代数同步助教

初中第二册

河南教育出版社

代数同步助教

初中第二册

河南省教育厅教研室

河南教育出版社

代数同步助教

初中第二册

河南省教育厅教研室

责任编辑　侯耀宗

河南教育出版社出版

河南省东风印刷厂印刷

河南省新华书店发行

787×1092毫米　开本5.875印张121千字

1985年11月第1版　1987年12月第3次印刷

印数13,761—73,7[illegible]0册

统一书号 7256·168　定价0.82元

出版说明

为了更好地配合中学各科教学，满足广大中学教师备课的实际需要，提高教学质量，我们组织出版了一套初级中学各科同步助教。计有《语文同步助教》（六册）、《数学同步助教》（六册）、《物理同步助教》（二册）、《化学同步助教》（一册）、《英语同步助教》（六册）等，共二十一册。这套同步助教根据教学大纲的要求，按照现行通用教材的顺序逐章编写，既吸收了以前出版的各种教学参考书的长处，又具有自己的特色。它可以帮助教师吃透教材、掌握重点、解决疑难、扩充知识、查找资料、探讨教法、设计练习等，它是与课堂教学实际保持同步的一种新型的综合性教学参考书。本书的作用还有待于在教学实践中验证，我们期望得到专家和广大教师的指教，以便进一步完善、提高。

一九八五年四月

前　言

为了帮助初中数学教师提高业务水平和教学能力，过好教材关，我们编写了初中《代数同步助教》（共四册）、《几何同步助教》（共二册），与现行的初级中学课本《代数》、《几何》配合使用。

各册按课本顺序分章，每章包括：

1．教材教法讨论。着重以章为单位对教材作一简要分析，指出本章知识结构及其与前后的联系，本章在中学（主要是初中）数学教材以及在培养学生能力中的地位和作用，教学的目的要求，本章的重点、难点，并对本章教学有重点地提出比较系统的教学建议。

2．问题研究。着重根据本章提到的有关概念和问题加以阐述，从一定的高度和广度上对教材内容进行比较深入的分析研究，目的是使教师对所教内容有完整、准确的认识，以便居高临下驾驭教材，充分发挥教师在教学中的主导作用。这些方面的内容不要照搬到课本上向学生讲授。

3．典型例题分析。着重分析解题思路，以培养学生分析问题和解决问题的能力。

4．复习参考题（附答案与提示）。

在每册书后附有附录，着重介绍与本册内容有关的数学发展小史和数学家。

本书可供初中数学教师或教授相当于初中数学内容的教师参考。

本书由我室数学组组织编写。参加编写的有赵宝鼎（代数第一册）、魏和清、张好理（代数第二册）、张玉莲（代数第三册）、秦金台（代数第四册）、周其恩（几何第一册）、陈守义（几何第二册）。统稿人：周其恩。

本书在编写过程中，吸取了部分中学数学教学研究人员和中学数学教师的意见，我们对他们表示感谢。

由于时间仓促，加之我们水平有限，书中难免有不妥之处，欢迎广大教师和读者提出批评意见，以便改进。

河南省教育厅中小学教材教学研究室

1985年6月

目　录

第五章 二元一次方程组

一 教材教法讨论

本章在整式的加减和一元一次方程的基础上，进一步研究二元和三元一次方程组。

二元和三元一次方程组，是保持一元一次方程中的“次”不变，未知数的个数变为两个或三个，从而使方程的个数也增加而形成的方程组问题。

二元一次方程组又是以后学习其他形式方程组的基础。

本章知识的结构与系统，可通过下表简单说明。

- 二(三)元一次方程组
  - 二(三)元一次方程组及其有关的概念
    - 二(三)元一次方程及其有关概念
      - 以实际问题为背景
      - ↓
      - 抽象出有关概念
    - ↓
    - 二(三)元一次方程组及其有关概念
      - 以实际问题为背景
      - ↓
      - 抽象出有关概念
  - ↓
  - 二(三)元一次方程组的解法
    - 代入消元法
    - 加减消元法
  - ↓
  - 二(三)元一次方程组的应用

