所涵盖的知识内容来看，则大致相同，主要涵盖：微积分、代数、几何、复分析、概率论、微分方程理论、统计学及数值计算等课程. 这些数学课程不但可以给学生以数学、统计、计算等方面知识，而且可以开发学生的逻辑思维能力、空间想象能力及知识应用能力. 因此，基于改革与创新的宗旨，我们拟将大学数学的主体知识内容分解为下列课程：《一元分析学》、《多元分析学》、《解析几何与线性代数》、《应用复分析》、《应用概率统计》、《应用偏微分方程》、《科学计算引论》.

鉴于目前非数学专业教材内容不足以满足专业的需求，且部分内容已经老化，因此我们拟在各科教材中适当更换和增加新的内容. 如以往的《计算方法》教材仅有多项式插值、线性方程组的古典迭代法、数值积分、标量非线性方程数值解及常微分方程初值问题数值解的内容，而当今各专业用于计算机仿真的数值算法

有广泛需求，其教材内容显然难以满足诸专业需要，本次改革拟增加线性方程组的 Krylov 子空间法、非线性方程组数值解、常微分方程边值问题数值解及偏微分方程数值解等重要内容. 此外，在教材整体架构方面，《一元分析学》、《多元分析学》、《解析几何与线性代数》、《应用复分析》将偏重于数学理论以训练和开发学生的逻辑思维能力、空间想象能力；而《应用概率统计》、《应用偏微分方程》、《科学计算引论》则力求理论与应用二者兼顾，以开发学生应用知识的能力. 由上可知我们的教学内容改革不仅仅是名称上的变化，也不只是知识的重新排列组合，而是一次由表及里的实质性改革.

本套大学数学系列创新教材是由十余位教学经验丰富、科研基础好的专班教师的编写的，他们对大学数学课程的改革问题进行了深入研究和探讨，制定出了科学的编写计划. 本套教材特别注重教学内容各部分知识的系统性和逻辑性，体现其由浅入深、由易到难、由简单到复杂，按照逻辑系统和认知理论相结合的思想组织整套书出版工作.力求突出学生的主体地位，以学生的发展为本，充分体现数学知识的趣味性、时代性、可实践性及有用性.

大学数学教材的改革与创新是一项长期而艰巨的任务，我们愿以本套教材的编写为起点和契机，继续深入开展教学内容的变革，以使我们的教书育人工作充分适应时代发展的要求.

由于编者水平所限，仓促付梓，书中必有疏漏之处，诚望读者指正.

编委会

2010 年 5 月 20 日

前　　言

随着我国经济的飞速发展，尽管大学从精英教育到大众化教育进行了转型，但研究型大学创新人才培养模式一直是大家关注的问题，为此许多这类高校试办了各种类型的专业实验班或提高班，华中科技大学自 2008 年起，成立了创新人才培养示范区——启明学院，相继成立了机械类实学创新实验班、信息类数理提高班、电气类实学创新实验班、材料类创新实验班、基础学科物理学实验班、基础学科生物学实验班、计算机科学创新实验班等加强数理基础的各种专业实验班，加大了创新人才培养课程改革的力度与深度.

微积分学是理工科学生学习的最重要的一门基础课程，它不仅是学生进校后面临的第一门数学课程，而且许多后续数学课程是它在本质上的延伸和深化. 为配合这种创新人才培养模式的课程改革，真正体现特色、符合改革精神，我们结合自身的教学经验，对微积分学这门课程教材进行了改革与创新，形成了本教材的编写指导思想：

（1）将有限的时间与精力花在最基本的内容、最核心的概念和最关键的方法上，对微积分学基本理论体系与阐述方式进行了处理. 学习这门课可以为创新型人才培养进行知识储备和打下良好的基础，使学生将主要精力集中在最基本的内容、核心的概念和关键的方法上. 为使学生掌握本课程精髓，做到学深懂透，本书内容尽量精简，以确界原理为基础出发，形成体系与阐述.

