21世纪高职高专规划教材

GAODENG SHUXUE JICHU

高等数学基础

主编 李艳丽 主审 张瑜

苏州大学出版社

21世纪高职高专规划教材

高等数学基础

主　编　李艳丽
主　审　张　瑜

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学基础/李艳丽主编．—苏州：苏州大学出版社，2010.8
21世纪高职高专规划教材
ISBN 978-7-81137-552-7

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①李…　Ⅲ.①高等数学—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ.①O13
中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第173205号

高等数学基础
李艳丽　主编
责任编辑　李　娟

苏州大学出版社出版发行
(地址：苏州市十梓街1号　邮编：215006)
宜兴市盛世文化印刷有限公司印装
(地址：宜兴市万石镇南漕河滨路58号　邮编：214217)

开本787×1092　1/16　印张17　字数419千
2010年8月第1版　2010年8月第1次印刷
ISBN 978-7-81137-552-7　定价：29.5元

苏州大学版图书若有印装错误，本社负责调换
苏州大学出版社营销部　电话：0512-65225020
苏州大学出版社网址 http://www.sudapress.com

前言

本教材是我们在总结多年的高职高专高等数学的教学经验,探索高职高专高等数学教学的发展动向,分析国内外同类教材发展趋势的基础上,按照教育部制定的《高职高专高等数学课程教学基本要求》编写的,充分体现了“以应用为目的,以必需、够用为度”的原则.

本教材具有以下特点:

1. 在内容的选择上,根据职业教育“以就业为导向”的培养目标和教学的实际需要,知识的介绍从宽从简,注重讲清概念,注意与高中数学课程的衔接,适当降低理论要求,重视应用.在内容的编排上,注意由浅入深,由易到难,循序渐进,符合学生的认知规律和接受能力.

2. 概念的引入尽可能从实际背景入手,讲解基本概念、基本原理时,尽可能用简洁明了的语言叙述,便于学生接受.

3. 根据高职高专各专业对高等数学的基本要求,贯彻“理解概念、强化应用”的教学原理,强化基础知识、基本思想,注重与实际应用联系较多的基础知识、基本方法和基本技能的训练,不追求过分复杂的计算和变换.

4. 鉴于计算机的广泛应用与高性能数学软件的日益完善,为了提高学生使用计算机解决数学问题的意识和能力,我们在第十一章集中介绍了 MATLAB 软件的功能及其各方面的应用.这样既减少了学生在计算中的困难,也可以培养学生学习数学的兴趣,使学生具有进行较复杂的工程技术计算的能力.

本教材由李艳丽主编,张瑜主审,参加编写的有郑雪芳(第一章)、姚芳(第二、第八章)、何静瑜(第三章)、杜娟(第四、第十章)、安震(第五、第九章)、顾琳(第六章)、杨丽芳(第七章)、李艳丽(第十一章).

书中加“*”部分为选学内容.

本教材可作为高职院校、成人及本科院校的二级职业技术学院和民办高校学生的高等数学教材,也可作为工程技术人员的参考资料.

在本书的编写过程中,江苏信息职业技术学院的领导及储庆、蒋海涛老师提出了许多宝贵意见和建议,我们在此表示诚挚的谢意.我们还参考了相关的书籍和资料,在此一并表示感谢.

本教材的编写,我们力求完善,但错误和不足之处在所难免,恳请广大读者批评指正.

编者

目录

第一章　预备知识

本章主要介绍极坐标方程、复数、反三角函数以及初等函数的有关内容，这些都是数学应用中最基础的知识.

§1-1　极坐标

一、极坐标的概念

1. 极坐标系

如图 1-1 所示，在平面内取一定点 O，从点 O 引一条射线 Ox，再选定一个单位长度和角度的正方向(通常取逆时针方向)，这样就构成了一个**极坐标系**. O 点叫做**极点**，射线 Ox 叫做**极轴**.

