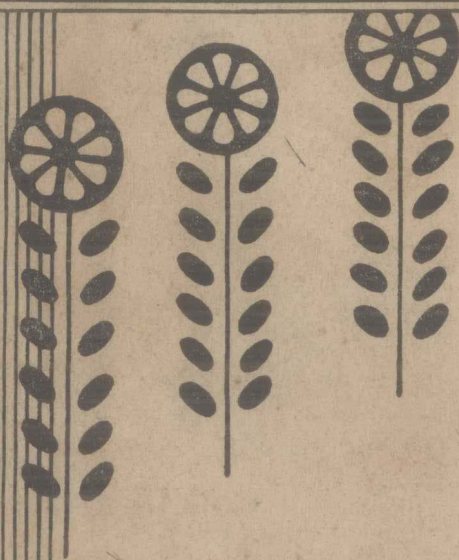


算學小叢書

談叢理數

朱言鈞著



商務印書館發行

算學小叢書

數理叢談

朱言鈞著

中華民國二十四年七月初版

周

四三八三上

算學叢書
數理叢談一冊
(65138)

每冊定價大洋叁角伍分
外埠酌加運費匯費

著者 朱言鈞

發行人 王雲五
上海河南路

印刷所 商務印書館
上海河南路

發行所 商務印書館
上海及各埠

版 翻
權 印
所 必
有 究

序

苟庭根爲全球數學之中樞，赫百德爲當世數學之巨擘。公謹博士學於苟庭根，爲赫氏登堂入室之高足，學識廣博而純粹，每與討論數理，常有獨到之見解，議論精闢，遠非生吞活剝者所能及萬一。近以新著數理叢談見示，雖字不足十萬，而所言皆各科之本源；理極奧蹟，而出之以爽利之筆，通俗之辭。化難爲易，深入顯出，非所謂食而能化者耶？

數學之難，不難於繁複之演算而難於基本之理法。必基本之理法真明，方能執簡馭繁，深入無阻，以牛頓來本之（Leibniz）之天才集前賢之大成，創微積之學術，厥功不可謂不偉，徒以致力於方法之進展，無暇爲根深之探索，於希臘大幾何學家所已發之不可通約數論，未加注意，遂致基礎未固。後人沿之，往往謬誤之結果發生於著名之方法。及十八稜末十九稜初高斯（Gauss），藍格朗（Lagrange），康遷（Cauchy）諸氏起，始力求恢復希臘幾何家之嚴密，致意於微積基礎之批評，讀亞培爾（Abel）致哈斯頓（Harsteen）

二書：‘今日流行之解析，其間有無限之黑暗，吾欲盡吾之力散播光明於其中，以計畫與統系如是之缺乏，而從事其間者，竟如是其衆多，甯非異事？其更大之弊，實爲嚴密之絕對缺乏。在高等解析中，定理之曾經嚴密證明者，爲數甚少。無論何處，常見不經證明，卽以特例推爲公例之惡習……二項定理，從未經過嚴密之證明，Taylor 展開式乃微積全體之基礎，亦復如是。’可見當時歐洲數學之狀態。直至十九稊末華斯泰斯康脫戴特根三氏之無理數論完成，所謂近世解析，始有穩固不拔之基礎。夫無理數論，常人視之皆以爲區區無足重輕，殊不知其關係，乃如此之巨。卽牛頓來本之二氏，亦未嘗不知希臘幾何學家之早有不可通約數論，或亦以爲如 $\sqrt{2}$ 之類已有開方之法，可求至其任何位之小數，儘可不必深論。一念之差，遂使空前偉業，留一微隙至三百餘年之久，且費十九稊諸大師百年之力，始能爲之補苴。基本理法之重要，有如此者。公謹此書價值如何，從此可知矣。

歐美數學名著於基本理法，雖皆論及而文字過於謹嚴。吾國學子，讀之往往以不易全明，遂不求甚解，躐等而進，買櫝還珠。彼讀書未嘗不多，演算未嘗不熟，而仍見解

駁雜，毫無統系；與但知記憶公式，不知應用條件，初無二致者，皆由於始基未固之病。公謹此書，既言數學各科之本源復及治學之要法；且懼人之難明設爲問答，以爽利之筆，借通俗之語，明奧蹟之理，實爲療此大病之良藥，爲益學界，必非淺鮮。

