西安交大考研

2011版 数学考研

新干线

线性代数

张永怀

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交通大学出版社考研图书网站 http://kaoyan.xjtupress.com

考研

2011年 数学考研

新干线

线性代数

2011版

数学考研新干线

线 性 代 数

张永怀

西安交通大学出版社

内容简介

本书各章均包括考试内容讲解、常考题型解题方法与技巧、练习题及练习题答案与提示。

不论是内容讲解，还是常考题型都特别注意各部分内容的联系与渗透，既注重介绍知识内容，又力图提高读者的应试水平。

本书既可作为考研基础、强化、冲刺等各阶段的参考书，也可作为非数学类专业的本、专科生的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学考研新干线　线性代数：2011版/张永怀编著．—西安：西安交通大学出版社，2010.4
（数学考研新干线）
ISBN 978-7-5605-3460-2

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①线性代数-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 033122 号

书　　名　数学考研新干线　线性代数(2011版)
编　　著　张永怀
责任编辑　叶涛

出版发行　西安交通大学出版社
　　　　　（西安市兴庆南路10号　邮政编码 710049）
网　　址　http://www.xjtupress.com
电　　话　(029)82668357　82667874(发行部)
　　　　　(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真　(029)82668280
印　　刷　三河市文阁印刷厂

开　　本　787mm×1 092mm　1/16　　**印张**　9.25　　**字数**　200千字
版次印次　2010年4月第4版　　2010年4月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5605-3460-2/O·320
定　　价　16.00元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
订购热线：(029)82665248　(029)82665249
投稿热线：(029)82664954
读者信箱：jdlgy@yahoo.cn

2011 版前言[①]

——从近几年的线性代数考研题谈起

无论是在本书中，还是在辅导课中，我都一再强调，线性代数的核心内容是矩阵、向量，必须将其方方面面都要理解掌握，只有这样才能对线性代数的整个内容做到驾轻就熟，现以近几年的线性代数试题为例，跟大家作个交流.

1.（2010 年数学一）

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 m 阶单位矩阵，则

(A) $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=m$　　(B) $r(\boldsymbol{A})=m,r(\boldsymbol{B})=n$

(C) $r(\boldsymbol{A})=n,r(\boldsymbol{B})=m$　　(D) $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=n$

解法一（直接法，利用“**七字方针**”即**矩阵越乘秩越小**以及矩阵的秩不超过其行数及列数中较小者，在模考点睛班中第五个例题与该题几乎一样，可见于冲刺五套卷的数二卷二(7)）

因 $m=r(\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{A})\leqslant m$，故 $r(\boldsymbol{A})=m$，类似可得 $r(\boldsymbol{B})=m$，选(A).

解法二（特例排除法，模考点睛班中给同学们也举过如下的例子）

取满足题目所有条件的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，显然，选项(B)、(C)及(D)对于这里的 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均不对，故选(A)(因为是单项选择题).

2.（2010 年农学联考）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&2&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，则行列式 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=$________.

解　（如果同学们对老师反复强调过的“**七字方针**”很熟的话，此题根本无需作数字运算）因 3×3 的矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的秩 $\leqslant r(\boldsymbol{A})\leqslant2$，故填 0.

3.（2010 年数学一、二、三、农学联考）

设 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，若 $r(\boldsymbol{A})=3$，则 $\boldsymbol{A}$ 相似于

(A) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

---

① 虽说是前言，但建议读者在全面复习过至少一遍之后再仔细看而且必须看，定会有极大收获.

解法一（要知道**实对称矩阵可对角化**以及**特征值、特征向量的性质**）因 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，故 $\boldsymbol{A}$ 的任意特征值 λ 满足 $\lambda^2+\lambda=0$，即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0 或 -1. 又 $r(\boldsymbol{A})=3$，且 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，故其相似对角阵的主对角元有 3 个 -1 和 1 个 0，选(D).