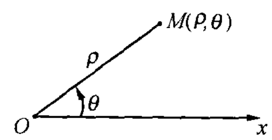

图 1-1

设 M 为平面内任意一点，连结 OM，令 $OM=\rho$，θ 表示从 Ox 到 OM 的角度. ρ 叫做点 M 的**极径**，θ 叫做点 M 的**极角**，实数对 (ρ,θ) 叫做点 M 的**极坐标**，记作 $M(\rho,\theta)$.

2. 已知一点的极坐标确定这一点的位置

已知点 $M(\rho,\theta)$，在极坐标系中作出点 M 的方法：

(1) 作出极角 θ 的终边. 当 $\theta>0$ 时，极轴按逆时针方向旋转；当 $\theta<0$ 时，极轴按顺时针方向旋转.

(2) 由极径 ρ 确定 M 的位置. 有时为了研究问题方便，我们也允许 ρ 取负值. 当 $\rho>0$ 时，M 点在极角 θ 的终边上，且 $|OM|=\rho$；当 $\rho<0$ 时，M 点在极角 θ 的终边的反向延长线上，且 $|OM|=\rho$.

(3) 规定：当 $\rho=0$ 时，不管 θ 取什么值，点 M 都表示极点.

例 1　在极坐标系中，作出点 $A\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$，$B\left(3,\frac{2\pi}{3}\right)$，$C\left(4,-\frac{\pi}{4}\right)$，$D\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$.

解　如图 1-2 所示，过极点 O 作射线 OA，使 $\angle xOA=\frac{\pi}{4}$，在射线 OA 上取点 A，使 $OA=2$，则点 A 即为极坐标为 $\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$ 的点. 类似地，可作点 B,C,D.

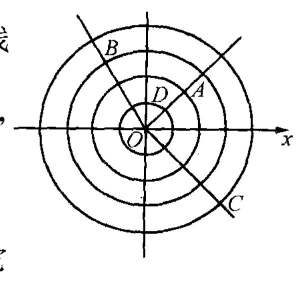

图 1-2

3. 极坐标 (ρ,θ) 与点 M 的关系

(1) 已知极坐标 (ρ,θ)，可以在平面上唯一地确定一点 M 与它对应.

(2) 已知平面上一点 M，其极坐标不唯一. 一般地，如果(ρ,θ)是 M 点的一个极坐标，那么$(\rho,\theta+2k\pi)$和$(-\rho,\theta+(2k+1)\pi)$都是点 M 的极坐标$(k\in\mathbf{Z})$. 因此，在给定的极坐标系中，点与它的极坐标不是一一对应的. 这是与直角坐标系不同的.

(3) 如果规定：$\rho>0$，$0\leqslant\theta<2\pi$，则极坐标(ρ,θ)与平面上的点 M 就建立了一一对应关系. 所以，我们在确定一点的极坐标时，往往限定 $\rho>0$，$0\leqslant\theta<2\pi$.

4. 极坐标与直角坐标的互化

若极坐标系中的极点、极轴分别与直角坐标系中的原点、x 轴的正半轴重合，并在两种坐标系中取相同的长度单位，则平面上任一点 M 的极坐标(ρ,θ)与直角坐标(x,y)之间有如下关系(图 1-3)：

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\end{cases}\qquad \begin{cases}x^2+y^2=\rho^2,\\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}(x\neq 0).\end{cases}$$

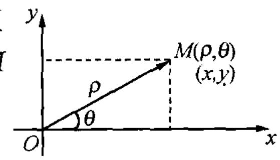

图 1-3

例 2 把点 P 的极坐标$\left(4,\dfrac{\pi}{3}\right)$化为直角坐标.

解 因为 $x=4\cos\dfrac{\pi}{3}=2$，$y=4\sin\dfrac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$，所以点 P 的直角坐标为$(2,2\sqrt{3})$.

例 3 把点 P 的直角坐标$(-\sqrt{3},-1)$化为极坐标.

解 由极坐标与直角坐标之间的关系可知

$$\rho=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2,\ \tan\theta=\frac{-1}{-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

因为点 $P(-\sqrt{3},-1)$在第三象限，所以 θ 是第三象限角.

取 $\theta=\dfrac{7\pi}{6}\in[0,2\pi)$，所以点 P 的极坐标为$\left(2,\dfrac{7\pi}{6}\right)$.

