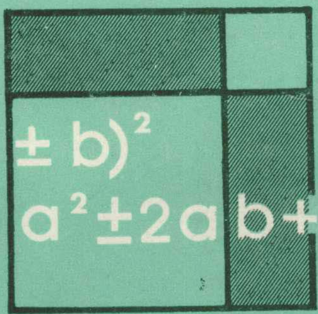
帮你学习初中代数

李毓佩



河 北 人 民 出 版 社

帮你学习初中代数

李 毓 佩

河 北 人 民 出 版 社

帮你学习初中代数

李 毓 佩

河北人民出版社出版（石家庄市北马路45号）
石家庄市太行印刷厂印刷 河北省新华书店发行

787×1092毫米 1/32 8.5印张179,000字 印数：1—16,400 1986年10月第1版
1986年10月第1次印刷 统一书号：7086·1324 定价：1.00元

前　言

本书是为初中学生编写的。通过数学故事、数学家轶事、数学游戏、历史名题等，以生动活泼的语言引入数学概念，以求达到启发学生的思维、开扩眼界、培养学习兴趣、热爱科学的目的。

全书共分八章：有理数，整式的四则运算和因式分解，一次方程、一次不等式和一次方程组，二次根式，二次方程和二次不等式，指数和对数，函数和图象，解三角形。各章均包括基础知识、例题和自我检查题。

为了帮助青少年自学初中代数，对每章的重要概念都进行了分析，指明要点。例题的安排注意了由浅入深，同时对每章典型例题都做了详尽的解答，并指出易犯的错误。各章后面留有一定数量的自我检查题，书末附有答案，便于检查学习效果。

由于编者水平所限，错误在所难免，请广大读者批评指正。

编者

一九八五年

目　录

一、有 理 数

从数石子的游戏谈起

现在来做一次数石子的游戏：

在圆周上摆十六个石子，从1到16编上号。从1号石子顺时针前进5步，就到了6号石子。现在，要求从1号石子出发顺时针前进328步，从那里逆时针前进485步，又顺时针前进504步，再逆时针前进361步，问最后到了第几号石子？谁能最先说出谁取胜。

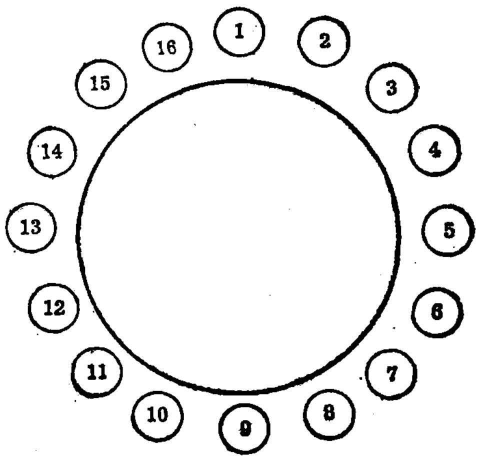


图1

真的去一个石子一个石子去数？不成，这样数要数1678次，太慢！

在数石子过程中要转好多圈，而转这些圈对解决这个问题并没有用，想办法除去这些圈数，会使问题简化。怎样去

掉这些圈数呢？可以用16去除，

328 ÷ 16 = 20…… 8.

上面的结果说明从1号石子出发，顺时针前进328步，相当于顺时针转了20圈又零8步。20圈可以不去考虑，我们关心的是8步。从1号石子出发顺时针前进8步，一定到了9号石子；

485 ÷ 16 = 30…… 5.

这又表明从9号石子出发逆时针前进5步，到了4号石子；

504 ÷ 16 = 31…… 8.

从4号石子出发，顺时针前进8步，到了12号石子；

361 ÷ 16 = 22…… 9.