（2）精选有一定难度的例题与习题，强调严格思维的训练与分析问题能力的提高. 改革的目的是学生理解与应用，精选富于启迪的例题并进行简洁和完美的证明，不仅有助于学生的理解，而且能使学生从中学到分析问题的方法；一定难度习题的选取，保证了学生训练的质量与挑战，做到了少而精.

（3）采取学术著作的写作风格，强调学习基本概念和结论后进行思考与补证. 在本书中，定义和定理后面有大量的“注”，这些“注”有相当多的是很好的结论或者命题，学生为了弄清楚，必须思考并证明或者查找其他教材，达到提高学生的数学素养.

囿于学识所限，本书疏漏和不妥之处在所难免，敬请广大读者批评指正.

目　　录

第 1 章　实数集与函数

函数是现代数学的基本概念之一，高等数学研究的基本对象是定义在实数集上的函数. 因此，本章将介绍实数集和函数的基本概念，重点介绍一元函数的一些特殊性质.

1.1　实　数　集

1.1.1　实数集及其性质

众所周知，实数是由有理数和无理数两部分组成. **有理数**可用分数形式 $\dfrac{p}{q}$(p,q 为整数，$q\neq 0$)，也可用有限十进小数或无限十进循环小数表示；而无限十进不循环小数称为**无理数**. 有理数和无理数统称**实数**.

通常我们将全体实数构成的集合称为**实数集**，用$\mathbf{R}$表示，即

$$\mathbf{R}=\{x: x\text{为实数}\}.$$

实数集具有下列主要性质：

(1) 实数集对四则运算是封闭的，即任意两个实数的和、差、积、商（除数不为零）仍是实数.

(2) 实数集是有序的，即任何两个实数a,b 必须满足如下三个关系之一：$a<b,a=b,a>b$.

(3) 实数的大小关系有传递性，即如果$a>b,b>c$,那么$a>c$.

(4) 实数有阿基米德(Archimedes)性，即对任意$a,b\in\mathbf{R}$, 若$b>a>0$, 则存在正整数n, 使得$na>b$.

(5) 实数集有稠密性，即任何两个不相等的实数之间仍有实数，且既有有理数，也有无理数.

(6) 实数集有完备性（或连续性），即任何一个实数都对应数轴上唯一的一个点；反之，数轴上的任何一个点都有唯一一个实数与之对应. 因此，今后我们将对实数与数轴上的点不加区别.

1.1.2　区间与邻域

设a,b是两实数，且$a<b$, 称数集

$$\{x\in\mathbf{R}: a<x<b\}$$

为**开区间**，记作(a,b).

称数集

$$\{x\in\mathbf{R}:a\leqslant x\leqslant b\}$$

为**闭区间**，记作$[a,b]$.

称数集

$$\{x\in\mathbf{R}:a\leqslant x<b\}$$

和

$$\{x\in\mathbf{R}:a<x\leqslant b\}$$

为**半开半闭区间**，分别记作$[a,b)$和$(a,b]$.

以上这几类区间称为**有限区间**.类似地，可以定义如下一些**无限区间**:

$$[a,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}:x\geqslant a\},\quad(-\infty,a]=\{x\in\mathbf{R}:x\leqslant a\},$$

$$(a,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}:x>a\},\quad(-\infty,a)=\{x\in\mathbf{R}:x<a\},$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}:-\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R}.$$

有限区间和无限区间统称**区间**.

设$x_0\in\mathbf{R}$, $\delta>0$,称数集

$$\{x\in\mathbf{R}:|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta)$$

为点 x_0**的δ邻域**，记作$U(x_0,\delta)$，有时简单记作$U(x_0)$.称数集

$$\{x\in\mathbf{R}:0<|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$$

为点 x_0**的δ空心邻域**，记作$U^0(x_0,\delta)$，有时简单记作$U^0(x_0)$.