解法二（实际上，该题中条件“实对称矩阵”可以换成“可对角化矩阵”或者干脆都不要，照样可以得出结论，本书中例 5.18 就是几乎一样的题，而在强化班、冲刺班及模考点睛班都有**“抽象矩阵可否对角化”**的问题介绍，需**会运用简单的矩阵分块运算**）

因 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}$，令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，则易得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_j=(-1)\boldsymbol{\alpha}_j(j=1\sim4)$，又 $r(\boldsymbol{A})=3$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 中必有三个线性无关（当然非零），故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 -1 有三个线性无关的特征向量，显然 $\boldsymbol{A}$ 还有特征值 0，于是 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有四个线性无关的特征向量，$\boldsymbol{A}$ 可对角化，当然选(D).

解法三（在冲刺五套卷中，数三卷三(21)中有类似作法，仍无需实对称条件）因 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$，则 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\leqslant4$；又因 $r(-\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$，而 $(-\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$，则 $4=r(\boldsymbol{E})\leqslant r(-\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$，故 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=4$，已知 $r(\boldsymbol{A})=3$，于是 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=1$. 所以，$\boldsymbol{A}$ 有特征值 0，属于它有 $4-r(\boldsymbol{A})=1$ 个线性无关的特征向量（即是单特征值），$\boldsymbol{A}$ 有特征值 -1，属于它有 $4-r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=3$ 个线性无关的特征向量（即 -1 是三重特征值），于是 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有四个线性无关特征向量，可对角化，且 $\boldsymbol{A}$ 的相似对角阵为 $\mathrm{diag}(-1,-1,-1,0)$，故选(D).

注 显然，解法二、三更具一般性，且未用到实对称条件，或者说，该题若将实对称条件去掉的话，它的区分度会更大.

解法四（特例排除法）就取 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(-1,-1,-1,0)$，显然，$\boldsymbol{A}$ 满足题中所有条件，而选项(A)、(B)、(C)均不对，选(D).

4.（2010 年数学二、三、农学联考）

设向量组Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，下列命题中正确的是

(A) 若向量组Ⅰ线性无关，则 $r\leqslant s$　　(B) 若向量组Ⅰ线性相关，则 $r>s$

(C) 若向量组Ⅱ线性无关，则 $r\leqslant s$　　(D) 若向量组Ⅱ线性相关，则 $r>s$

解法一（直接法，**对向量组的秩及向量组间的线性表示关系与秩的关系**要清楚）

因向量组Ⅰ可由Ⅱ性线表示，故 $r(\text{Ⅰ})\leqslant r(\text{Ⅱ})\leqslant s$，而当Ⅰ线性无关时，$r(\text{Ⅰ})=r$，于是必有 $r\leqslant s$，选(A).

解法二（特例排除法）① 取Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,0)$，Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,0)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,0)$，$\boldsymbol{\beta}_3=(0,0,1)$，显然Ⅰ线性相关，且Ⅰ可由Ⅱ线性表示，而 $r=s=3$，则(B)不对；② 取Ⅰ与上述①中取法相同，而Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$，此时，Ⅱ线性无关，且Ⅰ可由Ⅱ线性表示，而 $r=3>s=2$，故(C)不对；③ 若刚好与②中取法相反，即Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0)$，Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,0)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,0)$，$\boldsymbol{\beta}_3=(0,0,0)$，则Ⅰ可由Ⅱ线性表示，且Ⅱ线性相关，而 $r=2<s=3$，(D)不对.

5.（2010 年数学一）

设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,1,a)^{\mathrm{T}}$，若由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 形成的**向量空间的维数**是 2，则 $a=$________.

解 依题意知，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$，于是**对矩阵**$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$**作初等行变换化为行阶梯形**，立即可得 $a=6$.

6.（2010 年数学二、三）

设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=2$，$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=$________.

解（强化班时讲过本书中例 1.16 等，特别强调过要**设法将两矩阵和的形式通过矩阵运算化成几个矩阵乘积的样子以便利用行列式性质**，并提醒同学切勿犯低级错误：$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}^{-1}|$）因 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{B}^{-1}$，故 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{B}^{-1}|=3\times2\times\dfrac{1}{2}=3$.