再从12号石子出发逆时针前进9步，到了3号石子。

这种计算方法比直接数要方便多了。用16去除，只考虑余数，把复杂问题变得简单了。

还有没有更巧妙一点的方法呢？

由于顺时针数步和逆时针数步，是方向相反的两种数法。把顺时针数出的步数记为正数，把逆时针数出来的步数记为负数，就有 +328，−485，+504，−361。最后落到哪号石子上，就要看这四个数的和是多少了。

$$(+328)+(-485)+(+504)+(-361).$$

怎样做这个加法？

从1号石子出发，顺时针前进328步到了9号石子。如果从9号石子出发，再逆时针前进328步，最后又回到哪儿呢？显然又回到了1号石子，这就说明

$$(+328)+(-328)=0.$$

也就是说，两个数仅符号（正负号）不同，它俩之和一定等于0。从转圈角度来看是顺时针走若干步，接着再逆时针前进同样步数，又回到最初的出发点。

另一方面 $+504=(+361)+(+143)$，意思是顺时针前进504步，等于先顺时针前进361步，接着再顺时针前进143步。同样道理 $-485=(-328)+(-157)$。

根据上面说的二条，就会计算这四个数的和了

$$
\begin{aligned}
&(+328)+(-485)+(+504)+(-361)\\
=&(+328)+[(-328)+(-157)]+[(+361)+(143)]\\
&+(-361)\\
=&[(+328)+(-328)]+[(+361)+(-361)]+\\
&(-157)+(+143)\\
=&\ 0+0+(-14)+(-143)+(+143)\\
=&-14.
\end{aligned}
$$

最后这个得数说明什么？说明这1678步相当于逆时针前进14步，从1号石子逆时针前进14步到达3号石子处，与前

实　例	正　数	0	负　数
路程（米）	向东走	起　点	向西走
账目（元）	收　入	收支平衡	支　出
时间（小时）	午夜后	午　夜	午夜前
水位（米）	上　涨	海平面	下　落
航向（度）	向左偏离	正　确	向右偏离
旋转（度）	顺时针转	起　点	逆时针转

面做法的答数一样。

从上面的游戏可以知道，凡是两种相反意义的量，可以把一种意义的量规定为正的，另一种与它相反意义的量规定为负的。这样的例子是很多的，见前表

【例1】 有一座三层的楼房失火了，一个救火员搭了梯子爬到三层楼上去抢救东西。当他爬到梯子正中一级时，二楼的窗户喷出火来，他往下退了3级，等火过去了，他又爬上7级。这时屋顶有一块砖掉下来，他又往后退了2级，幸亏砖没有打着他，他又爬上了6级。这时他距离最高一层还有3级。这梯子一共有几级？

解： 把梯子正中一级作为计算的起点，向上爬的级数为正数，往下退的级数为负数。

由于梯子有正中一级，说明梯子的级数是奇数。先计算从正中一级以上的级数（正中一级不算）。

$$(-3)+(+7)+(-2)+(+6)+(+3)$$
$$=(-3)+[(+3)+(+4)]+(-2)+[(+2)+(+4)]$$
$$+(+3)$$
$$=0+(+4)+0+(+4)+(+3)$$
$$=+11.$$

梯子总级数$=2\times11+1=23$(级)。

答：梯子一共有23级。

我国古代，很早就了解了正负数的概念，掌握了正负数运算法则。那时候还没有纸，计算时使用一些小竹棍来摆出各种数字。例如378摆成 |||⊥$\overline{|||}$；6708摆成⊥$\overline{||}$　$\overline{|||}$，这里0用空位来表示，这些小竹棍叫做“算筹”。

我国古代还发明了许多区别正负数的方法，比如用黑色

的棍或正方形的棍表示正数，用红色的棍或三角形的棍表示负数。用不同颜色的数来表示正负数的习惯一直保留到现代。一般用红色数表示亏钱，我们看到报纸上登载某某国家经济出现“赤字”，表明这个国家支出大于收入，财政上亏了钱。

正数、负数既然表示两种相反意义的量，能不能说一个数它不是正数，一定是负数呢？不能。因为还存在着一个既非正数，又非负数的数，它就是零。数学上把零称做“中性数”。

算术中学过的自然数、分数、小数都是正数，现在除了正数和零，还要研究一类新数，那就是负数。负数也有负整数如-2，-6，-97；负分数如$-\frac{1}{5}$，$-\frac{2}{3}$。把正整数、零、负整数统称整数，正分数、负分数统称分数。整数和分数统称有理数。