二、曲线的极坐标方程

在极坐标系中，一条曲线用含变量 ρ,θ 的方程 $F(\rho,\theta)=0$ 来表示，这种方程称为**曲线的极坐标方程**.

1. 极坐标方程与直角坐标方程的互化

例 4 将极坐标方程 $\rho\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=3$ 化为直角坐标方程.

解 因为 $\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\theta\cos\dfrac{\pi}{3}+\sin\theta\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\cos\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$，得

$$\frac{1}{2}\rho\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\sin\theta=3.$$

由极坐标与直角坐标之间的关系可知，所求的直角坐标方程为

$$\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=3,$$

即

$$x+\sqrt{3}y-6=0.$$

例 5 将直角坐标方程 $x^2+y^2=2y$ 化为极坐标方程.

解 由极坐标与直角坐标之间的关系可知，$\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta=2\rho\sin\theta$，即 $\rho^2=2\rho\sin\theta$，也即

$$\rho=2\sin\theta.$$

于是，所求圆的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$($\rho=0$ 包含在此方程内).

2. **极坐标方程的建立**

求曲线极坐标方程的方法和步骤与求直角坐标方程类似，即把曲线看成适合某种条件的点的集合或轨迹，将已知条件用曲线上点的极坐标 ρ 和 θ 的关系式 $F(\rho,\theta)=0$ 表示出来，从而得到曲线的极坐标方程.

例 6　求经过点 $A(a,0)$，$a\neq 0$，且与极轴垂直的直线的极坐标方程.

解　设 $M(\rho,\theta)$ 是直线上任意一点（图 1-4），连结 OM，则 $OM=\rho$，$\angle AOM=\theta$. 又因为 $\angle OAM=\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos\theta=\frac{a}{\rho}$，即 $\rho=\frac{a}{\cos\theta}$ 为所求直线的极坐标方程.

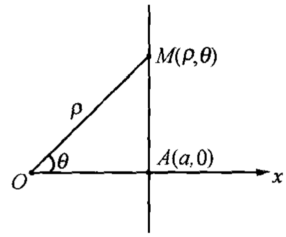

图 1-4

例 7　设一圆经过极点 O，圆心在极轴上，半径为 a，求它的极坐标方程.

解　设点 $M(\rho,\theta)$ 是圆上任意一点，连结 OM 与 MA，如图 1-5 所示，则 $OM=\rho$，$\angle MOA=\theta$. 因为 $\angle AMO=\frac{\pi}{2}$，$OA=2a$，所以 $\rho=2a\cos\theta$ 就是所求圆的极坐标方程.

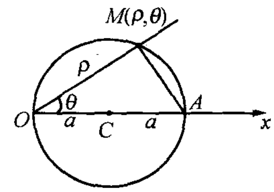

图 1-5

3. **极坐标方程的作图**

极坐标方程的作图通常采用描点法.

例 8　作出极坐标方程 $\rho=1+\cos\theta$ 的图象.

解　将 $\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$ 与 ρ 的对应值列表如下：

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{4}$
ρ	2	1.87	1.71	1.5	1	0.5	0.29	0.13	0	0.13	0.29	0.5	1	1.5	1.71	1.87

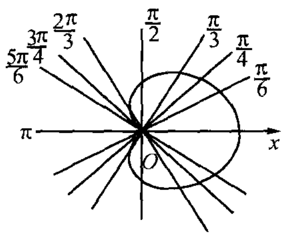

图 1-6

练习 1-1

1. 在极坐标系中作出下列各点：

$A\left(1,\frac{\pi}{6}\right)$，$B\left(2,\frac{3\pi}{4}\right)$，$C(2,0)$，$D\left(1,-\frac{\pi}{3}\right)$，$E\left(2,\frac{11\pi}{6}\right)$.

2. 将下列各点的极坐标化为直角坐标：

$A\left(4,\frac{\pi}{4}\right)$，$B\left(2,\frac{4\pi}{3}\right)$，$C(7,\pi)$，$D\left(5,\frac{\pi}{2}\right)$.