7.（2010 年数学一、二、三、农学联考）

(1)（数学一、二、三）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有两个不同的解，

（Ⅰ）求 λ 和 a 的值；（Ⅱ）求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

(2)（农学联考）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1&1\\0&a-1&0\\1&1&a\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$，已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有两个不同的解，求 a 的值及线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

解（**线性方程组的方方面面要么间接要么直接地必会考到**——这是张老师在讲课中的原话，此处，首先**要知道一个非齐次线性方程组有两个不同的解实际上就意味着** $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{A})<3$（未知量个数），即方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ **有无穷多组解**）

(1)（Ⅰ）对增广矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$ 作一系列初等行变换先化为行阶梯形：

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}\lambda&1&1&a\\0&\lambda-1&0&1\\1&1&\lambda&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&0&1\\\lambda&1&1&a\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+(-\lambda)r_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&0&1\\0&1-\lambda&1-\lambda^2&a-\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&0&1\\0&0&1-\lambda^2&a-\lambda+1\end{pmatrix}\xlongequal{\text{记作}}\boldsymbol{B}$$

因依题意必有 $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{A})<3$，故必有 $1-\lambda^2=0$，$a-\lambda+1=0$，于是 $\lambda=1$ 或 -1，而 $a=\lambda-1$. 又当 $\lambda=1$ 时，$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})>r(\boldsymbol{A})$，方程组无解，所以必有 $\lambda=-1$，则 $a=-2$，此时，$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{A})=2<3$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，将 $\lambda=-1$，$a=-2$ 代入矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中，于是得与原方程组同解的方程组：$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1\\-2x_2=1\end{cases}$，故方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $k(1,0,1)^{\mathrm{T}}+(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2},0)^{\mathrm{T}}$（$k$ 为任意常数）.

(2) 与(1)的解法完全类似可得 $a=-1$，则通解与(1)一样。

8.（2010 年数学一）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$（若中 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵）在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$，且 $\boldsymbol{Q}$ 的第三列为 $(\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,\dfrac{\sqrt{2}}{2})^{\mathrm{T}}$

（Ⅰ）求矩阵 $\boldsymbol{A}$；（Ⅱ）证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

解 （要知道 f 在正交变换下的标准形中各变元平方项前面的系数恰为 A 的特征值，而 Q 的各列分别是对应于各特征值的特征向量，这些知识点在讲课中都反复强调过）

（Ⅰ）（这实际上是反问题，在本书中例 5.22、5.28 都是十分类似的问题）

依题意知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=0$，且 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_3 的特征向量有 $\boldsymbol{q}_3=(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^{\mathrm{T}}$，现设 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量为 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，则它必与 $\boldsymbol{q}_3$ 正交，于是 $x_1+x_3=0$，得 $\boldsymbol{\xi}_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，显然 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 已正交，再单位化得 $\boldsymbol{q}_1=\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{q}_2=(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2})^{\mathrm{T}}$，于是取正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3)$，则必有 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(1,1,0)$，于是得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{q}_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

（Ⅱ）（需了解实对称矩阵正定的常用充要条件之一：所有特征值均为正数，当然首先还要了解特征值的性质）由（Ⅰ）知实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,1,0，于是显然仍为实对称矩阵的 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为 2,2,1 均为正数，故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 正定。

注 当然，因在（Ⅰ）中已将 $\boldsymbol{A}$ 求出，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 也已数字化，可利用霍尔维茨定理计算其各阶顺序主子式均为正数，显然要比考察特征值繁琐一些.

9.（2010 年数学二、三）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}$，有正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵，若 $\boldsymbol{Q}$ 的第一列为 $\boldsymbol{q}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，求 $a,\boldsymbol{Q}$.