吾國數學，發明最先，徵諸歷史，人才輩出。輒近學者日衆，反進步甚遲，不能與歐美相頡頏者，良由近二十年數學界同人不事著述之故。現在學校數學教本，皆取材異國，書價甚昂，學生但購課本，已感困難；至於參考諸書，更非力所能及。求諸圖書館，亦至多每種但具一冊，甲已借讀，乙卽向隅。以公謹學識之精湛，與其研究一二問題，以自鳴高，不如從事譯著，多出數冊有益學界之書，以促全國數學之進步，水到渠成，自有能與歐美頡頏之一日。不知公謹之意若何。公謹嘗欲屏絕一切，從事研究，爲吾國學術爭地位，其志未嘗不卓，而不佞則以此說進，茲爲之序，遂附及之。

中華民國二十三年六月無錫顧澄

弁 言

民國十四年言鈞游學德國苟庭根，時赫百德教授方主講‘智識與數學思想’，以通俗曉暢之辭，闡專門高深之理；受業者千餘人，名教授如羅格 (C. Runge)，藍蹈 (E. Landau)，科朗脫 (R. Courant)，納爾松 (L. Nelson) 輩均列席聽講，言鈞生平所受激刺，此次當爲最劇烈者之一。歸國後，輒欲效法名師，有所編述，既牽於教務，而當日聽講筆錄，復缺而不完，欲加整理，已非易事。其後讀克蘭 (F. Klein) 海虎脫 (L. Heffter) 之著作，益感今日數學範圍之廣博，研究方法之嚴密，欲攝其綱要，溯其淵源而不流於支離破碎；自愧淺學，何足語此，故欲作而輟者，不知幾何次矣。九一八變起，學校休課，始乘間從事於此，所有體例，悉仿海虎脫‘何謂數學’一書，其中題材則採自海氏者十之六，採自赫氏原稿者十之四，數月之力，僅成三章而已。去年秋，廣續爲之，次第發表於光華半月刊，辱承海內賢達不棄，枉書商榷，其間無錫顧養吾教授澄文昌范秉鈞博士曾國二君補正尤多，今徇友好之意，重加刪訂，付諸手民，非

敢自炫心得，亦就正有道云爾。

中華民國二十三年十月一日餘姚朱言鈞書於上海寓齋

目 次

序

弁言

第一次談話	(關於整數分數之基本定理之討論).....	2
第二次談話	(關於有理數無理數以及虛數之討論)....	18
第三次談話	(關於代數方程式以及函數之討論).....	37
第四次談話	(關於幾何學基本原理幾何分類以及點 線面空間相互關係之討論)	56
第五次談話	(關於治幾何學方法之應用代數式以及 極限原理之討論)	79
第六次談話	(關於無窮級數之收斂及其與極限之關 係之討論)	93
第七次談話	(關於微分積分以及微分方程之原理之 討論)	108
第八次談話	(關於數學在自然科學中之應用之討 論)	127

數理叢談

這是春夏之交的一天傍晚，開赴歐洲的“中國號”離上海忽忽已兩天了。無限的天空，受夕陽反照，刻刻發生變化；天風海濤，奏着微妙的音樂，令人心境開曠。旅客們大半二三成羣，在船面散步消遣，其中獨有兩位却坐在休息室裏娓娓談話。一位是皓首蒼髮，精神矍鑠的大學教授；這次出游目的，是要到德國出席世界算學大會，因為多年沒有航海，就取道印度洋地中海，趁此休養身體。其他一位是年富力強的商人，擬到印度考察發展商業的機會，順便過南洋羣島與華商有所商洽。他們雖非舊識，却是一見如故，那位商人忽然狠誠懇的道：

“先生，我年小的時候，對於算學，發生很濃厚的興趣。後來中途輟學，奔走衣食，再沒有研究的機會。先生，所謂現代算學，究竟是什麼？”

“要知道一種學問是什麼，惟有竭盡心力去從事研究，算學當然不是例外。”