学习了负数，使我们认识的数从正整数、正分数和零扩大到了有理数。

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{整数—正整数，零，负整数；}\\ \text{分数—正分数，负分数。}\end{cases}$$

上面有理数的分类中，没有谈到小数。小数和有理数有什么关系呢？可以看下表：

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{有限小数}\\ \text{无限循环小数}\end{cases}\end{cases}$$

小数中的有限小数、无限循环小数是有理数；无限不循环小数就不是有理数了，而是一类新数叫无理数。圆周率π

就是无理数。

【例 2】 将下列各数分别填进相应的括号内：

$15,\ -9,\ -0.032,\ \frac{1}{7},\ 0,\ 2\frac{2}{5},\ 0.\dot{2}\dot{3},\ \pi.$

整数集合｛ …｝，分数集合｛ …｝，

正数集合｛ …｝，负数集合｛ …｝，

有理数集合｛ …｝，无理数集合｛ …｝。

解：

整数集合｛15，－9，0…｝，

分数集合$\left\{-0.032,\ \frac{1}{7},\ 2\frac{2}{5},\ 0.\dot{2}\dot{3}\cdots\right\}$，

正数集合$\left\{15,\ \frac{1}{7},\ 2\frac{2}{5},\ \pi\cdots\right\}$，

负数集合｛－9，－0.032…｝，

有理数集合$\left\{15,\ -9,\ -0.032,\ \frac{1}{7},\ 0,\ 2\frac{2}{5},\ 0.\dot{2}\dot{3}\cdots\right\}$，

无理数集合｛π…｝。

数轴和绝对值

上体育课，老师总是让学生按大小个排队，然后再报数。这样做队伍整齐，老师也心中有数。

对于有理数也可以用数轴将它们直观地表示

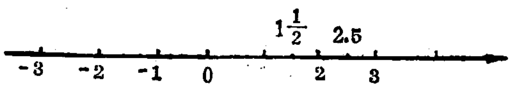


图 2

出来。数轴包括三个要素：原点，长度单位和方向。三者缺一不可。有了数轴，所有的有理数都可以用数轴上的点来表示(图2)。

在数轴上，原点表示零，它是正数和负数的分界点，原点的左边全部是负数；原点的右边的点表示的全部是正数。箭头所指的方向是正方向，相反的方向是负方向。长度单位可以任意取。从数轴上可以看出所有的负数都小于零。

把仅仅符号不同的两个数，叫做互为相反数。例如$+5$和-5，$+\frac{1}{2}$和$-\frac{1}{2}$，$+\pi$和$-\pi$都是互为相反数。

相反数在数轴上，是用两个关于原点对称的点来表示的

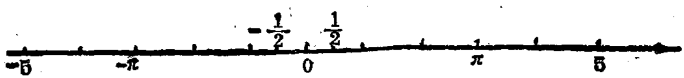


图 3

(图3)。从数轴上可以看出正数的相反数是负数；负数的相反数是正数；零的相反数是零。

引进负数，对于表示具有相反意义的量是很方便的。比如以天安门为起点，往东单方向走算正方向，往西单方向走算负方向。以1公里做为长度单位，可以把东西长安街上的重要建筑用正数或负数表示出来。比如，北京饭店就是$+1000$米，电报大楼就是-1500米。

但是，生活中还有许多不应该考虑正负方向的问题。比如坐车买票，从天安门乘公共汽车去东单，要买5分钱的车票；那么从天安门乘车去西单，要不要买票呢？当然应该买票！这里如果坚持考虑方向的话，就会想，往东单走，走的

是正方向，买票是应该的。可是往西单走，走的是负方向，照理说售票员不但不应该让乘客买票，应该倒找乘客5分钱才对，这是不可能的。看来，生活中还存在着许多不考虑方向，只考虑数值的问题。