解 （此题与上一题有类似的地方）设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，依题意知 $\boldsymbol{Q}$ 的 1～3 列分别为 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的特征向量，于是有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_1=\lambda_1\boldsymbol{q}_1$，即

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\text{亦即}\begin{cases}-2+4=\lambda_1\\-1+6+a=2\lambda_1\\4+2a=\lambda_1\end{cases}，\text{由此得 }\lambda_1=2,a=-1.$$

将 $a=-1$ 代入 $\boldsymbol{A}$ 中，由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 得 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=-4,\lambda_3=5$. 又由 $(\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得一非零解 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，单位化得 $\boldsymbol{q}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，再由 $(\lambda_3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得一非零解 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，单位化得 $\boldsymbol{q}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，于是得正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3)$.

注 解答中略去了求特征值 λ_2,λ_3 及特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 的具体过程，读者不妨一试，必会觉得该题运算量稍微偏大.

10. (2010 年农学联考)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & a\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$，已知 $\lambda_1=6$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值

(Ⅰ)求 a 的值；(Ⅱ)求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值和特征向量.

解 (**要熟知基本概念**：$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 的所有根即为 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值，而 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的所有非零解即为 $\boldsymbol{A}$ 属于 λ 的所有特征向量)

(Ⅰ) 依题意有 $|6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，由此得 $a=-2$.

(Ⅱ) 将 $a=-2$ 代入 $\boldsymbol{A}$ 中，并由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 得 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值 $\lambda_1=6,\lambda_2=\lambda_3=2$. 由 $(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得其基础解系 $(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$，故 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 的所有特征向量为

$$k(1,-2,3)^{\mathrm{T}}\text{(其中 } k \text{ 为任意非零常数).}$$

由 $(\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得其基础解系 $(1,-1,0)^{\mathrm{T}},(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}$ 属于 2 的所有特征向量为

$$k_1(1,-1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(1,0,1)^{\mathrm{T}}\text{(其中 } k_1,k_2 \text{ 为不同时为零的任意常数).}$$

11. (2009 年数学一)

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一组基，则由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵为

(A) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$

解法一(直接法，要**会运用简单的矩阵分块运算**并对矩阵运算及求逆很熟)因

$(\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\xlongequal{\text{记作}}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}_1$，$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=$

$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\xlongequal{\text{记作}}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}_2$，故 $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3)$

$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$，所以所求过渡矩阵 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}$，选(A).

注 当然，如果观察能力很强，直接可得 $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)$

$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}$.

解法二(试算排除法)以 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3)$ 与四个选项中每个矩阵的第 1 列相乘之和，立即

可排除选项(B)、(C)和(D).

12. (2009 年数学二、三)

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{P}$ 为 3 阶矩阵,且 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为

(A) $\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

解　(要会运用简单的矩阵分块运算)因 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xlongequal{\text{记作}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}$,故 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=$

$$(\boldsymbol{P}\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,选(A).

注　此处 $\boldsymbol{C}$(及 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$)是初等矩阵 $\boldsymbol{E}(21(1))$($\boldsymbol{E}(12(1))$),其左乘、右乘某矩阵的意义见本书相关内容.

13. (2009 年数学一、二、三)

$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 2 阶矩阵,$|\boldsymbol{A}|=2$,$|\boldsymbol{B}|=3$,则 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为

(A) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&3\boldsymbol{B}^*\\2\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{B}^*\\3\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&3\boldsymbol{A}^*\\2\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{A}^*\\3\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$

解法一(直接法,要熟悉关于矩阵的**"明星公式"**及分块矩阵之逆的公式)因

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}^*=\left|\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\right|\boldsymbol{E}\xlongequal[\text{例 1.8}]{\text{参见本书}}(-1)^{2\times2}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{E}=6\boldsymbol{E}\text{,故}\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}^*=6\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}^{-1}$$

$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&6\boldsymbol{B}^{-1}\\6\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,又 $\boldsymbol{B}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{B}|}\boldsymbol{B}^*$,$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$,所以 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{B}^*\\3\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,选(B).

解法二(试算排除法)以 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 与四个选项中的矩阵分别相乘,即可排除(A)、(C)和(D).