同时，我们还经常用到以下几种邻域:

x_0**的δ右邻域**: $U_+(x_0,\delta)=[x_0,x_0+\delta)$;

x_0**的δ左邻域**: $U_-(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0]$;

x_0**的δ右空心邻域**: $U_+^0(x_0,\delta)=(x_0,x_0+\delta)$;

x_0**的δ左空心邻域**: $U_-^0(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)$;

∞**邻域**: $U(\infty)=\{x\in\mathbf{R}:|x|>M$,其中$M$为充分大的正数$\}$;

$+\infty$**邻域**: $U(+\infty)=\{x\in\mathbf{R}:x>M$,其中$M$为充分大的正数$\}$;

$-\infty$**邻域**: $U(-\infty)=\{x\in\mathbf{R}:x<-M$,其中$M$为充分大的正数$\}$.

1.1.3 确界原理

定义1.1.1 设E为一非空实数集，若存在数$M(L)$, 使得对任意$x \in E$, 都有$x \leqslant M(x \geqslant L)$, 则称$E$为**有上界（下界）的数集**，数$M(L)$称为$E$的一个**上界（下界）**. 如果数集$E$既有上界又有下界，则称$E$为**有界集**.如果数集$E$不是有界集，则称$E$为**无界集**.

注1.1.1 由定义1.1.1容易证明下面一些结论：

(1) 实数集E有界的充分必要条件是：存在数$M > 0$, 使得对任意$x \in E$, 都有$|x| \leqslant M$;

(2) 实数集E如果有上（下）界，那么它有无穷多个上（下）界；

(3) 任何有限区间都是有界集，无限区间都是无界集；由有限个数组成的实数集是有界集.

注1.1.2 由注1.1.1知，如果一个实数集有上（下）界，那么它有无穷多个上（下）界，这样我们自然要问：这无穷多个上（下）界中是否存在一个最小上界（最大下界）? 如果存在是否唯一?

定义1.1.2 设E是$\mathbf{R}$中的一个数集，若数η 满足下列条件：

(1) η 是E 的上界：$\forall x \in E$, 有$x \leqslant \eta$;

(2) 任何小于η的数不是E 的上界：$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in E$, 使得$x_0 > \eta - \varepsilon$,

则称数η为数集E的**上确界**，记作

$$\eta = \sup E \quad 或 \quad \eta = \sup_{x \in E}\{x\}.$$

定义1.1.3 设E是$\mathbf{R}$中的一个数集，若数ξ 满足下列条件：

(1) ξ 是E 的下界：$\forall x \in E$, 有$x \geqslant \xi$;

(2) 任何大于ξ的数不是E 的下界：$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in E$, 使得$x_0 < \xi + \varepsilon$,

则称数ξ为数集E的**下确界**，记作

$$\xi = \inf E \quad 或 \quad \xi = \inf_{x \in E}\{x\}.$$

注1.1.3 数集E的上（下）确界可能属于E, 也可能不属于E; 数集E的上（下）确界属于E充分必要条件是：它是E的最大值（最小值）；若数集E存在上（下）确界，则上（下）确界是唯一的.

关于数集确界的存在性，我们不加证明地叙述如下，它的严格证明可参考有关的参考书，它是本书极限理论的基础.

定理1.1.1(确界原理) 非空有上（下）界的数集必存在上（下）确界.

例1.1.1 证明：所有负数构成的数集E的上确界是0, 即$\sup E = 0$.

证 (1) 由于对$\forall x \in E$, 有$x < 0$, 于是0 是E 的上界.

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in E$, 使得$0 - \varepsilon < x_0$, 这样任何小于0的数不是$E$ 的上界. 因此，$\sup E = 0$.

例1.1.2 设E_1, E_2 为非空数集，若对一切$x \in E_1$和$y \in E_2$, 都有$x \leqslant y$. 证明：$\sup E_1 \leqslant \inf E_2$.

证 依假设，E_2中任一数y都是E_1的上界，E_1中任一数x都是E_2的下界，而E_1, E_2 非空，所以由确界原理(定理1.1.1)知，$\sup E_1, \inf E_2$存在.