“那麼，我將永遠不知道算學是什麼了，因為我的職務不許我去從事研究。先生，你或者能介紹幾本淺而易讀的著作嗎？”

那位大學教授見了這商人一片熱誠，很爲所動，於是用躊躇未決的態度回答他道：“這類著作，在中西出版界中實在不多，但是，你既有志於此，我們航行無事，可以隨便談談：不過得一漏萬，絕無系統，未必有若何成績可望罷。”

“這真是我求之不得的，謝謝先生的好意。明天晚飯以後，准在這裏領教。”

第一次談話

次日晚上，這兩位旅客晤見之後，就談論起來。

教 我們所乘的“中國號”在大海中行駛，其原因是什麼？

商 當然是蒸汽的壓力。

教 正是，蒸汽的壓力是“中國號”所以運動的原因。

但所謂運動，究竟是什麼意思？

商 運動是地位的變遷。

教 不錯。所謂運動，是空間地位隨時間而變遷之意。因此“中國號”在空間中所處的地位所以時時變遷，實由於蒸汽的力。既然如此，地位的變遷與蒸汽的壓力，其間必有一種相倚相隨的關係。要發見這關係，必先詳考運動的狀態；申言之，必詳細知道其地位如何隨時間而變遷。精確言之，我們必用數去量其每小時所行之途程。有了數，則“中國號”的運動狀態可以詳悉無遺，而壓力的強弱，也可以精確的表達出來。惟其如此，然後壓力與運動之如何相應相倚，纔有認識之餘地。所以推本窮源，一切精密智識的可能，都根據於數的應用。

商 因此之故，我們講科學，宜從數入手。數，我也知道一些；有整數，有分數，還有所謂虛數。

教 先生，請慢些。數的來源與本質，是哲學家與算學家聚訟紛紜的問題，我現在姑且不談。我們知道，1, 2, 3, 4, 5, 6, ……等等都叫做正整數。任何兩個正整數相加，其結果——

商 又是一正整數。

教 但由一正整數減去一正整數，又是一正整數嗎？

商 這不盡然。如 2 減 5 是 -3 ， -3 却不是正整數，是負整數。

教 不錯。任何兩正整數相加，必爲一正整數；但由一正整數減去一正整數，其結果未必爲一正整數。因此之故，如果我們僅有正整數，換言之，如正整數之外，別無他數，則減法在算學中未必在在可能。如以 a, b 表示兩正整數，且假定 a 小於 b ，則 $a - b$ 絕無意義可言。所以要使減法在在得有結果，非創他種數不可。於是負整數及零遂因之而起。我們既假定 a 小於 b ，則 $b - a$ 顯然是一正整數，於是 $a - b = -c$ 就叫做負整數。又任何數減去其本身之後叫做零。自有了負整數及零之後，減法遂可以暢行無阻了。不過有一事不可不加以注意，我們既有負整數之後，若欲從 a 減去 b ，可不必應用減法的手續，祇把 $-b$ 加於 a 即得。由此看來，減法可以歸併於加法之下，減法本身可以不必用了。

商 這事有些希奇。我們欲使減法徹底的可能，纔不得不假定負整數的存在；如今有了負整數，減法却可省去不用了。

教 妙極。正整數，負整數與零，初看去好像平淡無奇，其實不然。算學中有一種理論，叫做整數論，專門研討這種數的性質及其所循的公例。整數論內容的豐富，推理的美妙，在各種理論中，罕有其比；從前德國大算學家高斯（Gauss）且尊之為“算學的女皇”。

商 先生，請你引我去見這位女皇何如？

教 未嘗不可。不過內容太豐富了，各種問題，層出不窮，即終身從事於此，也無不可。雖然如此，我們不妨略舉一二端，以明其所研究者究竟是些什麼問題。整數中有一種很重要的數叫做素數。素數是什麼？凡祇能被1及其本身除盡之數叫做素數，如1, 2, 3, 5, 7, 11, 13