3. 将下列各点的直角坐标化为极坐标：

$A(-1,-1)$,$B(4,-4\sqrt{3})$,$C(0,-4)$,$D(\sqrt{3},-1)$.

4. 将下列各直角坐标方程化为极坐标方程:

(1) $x=1$; (2) $2x-y=0$.

5. 将下列极坐标方程化为直角坐标方程:

(1) $\rho=1$; (2) $\theta=\frac{\pi}{4}$.

习题 1-1

1. 将下列直角坐标方程化为极坐标方程:

(1) $y+2=0$; (2) $xy=4$; (3) $x^2+y^2=25$; (4) $2x-5y=0$.

2. 将下列极坐标方程化为直角坐标方程:

(1) $\rho=7$; (2) $\rho^2\sin 2\theta=2a^2$;

(3) $\rho=4\cos\theta$; (4) $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}a$.

3. 求经过极点,圆心在点$\left(a,\frac{\pi}{2}\right)$$(a>0)$,半径为 a 的圆的极坐标方程.

4. 写出过点 $A\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$,且平行于极轴的直线的极坐标方程.

§1-2 复 数

我们知道,在解实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$时,如果判别式 $b^2-4ac<0$,就会遇到负数开平方的问题,为了解决这一问题,需要扩大数系,引进虚数,将数集从实数域扩大到复数域.

一、复数的概念

1. 虚数的单位

为了解决负数开平方的问题,我们引入一个新数 i,称之为**虚数的单位**.并且规定:

(1) $\mathrm{i}^2=-1$;

(2) i 与实数在一起,可以按照实数的四则运算法则进行运算.

根据上述规定,$\pm\mathrm{i}$ 就是 -1 的平方根.因此,当引进虚数的单位 i 后,我们就可以说,方程 $x^2=-1$ 有解:$x=\pm\mathrm{i}$,从而解决了方程 $x^2=-1$ 的求解问题.

关于虚数的单位 i,显然有

$$\mathrm{i}^1=\mathrm{i},\mathrm{i}^2=-1,\mathrm{i}^3=-\mathrm{i},\mathrm{i}^4=1.$$

一般地,当 $n\in\mathbf{N}$ 时,有

$$\mathrm{i}^{4n+1}=\mathrm{i},\mathrm{i}^{4n+2}=-1,\mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i},\mathrm{i}^{4n}=1.$$

另外,还规定:

$$\mathrm{i}^0=1,\mathrm{i}^{-n}=\frac{1}{\mathrm{i}^n}(n\in\mathbf{N}).$$

例 1 计算:

(1) i^{2010}； (2) i^{-5}.

解 (1) $i^{2010}=i^{502\times4+2}=i^2=-1$.

(2) $i^{-5}=\frac{1}{i^5}=\frac{1}{i}=-i$.

2. 复数

定义 形如 $a+bi(a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R})$ 的数称为**复数**. a,b 分别叫做复数的**实部**和**虚部**. 复数 $a+bi$ 常记为 z，即 $z=a+bi$.

(1) 当 $b=0$ 时，复数 $a+bi$ 就是实数 a；

(2) 当 $b\neq0$ 时，复数 $a+bi$ 就是虚数，此时若 $a=0$，它就是纯虚数.

可见，复数包含了所有的实数和虚数，实数和纯虚数是复数的特例. 这样，数集就从实数域 $\mathbf{R}$ 扩充到了复数域 $\mathbf{C}$.

例如，$2+3i$，$-1+\sqrt{2}i$，$-0.5i$ 都是复数，它们的实部分别是 $2,-1,0$，虚部分别为 $3,\sqrt{2},-0.5$，其中 $-0.5i$ 是纯虚数.

对于复数，还有如下规定：

(1) 如果两个复数的实部和虚部分别相等，我们就说这两个复数相等，即

$$a+bi=c+di\Leftrightarrow a=c \text{ 且 } b=d.$$

(2) 两个实数可以比较大小，但两个复数，若不全是实数，就不能比较它们的大小. 例如，$3i$ 与 0，$1+4i$ 与 $3-2i$，$-i$ 与 $2i$ 都不能比较大小.