14. (2009 年数学一、二、三)

(1) 若 3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$,满足 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=2$,则矩阵 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的非零特征值为________.(数学一)

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 3 维列向量,若 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=$________.(数学二)

(3) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,0,k)^{\mathrm{T}}$，若 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{bmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，则 $k=$________.(数学三)

解(要熟悉秩为 1 的矩阵，本书中有重要结论：例 2.5、例 3.29 和例 5.1，辅导课上也讲过，且有原话"不仅张老师对秩为 1 的矩阵感兴趣，命题组的专家也感兴趣")

(1) 因 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=2$，故 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为非零列向量，所以 $r(\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}})=1$(例 3.29)，于是 $\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的特征值为 $\lambda_1=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$(例 2.5)$=2$，$\lambda_2=\lambda_3=0$(例 5.1).

(2) 因 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，则 $r(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})=r\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=1$，且 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})=$

$\mathrm{tr}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=2$(参见解(1)).

(3) 显然 $r(\boldsymbol{\alpha\beta})^{\mathrm{T}}=1$，且 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})=3$，即 $1+k=3$，故 $k=2$.

15.(2009 年数学一、二、三)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$，

(Ⅰ) 求满足 $\boldsymbol{A\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$；(Ⅱ) 对(Ⅰ)中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$，证明：$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

(Ⅰ) **解　求解非齐次线性方程组　$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\xi}_1$ 及 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1$ 即可得所有 $\boldsymbol{\xi}_2$ 及 $\boldsymbol{\xi}_3$**；

因$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\xi}_1)\xrightarrow[\text{初等变换}]{\text{一系列行}}\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，故 $\boldsymbol{\xi}_2=k\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}$　(k 为任意常数)；

因$(\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{\xi}_1)\xrightarrow[\text{初等变换}]{\text{一系列行}}\begin{bmatrix}2&2&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，故 $\boldsymbol{\xi}_3=k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{bmatrix}$　(k_1,k_2 为任意常数).

(Ⅱ) **证法一(要知道三个 3 维向量线性无关的充要条件是它们构成的 3 阶方阵的行列式非零)**因 $|(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)|=\begin{vmatrix}1&\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}&-k_1+\frac{1}{2}\\-1&-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}&k_1\\2&k&k_2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\neq0$，故 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

证法二(当注意到 $\boldsymbol{A\xi}_1=\boldsymbol{0}$ 时，利用定义)设有系数 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{0}$，则 $k_1\boldsymbol{A\xi}_1+k_2\boldsymbol{A\xi}_2+k_3\boldsymbol{A\xi}_3=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$，即 $k_2\boldsymbol{\xi}_1+k_3\boldsymbol{A\xi}_3=\boldsymbol{0}$，于是又有 $k_2\boldsymbol{A\xi}_1+k_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$，即 $k_3\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{0}$，故必有 $k_3=0$，于是 $k_2=0$，最后有 $k_1=0$，故对(Ⅰ)中任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$，均有 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$

线性无关.

16.（2009 年数学一、二、三）

设三元实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$

（Ⅰ）求 f 的矩阵的所有特征值；（Ⅱ）若 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值.

解　（Ⅰ）f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&0&1\\0&a&-1\\1&-1&a-1\end{pmatrix}$，（求这种含参数的 3 阶矩阵的特征值，计算行列式 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 时要尽量利用行列式性质而非对角线法则）

$$\begin{vmatrix}\lambda-a&0&-1\\0&\lambda-a&1\\-1&1&\lambda-a+1\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2}\begin{vmatrix}\lambda-a&\lambda-a&0\\0&\lambda-a&1\\-1&1&\lambda-a+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a)\begin{vmatrix}1&1&0\\0&\lambda-a&1\\-1&1&\lambda-a+1\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+r_1}(\lambda-a)\begin{vmatrix}1&1&0\\0&\lambda-a&1\\0&2&\lambda-a+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a)[(\lambda-a)^2+(\lambda-a)-2]=(\lambda-a)[\lambda-(a-2)][\lambda-(a+1)]$$

（此处将 $\lambda-a$ 作为整体看待，类似问题在冲刺班的冲刺练习题三、5 中介绍过），所以 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值为 $a,a-2,a+1$.