本章的重点是二元一次方程组的概念和解二元一次方程组的两种消元法；难点是一次方程组的应用。学好本章教材的基础知识是：在导出加减消元法和代入消元法的过程中用到的等式性质和由此而得的方程同解原理以及等量代换公理等。

为了搞好本章的教学，请注意下面几点：

1. 关于二元一次方程组概念的教学

(1)要注意产生此概念的实践背景

数学中的每个概念，都是实际问题中的某个数量关系（或空间形式）的概括与抽象，都有其各自的实践背景。我们把数学的这个特性，称为“普遍的实践性”。

二元一次方程和二元一次方程组的概念也不例外。因此，我们首先应从这个角度让学生掌握二元一次方程和二元一次方程组的有关实例。

例如，教材在介绍二元一次方程组概念之前，先给出一个实际问题，在学生运用已有方程知识感到解题有困难时，立刻指出：“这个问题，用设一个未知数列一元一次方程的方法来求解，比较困难。”依此，说明有必要建立新的数学模型，而且此模型应该有利于克服这个困难。这样，就引出了二元一次方程组及其有关的概念。

此例说明：在进行这段教学时，应注意到“实例要恰当地多”。这里的“恰当”指依靠这些实例，能够很好地概括和抽象出纯数学中所要研究的对象。如果例子选的不恰当，学生对所学的纯数学概念必将产生无源之水、无本之木的感觉。

(2)要注意从实际问题到纯数学概念的抽象

数学的第二个特点是“高度的抽象性”。即根据对所举实例的观察和比较，扬弃各实例中不同的质，抽出存在于各实例中共同的数量关系（或空间形式），并以定义的形式、用描述的或逻辑的语言去刻画它，且用一定的符号去表示它。这时，存在于实际问题中的数量关系（或空间形式）就变为纯数学概念。我们称它为该类实际问题在纯数学中所对应的“数学模型”。

从此，数学将暂时与实际相脱离，所抽出的概念，成为研究问题的新的出发点，成为推理的依据和推理过程中的“思维细胞”。正是根据它所处的这个特殊的逻辑地位，习惯上称它为“第一类基础知识”。

在进行此阶段的教学时，要注意“抽象过程要适当地慢”，并在以下几个问题上下功夫：

①务必使学生清楚：在抽象的过程中，扬弃的各具体问题的质是什么；保留的共同的数量关系（或空间形式）是什么。这一点在本章是容易做到的。

②对所抽出的共同的数量关系（或空间形式）是用怎样的语言刻画的，和用怎样的符号表达的。

对此，本章采用了类比的方法进行处理。

因为实践包括生活与生产方面的实践，又包括科学实验方面的实践。因此，本章又以一元一次方程的数学实践为基础，用类比的方法，借助一元一次方程的有关概念：“方程”、“一元一次方程”、“一元一次方程的解”等，对应地建立起“二元一次方程”、“二元一次方程的一个解”等概念；又通过函数与集合观点的渗透，得出“任何一个二元一次方程都有无数个解”的结论以及“二元一次方程的解集”的概念；进而又自然地以此为基础，给出了“方程组”、“二元一次方程组”、和“方程组的解”等概念。这里要特别注意符号“{”的使用和含义。

例如

$x+y=7$；

$$\begin{cases}3x-y=11,\\2x+3y=16;\end{cases}$$

和

$$\begin{cases} x=3, \\ y=2 \end{cases}$$

等。

这样，就可使学生明了纯数学中有关概念的产生过程，同时又可加深对所学概念的理解。需注意的是：所谓对一个概念"理解"了，实质就是清楚地了解了得来这个概念的过程；而理解了的事物是到处都可以感受到的，是不用强行记忆就可以记得住的，即记忆又是建立在理解基础上的。所以在讲清概念的产生过程的同时，又解决了对概念的理解和记忆问题。

（3）对已形成的概念，要进一步"强化"

强化概念可以通过抓"关键性词语"（即反映概念的本质属性的词语）去实现。依此，进一步掌握概念的含义（一般称为概念的内涵）和范围（一般称为概念的外延）。

强化概念也可以通过分析定义中邻近的种概念和类特征（参见问题研究）去实现。

例如，"方程组"这个概念的最邻近的种概念是"方程"，而类特征是由"组"字表达的"由几个方程组成"，表达此概念的符号是"{"。"二元一次方程组"这个概念的最邻近的种概念是"方程组"，其类特征则是"由几个一次方程、并含有两个未知数"。如此等等，不一而举。