(3) 如果两个复数的实部相等，虚部互为相反数，则称这两个复数互为共轭复数，即 $z=a+bi$ 的共轭复数为 $\bar{z}=a-bi$.

例 2 已知 $(x+2y)-i=6x+(x-y)i$，其中 $x,y\in\mathbf{R}$，求 x,y.

解 根据复数相等的条件，得方程组

$$\begin{cases}x+2y=6x,\\-1=x-y,\end{cases}$$

解得 $x=\frac{2}{3}$，$y=\frac{5}{3}$.

二、复数的各种表示法

1. 点表示法

由于任何一个复数 $z=a+bi$ 都可以由一个有序实数对 (a,b) 唯一确定，所以在平面直角坐标系中，我们可以用坐标为 (a,b) 的点表示复数 $z=a+bi$. 这个用来表示复数的平面叫做**复平面**，x 轴称为**实轴**，其单位仍旧是 1，y 轴称为**虚轴**，y 轴的单位是 i. 按照这种表示法，复数与复平面上的点成一一对应关系，如图 1-7 所示.

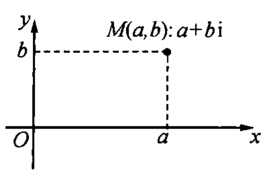

图 1-7

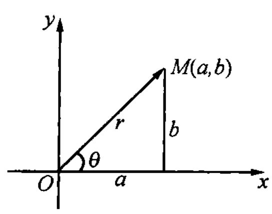

图 1-8

2. 向量表示法

我们已经知道复数 $z=a+bi$ 与复平面内的点 $M(a,b)$ 是一一对应的，如图 1-8 所示，复平

面内的点 $M(a,b)$ 和向量 $\overrightarrow{OM}$ 又是一一对应的，于是复数 $z=a+bi$ 也可以用向量 $\overrightarrow{OM}$ 来表示.

向量 $\overrightarrow{OM}$ 的模 r 也称为复数 $z=a+bi$ 的**模**，记作 $|a+bi|$，显然有

$$r=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

例如，$\left|-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1.$

向量 $\overrightarrow{OM}$ 与 x 轴正方向的夹角 θ 称为复数 $a+bi$ 的**幅角**. 一个不等于零的复数 $a+bi$ 的幅角有无穷多个值，这些值相差 2π 的整数倍. 例如，i 的幅角为 $\theta=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

我们把幅角在 $[0,2\pi)$ 内的值称为**幅角的主值**①.

要确定复数 $a+bi(a\neq0)$ 的幅角 θ，可以用公式 $\tan\theta=\frac{b}{a}$，其中 θ 所在的象限就是与复数 $a+bi$ 相对应的点 $M(a,b)$ 所在的象限.

例 3 在复平面内，作出表示下列复数的点，并求它们的模与幅角主值：

(1) i^{-1}； (2) $\sqrt{3}-i$.

解 (1) 因为 $i^{-1}=\frac{1}{i}=-i$，所以 $a=0,b=-1$，故点 $(0,-1)$ 在虚轴上，如图 1-9(1)所示.

$$r=\sqrt{(-1)^2}=1,\theta=\frac{3\pi}{2}.$$

(2) 因为 $a=\sqrt{3},b=-1,\tan\theta=\frac{b}{a}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$，所以点 $(\sqrt{3},-1)$ 在第四象限，如图 1-9(2)所示.

$$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2,\theta=\frac{11\pi}{6}.$$

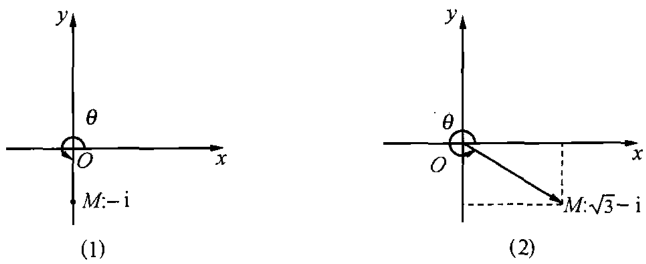

图 1-9

3. 三角表示法

从图 1-8 还可以看出，$a=r\cos\theta,b=r\sin\theta$. 于是 $z=a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中 $r=\sqrt{a^2+b^2},\tan\theta=\frac{b}{a}(a\neq0)$，$\theta$ 所在的象限就是与复数相对应的点 $M(a,b)$ 所在的象限.