（Ⅱ）因 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，故 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值必有两个为正数，一个为零，而 $a-2<a<a+1$，所以，必有 $a=2$.

注　如果没注意到 $a-2<a<a+1$，则可利用笨办法对 a 进行取值试探.

17.（2009 农学联考）

矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&a+2&a+1\\-1&a-2&2a-3\end{pmatrix}$，若有 3 阶非零矩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，

（Ⅰ）求 a 的值；（Ⅱ）求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

解　（Ⅰ）（**关于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 必须有两点认识**：①右矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的每个列向量均为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量，②$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant\boldsymbol{A}$ 的列数（或 $\boldsymbol{B}$ 的行数），这两点不仅在本书中，而且在辅导课上均反复强调运用过）因 $\boldsymbol{A}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&a&a\\0&a&2a-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&a&a\\0&0&a-2\end{pmatrix}$，而依题意有 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant3$，$r(\boldsymbol{B})\geqslant1$，则 $r(\boldsymbol{A})\leqslant2$，故必有 $a=2$ 或 $a=0$（**要会利用初等行变换化矩阵为行阶梯形，以便了解其秩**）.

（Ⅱ）当 $a=2$ 时，由(1)知 $\boldsymbol{A}\xrightarrow[\text{初等变换}]{\text{经行}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$（行最简形），此时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $k(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$（k 为任意常数）；

当 $a=0$ 时，由(1)知 $\boldsymbol{A}\xrightarrow[\text{初等变换}]{\text{经行}}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，此时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $k(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$（k

为任意常数).

18.(2009 农学联考)

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,1,−2,对应的特征向量依次为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$

(Ⅰ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$;(Ⅱ)求 $\boldsymbol{A}^{2009}$.

解 (Ⅰ)(要会运用简单的矩阵分块运算,**会利用初等行变换求方阵的逆**)

因$(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,-2\boldsymbol{\alpha}_3)$,故 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$

(此手法辅导课中经常强调,本书中也有许多例题),又因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 显然线性无关,而 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值−2 的特征向量,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,于是 3 阶方阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$可逆,

则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$,又因$(\boldsymbol{P},\boldsymbol{E})\xrightarrow[\text{初等行变换}]{\text{经一系列}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0\\0&1&0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$,故

$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$,所以,$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&\frac{3}{2}\\0&1&0\\\frac{3}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

(Ⅱ)(当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化时,即有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$,于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$,其幂有方便的计算方法:$\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}\cdots\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}=\boldsymbol{P\Lambda}^m\boldsymbol{P}^{-1}$)由(1)知 $\boldsymbol{A}^{2009}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}^{2009}\boldsymbol{P}^{-1}$

$=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(-2)^{2009}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-2^{2008}&0&\frac{1}{2}+2^{2008}\\0&1&0\\\frac{1}{2}+2^{2008}&0&\frac{1}{2}-2^{2008}\end{pmatrix}$.

19.(2008 年数学一、二、三、四)

已知非零矩阵 $\boldsymbol{A}$,满足 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$,$\boldsymbol{E}$ 是与 $\boldsymbol{A}$ 同阶的单位矩阵,则( ).

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆 (B) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆

(C) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆 (D) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆

解法一(直接法,需对矩阵运算及逆矩阵概念很熟,本书中有类似的例子,如例 2.25、例 2.28)依题意有 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^3=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)$,则 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆;又 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^3=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)$,则 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 也可逆,故选(C).

解法二(特例排除法,需记住一些特殊矩阵,并用来进行逻辑推断)取三阶位移矩阵(参见本书例 2.23)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,显然 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$,而 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$;又 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$及 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}=$

$\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}$显然均可逆;因本题是单项选择题,即四个选项中,有且仅有一个是正确的,而对于现今给定的满足已知条件的矩阵 A 选项(A)、(B)、(D)均不对,故只有选(C).