这样，不仅可以使概念得以强化，而且使其更加清晰。

（4）结合书后习题，在应用中进一步掌握概念

这里应注意到：作为定义，应是正反两面都成立的命题。因此，一个定义，既可作一个性质定理使用，又可作一个判定定理使用。这样，就可在使用中进一步强化和掌握概念。

总之，对一个概念，要了解它的来龙去脉，设法从不同角度去强化和加深理解。这也是突出这一重点内容的主要方法。

2. 关于二元一次方程组的解法的教学

这是本章教学的第三阶段，即“严谨的逻辑性”教学阶段，要注意“推理尽可能地严”。

既然是逻辑推理，必然涉及到推理的依据、推理的方法和推理的思想脉络等。这些知识，根据它们所处的逻辑地位，习惯上都被称为第一类基础知识。而依靠第一类基础知识所推得的定理、法则、公式等，由于它们经常被应用，所以也要求将它们的结论作为基础知识记住，习惯上称它们为第二类基础知识。二元一次方程组的解法，属第二类基础知识。这里推理的思想脉络指的是在求二元一次方程的解时，函数与集合等现代数学思想的渗透。以及在探求二元一次方程组的解法时，如何化未知为已知等数学思想的灌输。

化未知为已知是人们解决问题时常用的方法之一。就解二元一次方程组而言，“已知”指的是“一元一次方程的解法”，“未知”是“二元一次方程组的解法”。根据二元一次方程组及其有关概念形成的过程，容易想到：如果能将二元一次方程组的求解问题，转化为解一元一次方程的问题，问题就迎刃而解了，关键在于能否设法先消去一个“元”的问题。

寻求转化的方法，是一系列的判断推理过程。推理的根据是二元一次方程组及其解等有关概念；对于推理的方法，这里考虑到初中学生正处于从具体形象思维向抽象思维过渡的思维特点，采用了结合一个具体方程组的求解过程渗透演绎推理的方法，最后归纳出一般的代入消元法和加减消元法，

从而解决了二元一次方程组的一般解法问题。

具体地，例如根据二元一次方程组的概念知道：方程中的两个未知数同时满足两个等量关系，且相同的未知数代表同一个值；又因为方程就是含未知数的等式，由等式的性质，等量是可以代换的。这样，我们就找到了以下的转化方法：应用方程的同解原理，将一个方程中的某个未知数（例如y）用另一个未知数（如x）的代数式表示，代入另一个方程中，就可以代替另一方程中的相同未知数(即y)。这样，后者就转化为只含一个未知数(即x)的一元一次方程了（达到了消元的目的）。如果这个方程组有解，就可通过所得的一元一次方程求出一个未知数（即x）的值，再代入开始所解得的表达式中（实际上相当于又解一个一元一次方程），就可求出另一个未知数（即y）的值了。这样，就把一个二元一次方程组的求解问题，转化为解两个一元一次方程的问题，而且根据方程的同解原理知，所求得的一组x、y的值，正是该二元一次方程组的解。根据此解法的产生过程，我们把它叫做“代入消元法”最合适。

又如加减消元法。在推导过程中，所用的数学思想和理论根据皆与代入消元法相同，只是不用等量代换，而是根据方程的两个同解原理，通过在一个方程的两边同时加上或减去一个等量而达到消元的目的，因此把它叫做“加减消元法”。

这样的推导过程是必不可少的，它不仅能使学生了解解法的来历，会用所得解法解题，而且更重要的是，它能使学生逐步体会到“数学思想”，收到从“学会”变为“会学”的良效。在此过程中，要特别注意培养学生的逻辑思维能力。