我们把 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 称为复数的三角形式②，而相应地将 $a+bi$ 称为复数的代数形式.

4. 指数表示法

由欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 可将复数 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 写成 $z=re^{i\theta}$，称其为复数 z 的指数形式. 其中幅角 θ 只能用弧度表示.

---

① 幅角主值 θ 在数学中取 $0\leqslant\theta<2\pi$，在电学中取 $-\pi<\theta\leqslant\pi$.

② 复数的三角形式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 在电工学中简记为 $r\angle\theta$，其中 r 是复数的模，θ 是复数的幅角.

例 4　化下列复数为三角形式、指数形式：

(1) $-1+\sqrt{3}i$;　　　　(2) $2i$.

解　(1) 由 $a=-1,b=\sqrt{3}$，知 $r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2,\tan\theta=\frac{b}{a}=-\sqrt{3}$.

由于点$(-1,\sqrt{3})$在第二象限，所以 θ 的主值取$\frac{2\pi}{3}$.

因此，复数$-1+\sqrt{3}i$ 的三角形式为 $z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$，指数形式为 $z=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

(2) 由 $a=0,b=2$，知 $r=\sqrt{0^2+2^2}=2,\theta$ 的主值为$\frac{\pi}{2}$.

因此，复数 $2i$ 的三角形式为 $z=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$，指数形式为 $z=2e^{i\frac{\pi}{2}}$.

三、复数的四则运算

1. 复数的加减法

两个复数相加减，只要将两个复数的实部、虚部分别相加减，即

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i.$$

2. 复数的乘法

设复数 $z_1=a+bi,z_2=c+di$，则

$$z_1z_2=(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

若 z_1 与 z_2 的三角形式分别为 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，则 z_1 与 z_2 的乘积用三角形式可表示为

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].\end{aligned}$$

就是说，两复数相乘，就是把模相乘，幅角相加. 用指数形式表示为

$$z_1z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

该结论可以推广到有限个复数相乘的情形：

$$\begin{aligned}z_1z_2\cdots z_n&=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\cdot\cdots\cdot r_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)\\&=r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)].\end{aligned}$$

当 $z_1=z_2=\cdots=z_n=z$，即 $r_1=r_2=\cdots=r_n=r,\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_n=\theta$ 时，就有

$$z^n=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)\ (n\in\mathbf{N}).$$

3. 复数的除法

两个复数相除(除数不为零)，先把它们写成分式，用分母的共轭复数同乘分子和分母，然后进行化简，写成复数的一般形式.

设 $z_1=a+bi,z_2=c+di$，则

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\ (c^2+d^2\neq0).$$

设复数 z_1,z_2 的三角形式分别是 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\ (z_2\neq0)$，不难证明

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

这就是说，两个复数相除，就是把模相除，幅角相减. 用指数形式表示为

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

例 5 计算共轭复数 $a+bi$ 与 $a-bi$ 的和、差、积.

解 $(a+bi)+(a-bi)=2a$,

$(a+bi)-(a-bi)=2bi$,

$(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$.

由此可见，两共轭复数的和是实数，两共轭复数的差是纯虚数（当 $b\neq 0$ 时），两共轭复数的乘积是实数.

例 6 计算：

(1) $(3+2i)(7+i)$； (2) $8\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$； (3) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^6$.

解 (1) $(3+2i)(7+i)=(21+2i^2)+(14i+3i)=19+17i$.

(2) $8\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=16\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$=16\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$.

(3) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^6=\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)^6=\cos\frac{21\pi}{2}+i\sin\frac{21\pi}{2}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$.

例 7 计算：(1) $\frac{3+4i}{4+3i}$； (2) $\frac{2}{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}$.