现证$\sup E_1 \leqslant \inf E_2$. 如果$\sup E_1 > \inf E_2$, 则令

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\sup E_1 - \inf E_2) > 0,$$

于是由上确界和下确界的定义知，$\exists\ x_0 \in E_1, y_0 \in E_2$ ，使得

$$x_0 > \sup E_1 - \varepsilon = \frac{1}{2}(\sup E_1 + \inf E_2)$$

和

$$y_0 < \inf E_2 + \varepsilon = \frac{1}{2}(\sup E_1 + \inf E_2),$$

所以$x_0 > y_0$, 这与已知假设矛盾. 故$\sup E_1 \leqslant \inf E_2$.

习　　题

1. 用区间表示下列不等式的解：

(1) $1 < |x-1| < 2$;

(2) $\sin x \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

(3) $\left|\dfrac{x}{1+x}\right| > \dfrac{x}{1+x}$;

(4) $(x-a)(x-b)(x-c) > 0$ (a, b, c为常数，且 $a < b < c$).

2. 求下列数集的上、下确界，并根据定义加以证明：

(1) $E = \{x:\ x\text{为}(0,1)\text{内的无理数}\}$;

(2) $E = \left\{x : x = 1 - \dfrac{1}{2^n}, n = 1, 2, \cdots\right\}$;

(3) $E = \left\{x : x = \dfrac{n}{n+1}, n = 1, 2, \cdots\right\}$.

3. 设E为非空有下界的数集. 证明：$\inf E = \xi \in E \Leftrightarrow \min E = \xi$.

4. 设E_1, E_2为非空有界数集，定义数集$E_1 + E_2 = \{z : z = x + y, x \in E_1, y \in E_2\}$. 证明：

(1) $\sup(E_1 + E_2) = \sup E_1 + \sup E_2$;　(2) $\inf(E_1 + E_2) = \inf E_1 + \inf E_2$.

1.2 函　　数

1.2.1 函数的概念

定义1.2.1 设E_1, E_2是两个给定的实数集，若有对应法则f,使得对E_1内每个

数x，都有唯一的一个数$y \in E_2$与它对应，则称f是定义在数集E_1上的**函数**，记作

$$f: E_1 \to E_2, \quad \text{或} \quad f = f(x).$$

其中x称为**自变量**，y称为**因变量**，数集E_1称为函数f的**定义域**，y称为f在点x的**函数值**. 全体函数值的集合

$$f(E_1) = \{y : y = f(x),\ x \in E_1\}(\subset E_2)$$

称为函数f的**值域**.

注1.2.1　定义1.2.1中的实数集E_2常用$\mathbf{R}$代替；在函数概念中，对应关系f是抽象的，只有在具体的函数中，对应关系f才是具体的.

注1.2.2　根据函数的定义，给定一个函数一定要指出它的定义域. 但有时为了方便并不指出函数$y = f(x)$的定义域，这时认为函数的定义域是自明的，即定义域是使函数$y = f(x)$有意义的实数x的集合$E_1 = \{x : f(x) \in \mathbf{R}\}$. 例如，给定函数 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, 没有指出它的定义域，但我们知道它的定义域是$[-1, 1] = \{x : \sqrt{1-x^2} \in \mathbf{R}\}$.

注1.2.3　从函数的定义可以看出：两个函数相同是指它们有相同的定义域和对应法则. 例如，函数 $f(x) = 1, x \in \mathbf{R}$和 $g(x) = 1, x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$是两个不同的函数；而函数 $f(x) = 1, x \in \mathbf{R}$和函数 $h(x) = \sin^2 x + \cos^2 x, x \in \mathbf{R}$是两个相同的函数.

注1.2.4　函数f给出了x轴上的点集E_1到y轴上点集E_2之间的**单值对应**，也称为**映射**. 对于$a \in E_1$, $f(a)$称为映射f下a的**象**，点a称为$f(a)$的**原象**. 在函数定义中，对每一个$x \in E_1$, 有且仅有一个y值与它对应，这样定义的函数称为**单值函数**. 如果同一个x值可以对应多于一个y的值，那么称此函数为**多值函数**. 本书中只讨论单值函数.