在掌握了一般解法之后，还要特别注意例题的分析，以

培养学生的观察能力和迅速准确的运算能力等。

例1 在方程 $2y-3x=5$ 中，设 $y=-1$，0，$\frac{1}{3}$，1，3，6，求对应的x的值，并把各对对应值列成一个表。

分析：此题要求在所给的二元一次方程的无穷多组解里求出指定的六对来。这只要将x化成用y的代数式表示的式子，问题实质上就转化为求一个代数式的值的问题了。

解：把已知方程移项，使含有x的项在左边，不含x的项在右边，得

$$-3x=5-2y.$$

两边都除以-3，得

$$x=-\frac{5-2y}{3}.$$

把所设的y的值依次代入上式右边，计算出对应的x的值，可以列成下面的表。

y	-1	0	$\frac{1}{3}$	1	3	6
x	$-2\frac{1}{3}$	$-1\frac{1}{3}$	$-1\frac{4}{9}$	-1	$\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{3}$

表里的每一组值都是二元一次方程$2y-3x=5$的一组解。

例2 解下列方程组：

（1）$\begin{cases} y+3x=5, & ① \\ 3y-6x=6; & ② \end{cases}$　（2）$\begin{cases} 3x+4y=2, & ① \\ y=2x-5; & ② \end{cases}$

（3）$\begin{cases} 5y+2x=15, & ① \\ 8y+3x+1=0; & ② \end{cases}$

（4）$\begin{cases} 5y+2x=12, & ① \\ 3y+2x=6; & ② \end{cases}$

（5）$\begin{cases}\dfrac{y}{4}+\dfrac{x}{3}=\dfrac{4}{3}, & ① \\ 5(y-9)=6(x-2); & ②\end{cases}$

（6）$\begin{cases}\dfrac{y}{3}+\dfrac{x}{4}=2.25, & ① \\ \dfrac{y}{2}-\dfrac{x}{12}=1.45. & ②\end{cases}$

分析：第一，解方程组时要使学生在思想上先有一个“标准”类型。

方程组（2）可以视为用代入法解二元一次方程组的标准类型，其特点是其中一个未知数已表示为另一个未知数的代数式。因为只要用代入消元法解二元一次方程组，首先必须把其中的一个方程转化为方程组（2）中的②的形式（当然也可以是y的代数式表示x）。

方程组（4）可以视为用加减消元法解二元一次方程组的标准类型。其特点是两个方程中的一个（或两个）未知数的系数的绝对值相等。因为只要用加减消元法解二元一次方程组，首先必须把方程组中的两个方程转化为所述的形式，若同一未知数的系数互为相反数则用加法消元；若同一未知数的系数相等则用减法消元。

第二，以基本类型为依据，观察所要解的二元一次方程组的特点，以选择消元的方法。

例如方程组（1）的①中的y的系数是1，把y化成用x的代数式表示的式子比较简单，可考虑用代入法解；但也可以考虑把方程①作同解变形使①、②两个方程中x（或y）的系数的绝对值相等，然后用加减法解。对方程组（3），无论用哪一个未知数的代数式去表示另一个未知数，都会遇到分数

系数的情况，从而给下一步解一元一次方程造成困难，所以一般应用加减法。对方程组（5）和（6），则需要在去掉方程中的括号和分母之后再根据具体情况而定。

第三，要使学生有化非基本类型为基本类型的能力，并在此转化过程中培养学生迅速准确的运算能力。

例如，欲用代入法解方程组（1）和（3），根据方程的同解原理，由方程组（1）中的①得

$$y=5-3x.$$

代入②即可解。

由方程组（3）中的①，得

$$2x=15-5y.$$

两边除以2，得

$$x=\frac{15-5y}{2},$$

代入②即可解。

这里需要注意两点：其一，用代入法解方程时，从一个方程得出把一个未知数用另一个未知数的代数式表示的式子，必须代入另一个方程中去，否则，将得到$0=0$的恒等式；其二，在把方程中的一个未知数用只含另一个未知数的代数式表示时，为了计算简便，一般选用未知数的系数较简单的一个。故在方程组（1）中选用方程①，把y化成x的代数式；在方程组（3）中选用方程①，把x化成y的代数式。

假如欲用加减法解方程组（1）和（3），则根据方程的同解原理，在方程组（1）中，

将①×2，得

$$2y+6x=10, \qquad ③$$