解 (1) $\frac{3+4i}{4+3i}=\frac{(3+4i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}=\frac{12+16i-9i-12i^2}{25}=\frac{24}{25}+\frac{7}{25}i$.

(2) 因为 $2=2(\cos 0+i\sin 0)$，所以

$$\frac{2}{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{2(\cos 0+i\sin 0)}{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}=2\left[\cos\left(0-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(0-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}-\sqrt{2}i.$$

四、在复数域内解实系数一元二次方程

由前面的知识可以知道，在复数范围内，$\sqrt{-1}=\pm i$. 类似可推得，$\sqrt{-4}=\pm 2i$，$\sqrt{-9}=\pm 3i$，….

一般地，当 $a>0$ 时，$\sqrt{-a}=\pm\sqrt{a}\,i$. 故对实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，当判别式 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，$\sqrt{b^2-4ac}=\pm\sqrt{4ac-b^2}\,i$.

于是，当 $\Delta<0$ 时，方程有解：$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{4ac-b^2}\,i}{2a}$.

由此可见，实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 在复数范围内都有解.

例 8 在复数范围内求解方程 $x^2+2x+4=0$.

解 $\Delta=b^2-4ac=4-16=-12<0$，故方程在复数范围内有解.

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{-12}}{2}=\frac{-2\pm 2\sqrt{3}i}{2}=-1\pm\sqrt{3}i.$$

练习 1-2

1. 问 a 是什么实数时，$\dfrac{a^2+a-6}{a+5}+(a^2+8a+15)\mathrm{i}$ 是实数？是纯虚数？

2. 计算：

(1) i^{1071}；　(2) i^{1998}；　(3) i^{-7}；　(4) i^{-65}.

3. 求下列复数的模与辐角主值：

(1) $\sqrt{3}+\mathrm{i}$；　(2) $-1-\mathrm{i}$；　(3) $2-2\mathrm{i}$；　(4) $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$.

4. 计算：

(1) $(4+5\mathrm{i})-(3+2\mathrm{i})$；　(2) $(1-2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})$；

(3) $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^3$；　(4) $\dfrac{1-2\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}$.

5. 在复数范围内解方程：

(1) $x^2+x+6=0$；　(2) $x^2+16=0$.

习题 1-2

1. 将下列复数化为三角形式、指数形式：

(1) $1-\mathrm{i}$；　(2) -2；　(3) $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$；

(4) $3\left(\sin\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{3}\right)$；　(5) $-\cos\dfrac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{4}$.

2. 计算：

(1) $(8+3\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})$；

(2) $3\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)\cdot 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$；

(3) $(1+\mathrm{i})\div\left[\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)\right]$.

3. 在复数范围内求解下列一元二次方程：

(1) $x^2-4x+5=0$；　(2) $x^2-8x+17=0$.

§1-3　反三角函数

一、反正弦函数

从正弦函数 $y=\sin x$ 的图象（图 1-10）可以看出，对于 x 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内的每一个值，y 都在 $[-1,1]$ 上有唯一确定的值和它对应. 例如，对于 $x=\dfrac{\pi}{6}$，有 $y=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$ 和它对应. 反过来，对于 y 在 $[-1,1]$ 上的每一个值，x 有无穷多个值和它对应. 例如，对于 $y=\dfrac{1}{2}$，x

有$\frac{\pi}{6}$,$\frac{5\pi}{6}$,$\frac{13\pi}{6}$等无穷多个值和它对应.由此可见,对于y在$[-1,1]$上的每一个值,没有唯一确定的x值和它对应,我们说,函数$y=\sin x$在$x\in(-\infty,+\infty)$内没有反函数.