商 還有17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59……

教 好了好了。長此下去，永無盡期，就此收場罷！

商 這是什麼意思？為何沒有盡期？

教 因為素數之多，無限無極，我生有涯，此數無盡。

商 先生，我還不明白呢。

教 當然一時不能明白。請你讓我來證明這件事。什麼叫做素數已經明白了。其他之數如60却是素數相乘之結果 $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ ，如 $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$ ，也是素數之積。

商 這麼看來，素數可說是一切整數之本。因為任何整數都是素數之積，因此都可用素數表達出來。

教 我却不敢貿然說這句話。何以呢？我們誠然知道 60 與 100 是素數之積，但這不過是兩個實例罷了。從這兩個實例，何以能推知一切整數都有這種性質呢？所謂一切整數都是素數之積，其意是說任何整數都是素數之積。細考這條定理的內容，可知其含有普遍性與必然性。所謂普遍，是徧攝無漏，所謂必然，是不容有異。但整數之多，我們既公認為無窮，故這條定理所包羅者也是無窮。因此之故，我們自不能以少數實例，作這條定理的根據。

商 我知道我的錯誤了。

教 你的揣想，未嘗不是。誠然，任何整數，都可析成素數之積。不過要認識這事之真確，非有一普遍的證明不可。今有一任何整數 m 於此， m 既非素數，那末，除 1 及其本身外必有其他一數如 a 可以除盡之； a 若非素數，則除 1 及其本身外，必有其他一數如 b 可以除盡之； b 若尚非素數，則除 1 及其本身外，必更有其他一數如 c 可以除盡之；循是以推，可得 $a, b, c, \dots$ 等數。但 b 小於 a , c 又小於 b , 故依前法類推遂得一羣漸漸變小之數 $a, b, c, \dots$ 。如是推至

最後，必可得一素數 p ，既得一素數 p ，遂不能再往下推了。於是 m 必可被 p 除盡，故得 $m = pm'$ 。若其中之 m' 已爲素數，則 m 已變爲素數之積，我們的證明，可稱圓滿。苟其不然，我們把 m' 再據前法析爲 $m' = p'm''$ ，故 $m = pm' = pp'm''$ 。其中之 p' 又爲一素數，而 m'' 又小於 m' 。於是依法推之，必可將任何整數 m 析成素數之積。

商 這倒容易明白。但是，先生前說素數之多不可限量，這件事又怎樣證明呢？

教 要證明這件事，可用算學中所常用的反證法。無論什麼事，可以如此，或非如此；如今天下雨或未下雨，又如素數之多爲無窮或非無窮，斷沒有第三種的可能。這是邏輯中的排中律，無論何人不能否認的。我們如要證明一件事果然是如此，可先假定其反面，在這反面的假定之下，加以種種推論；推論的結果若是一個矛盾，則其假定不能成立，所以這件事遂非如此不可。要而言之，我們要證明一條定理，僅在其反面的假定之下，找出一個矛盾就是了。若用邏輯學中三段論法表之，這反證法的推論經過大概如下：

大前提：這是如此或非如此。

小前提：苟非如此，則得一矛盾。

結論：這是如此：

其中大前提之真確，既爲人人所公認，所以我們祇求小前提之成立，就可依法獲得我們所欲求的結論。這是反證法的大概，因其簡明便利，所以應用很廣。既明以上所談，如我們要證明素數之多，不可量計，可先假定其反面，即假定素數之多，未必無盡，希望在這反面的假定之下，得一矛盾，藉以決定素數之多，必爲無窮，於是這條定理遂得證明了。據這反面的決定，素數之多，未必無盡，既非無盡，則此有盡的素數中，必有一最大者，我們把這有盡的素數一一依其大小排列於下：

$$2, 3, 5, 7, 11, \dots, p$$

列於最後的 p 爲最大之素數。我們試把這有盡的素數一一相乘，既乘之後再加以 1 得一整數 m ：

$$m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot p + 1$$

這個 m 既大於 p ，顯然不是素數。既非素數，則如前所言，必爲素數之積，換言之，非至少被一素數除盡不可。但求之上列的一切素數中，無一能將 m 除盡：於此可見這個 m 也是一個素數，所以 p 實非最大的素數，與所假定者適相矛盾。素數之多，無限無窮，於是遂得證明了。