为了研究问题方便，这里引入绝对值的概念。

一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零。

从天安门乘车不管往东走，还是往西走，都是按路程的绝对值来计算票价的。往东走4公里买5分钱车票，往西走4公里也要买5分钱车票，这里是不考虑方向，只看走了多少公里。

绝对值用在数的两边各画一条竖线来表示。比如$+7$的绝对值记作$|+7|$，-0.25的绝对值用$|-0.25|$来表示。

绝对值是个非常重要的概念，也是学习上的一个难点，在学习时要注意以下两点：

1．一个数的绝对值不可能是负数，只能是正数或者是零；

2．从数轴上看，一个数的绝对值表示代表这个数的点到原点的距离。

【例1】 回答下列问题：

（1）$\frac{1}{4}$和-0.25是不是互为相反数？-9和$+7$是不是互为相反数？为什么？

（2）在有理数范围内，什么样的数的相反数比原数大？什么样的数的相反数比原数小？

（3）写出$-1\frac{1}{2}$，3，-2.5的相反数，并用数轴上

的点把它们表示出来。

解：

（1）因为$\frac{1}{4}=0.25$，所以$\frac{1}{4}$与-0.25是互为相反数；

因为-9的相反数是$+9$，$+7$的相反数是-7，所以-9和$+7$不是互为相反数。

（2）在有理数范围内，负数的相反数比原数大；正数的相反数比原数小。

（3）$-1\frac{1}{2}$，3，-2.5的相反数分别是$1\frac{1}{2}$，-3，2.5（图4）

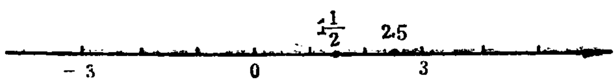


图4

【例2】 x在数轴上什么位置？

（1）$|x|=5$；　　（2）$|x|<5$；

（3）$|x|>5$。

解：

（1）因为$|+5|=5$，$|-5|=5$，所以$|x|=5$中的x可以是$+5$，也可以是-5。在数轴上表示是$+5$，-5两个点；

（2）能够满足$|x|<5$的x值有无穷多个。代表这些数的

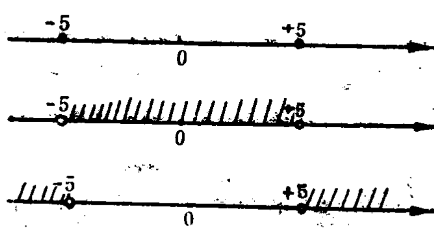


图5

点都在-5和$+5$之间，但是不包括-5、$+5$这两点在内。用不等号表示$-5<x<+5$；

（3）满足$|x|>5$的x值也有无穷多个。代表这些数的点在-5的左边，$+5$的右边，不包括$+5$，-5两点（图5）。

【例3】 下列各式在a是什么数时成立，什么数时不成立？为什么？

（1）$|a|=a$；　　（2）$|a|=-a$；

（3）$|a|=|-a|$；　　（4）$a=-a$。

解：

（1）当$a\geqslant 0$时，$|a|=a$成立。因为$a\geqslant 0$表示a是正数或者是零，由绝对值定义可知正数的绝对值等于它本身，零的绝对值等于0，所以$a\geqslant 0$时，$|a|=a$；

当$a<0$时，$|a|=a$不成立。因为$a<0$表明a是个负数，而负数的绝对值等于它的相反数$-a$，所以$a<0$时，$|a|=a$不成立。

（2）当$a\leqslant 0$时，$|a|=-a$成立；当$a>0$时，$|a|=-a$，不成立。道理同上。

（3）a为任何有理数，$|a|=|-a|$都成立。因为$a\geqslant 0$时$|a|=a$，$|-a|=a$，所以$|a|=|-a|$；$a<0$时，$|a|=-a$，$|-a|=-a$，所以$|a|=|-a|$。

（4）只有当$a=0$时，$a=-a$才成立；当$a>0$或$a<0$时，$a=-a$不成立。因为只有零的相反数等于零。