但由图1-10可以看到,在$y=\sin x$的单调区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上,对于$y$在$[-1,1]$上的每一个值,$x$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上有唯一确定的值和它对应,即$y=\sin x$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上有反函数.下面给出它的定义:

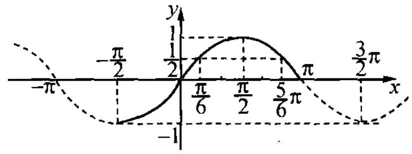

图 1-10

定义 1 正弦函数$y=\sin x$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的反函数叫做反正弦函数,记作$x=\arcsin y$.由于习惯上用字母$x$表示自变量,$y$表示函数,所以反正弦函数写成$y=\arcsin x$,它的定义域为$[-1,1]$,值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

这样,对于$[-1,1]$内的每一个x值,y(即$\arcsin x$)表示$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$内唯一确定的一个角,该角的正弦值恰好等于$x$.例如,对于$x=\frac{1}{2}$,因为在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$内有$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$,所以$\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$.由此还知道:$\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

一般地,如果$x\in[-1,1]$,则有$\sin(\arcsin x)=x$.

例 1 求下列各反正弦函数的值:

(1) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; (2) $\arcsin(-1)$.

解 (1) 因为在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上,$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$.

(2) 因为在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上,$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$,所以$\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$.

例 2 求下列各式的值:

(1) $\cot\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; (2) $\sin\left(2\arcsin\frac{4}{5}\right)$.

解 (1) $\cot\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\cot\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2) 设$\alpha=\arcsin\frac{4}{5}$,则$\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

由$\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$得$\cos\alpha\geqslant 0$,且$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$,

故原式$=\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$.

根据互为反函数的图象间的关系,容易知道,反正弦函数$y=\arcsin x$的图象与正弦函数$y=\sin x$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的一段图象关于直线$y=x$对称(图1-11).

从图1-11中可以看出,反正弦函数$y=\arcsin x$具有如下性质:

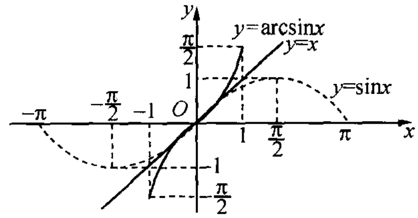

图 1-11

(1) 定义域为[-1,1],值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$;

(2) 在区间[-1,1]上是单调递增函数;

(3) 图象关于原点对称,是奇函数,也就是说,如果$x\in[-1,1]$,则有$\arcsin(-x)=-\arcsin x$.

例 3 求下列各式的值:

(1) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$; (2) $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{6}\right)$.

解 (1) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$;

(2) $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{6}\right)=\arcsin\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)=\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$.

由例 3 可见,$\arcsin(\sin\alpha)$不一定等于α,而是等于$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上与$\alpha$有相同正弦值的一个角.

二、反余弦函数

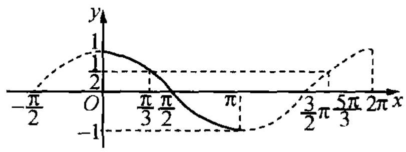
图 1-12

从余弦函数的图象(图 1-12)同样可以看到,$y=\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内没有反函数.但$y=\cos x$在单调区间$[0,\pi]$上的反对应关系是单值,因此$y=\cos x$在$[0,\pi]$上有反函数.

定义 2 余弦函数$y=\cos x$在$[0,\pi]$上的反函数叫做反余弦函数,记作$y=\arccos x$,它的定义域为[-1,1],值域为$[0,\pi]$.

这样,对于[-1,1]内的每一个x值,$\arccos x$表示$[0,\pi]$内唯一确定的一个角,该角的余弦值恰好等于x,即当$x\in[-1,1]$时,$\cos(\arccos x)=x$.

例 4 求下列各式的值:

(1) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; (2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

(3) $\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$; (4) $\sin\left[\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right]$.

解 (1) 因为在$[0,\pi]$上,$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$.

(2) 因为在$[0,\pi]$上,$\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}$.

(3) 因为$\frac{1}{2}\in[-1,1]$,所以$\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

(4) 设$\alpha=\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$,则$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$.

由$\alpha\in[0,\pi]$得$\sin\alpha\geqslant 0$,所以$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$,即$\sin\left[\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right]=\frac{3}{5}$.

比较例 4 中(1),(2)两题可以看出$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

一般地,当$x\in[-1,1]$时,有$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$.

例如,$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{1}{2}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$.