注1.2.5　函数$y = f(x)$ 在实数集D上的图像是平面点集

$$\{(x, y) : x \in D, y = f(x)\}.$$

坐标平面上一个点集G是某个函数的图像的充分必要条件是：平行于y轴的任一条直线与点集G至多有一个交点.

注1.2.6(函数的其他表示方法)　(1) **函数的分段表示**: 设E_1, E_2是数集且$E_1 \cap E_2 = \varnothing$, $f_1(x), f_2(x)$是分别定义在E_1与E_2的函数，则

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in E_1, \\ f_2(x), & x \in E_2 \end{cases}$$

是定义在数集$E = E_1 \cup E_2$上的函数. 这种表示方法称为**函数的分段表示**.

(2) **函数的隐式表示**: 是指通过方程$F(x, y) = 0$来确定变量y与x之间函数关系.

(3) **函数的参数表示**: 是指通过建立参数t与x、参数t与y之间的函数关系，间接地确定x与y之间的函数关系，即

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in E.$$

注1.2.7(某些常用的特殊函数) **符号函数**(图1.2.1)

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

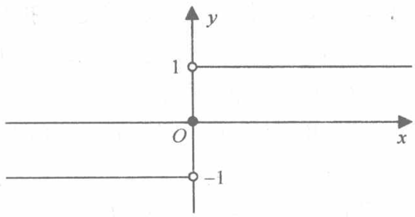

图 1.2.1

取整函数(图1.2.2)

$$y = [x] = \{y:\ y\text{是不超过}x\text{的最大整数}\}.$$

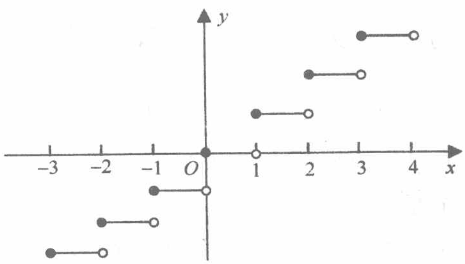

图 1.2.2

狄利克雷(Dirichlet)函数(图1.2.3)

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x\text{为有理数}, \\ 0, & x\text{为无理数}. \end{cases}$$

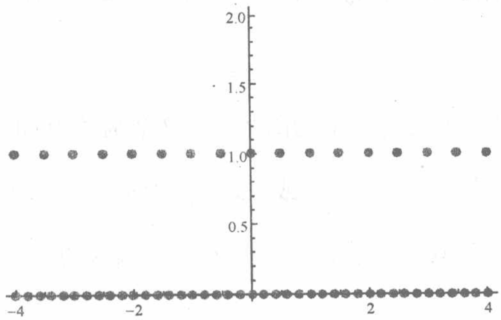

图 1.2.3

定义在[0,1]上的**黎曼(Riemann)函数**

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\ (p,q\text{正整数},\dfrac{p}{q}\ \text{为既约真分数}),\\ 0, & x=0,1\ \text{和}\ (0,1)\ \text{内的无理数}.\end{cases}$$

注1.2.8(函数的四则运算)　如果函数$f(x),g(x)$分别定义在数集E_1,E_2上，并且$E_1\cap E_2\neq\varnothing$, 则函数$f(x)$与$g(x)$的和、差、积、商分别定义为

$$F(x)=f(x)+g(x),\quad x\in E_1\cap E_2,$$

$$G(x)=f(x)-g(x),\quad x\in E_1\cap E_2,$$

$$H(x)=f(x)\cdot g(x),\quad x\in E_1\cap E_2,$$

$$G(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\quad x\in(E_1\cap E_2)\setminus\{x\in E_2: g(x)=0\}.$$

注1.2.9(复合函数)　设函数

$$y=f(u),\quad u\in G,\qquad u=g(x),\quad x\in E.$$

若$D=\{x\in E: g(x)\in G\}\neq\varnothing$, 称函数

$$f(g(x)),\quad x\in D$$

为函数f与g的复合函数，记作

$$y=f(g(x)),\quad x\in D\quad\text{或}\quad y=(f\circ g)(x),\quad x\in D.$$