解法三(利用特征值,需会利用课程的特点——各部分内容经常是互渗的)因 $A^3=O$,则 A 的任意特征值 λ 必满足 $\lambda^3=0$,于是 A 只有特征值 $\lambda=0$,故矩阵 $E-A$ 只有特征值 $1-0=1$,$E+A$ 只有特征值 $1+0=1$,即 $E-A$、$E+A$ 均可逆.

20. (2008 年数学二、三、四)

矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$,则在实数域上与 A 合同的矩阵为( ).

(A) $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$

解(需知道**两个实对称矩阵合同的充要条件**是它们的正、负特征值的个数要对应相同)因 $|A|=-3<0$,则 A 恰有正、负特征值各一个,而 $\begin{vmatrix}-2&1\\1&-2\end{vmatrix}=3>0$,$\begin{vmatrix}2&-1\\-1&2\end{vmatrix}=3>0$,$\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=3>0$,故(A)、(B)、(C)均不对,选(D)(实际上,因 $\begin{vmatrix}1&-2\\-2&1\end{vmatrix}=-3<0$,则矩阵 $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$恰有正、负特征值各一个).

21. (2008 年数学二、三、四)

设三阶矩阵 A 有特征值 $-1,1$,对应的特征向量分别为 α_1,α_2,向量 α_3 满足 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$.

(Ⅰ)证明:$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关;(Ⅱ)令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,求 $P^{-1}AP$.

(Ⅰ)**证法一**(利用定义)设有系数 k_1,k_2,k_3 使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$,以 A 左乘等式两边,并注意到 $A\alpha_1=-\alpha_1$,$A\alpha_2=\alpha_2$,且 α_1,α_2 线性无关,则有 $-k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_2+k_3\alpha_3=0$,两式相减得 $2k_1\alpha_1-k_3\alpha_2=0$,故 $k_3=0,k_1=0$,于是 $k_2\alpha_2=0$,所以 $k_2=0$,则知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

证法二(利用反证法)假设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关,因由题设知 α_1,α_2 必线性无关,则必有 α_3 可由 α_1,α_2 线性表示(且表示法唯一),设 $\alpha_3=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$,于是 $A\alpha_3=k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2$,即 $\alpha_2+\alpha_3=-k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$,亦即 $\alpha_3=-k_1\alpha_1+(k_2-1)\alpha_2$,而 $k_2=k_2-1$ 显然不可能,故与上述表示法唯一相矛盾,所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 必线性无关.

(Ⅱ)**解**(要会运用简单的矩阵分块运算)因 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$(此中手法辅导课中经常强调,本书中也有许多例题,如例 1.13、例 1.14、例 3.10、例 3.21、例 5.6 等),又由(Ⅰ)知 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$可逆,故 $AP=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,所以

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

22.（2008 年数学一、二、三、四）

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ a^2 & 2a & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & a^2 & 2a & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^2 & 2a & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^2 & 2a\end{pmatrix}$

满足 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$.

（Ⅰ）证明：$|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$；（Ⅱ）$a$ 为何值时，方程组有唯一解，求 x_1；（Ⅲ）a 为何值时，方程组有无穷多解，求通解.

解（Ⅰ）属于矩阵行列式的计算，且是三对角形（参见本书例 1.12）

证法一（化为上三角形）

$$|\boldsymbol{A}|\xlongequal[\substack{r_3-\frac{2}{3}ar_2\\ \vdots\\ r_n-\frac{n-1}{n}ar_{n-1}}]{r_2-\frac{a}{2}r_1}\begin{vmatrix}2a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{4}{3}a & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{n-1}{n-2}a & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{n}{n-1}a & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{n+1}{n}a\end{vmatrix}\xlongequal{\text{上三角形}}(n+1)a^n$$

证法二（展开递推）记 $|\boldsymbol{A}|=D_n$，按第 1 列展开，得

$D_n=2aD_{n-1}+a^2(-1)^{2+1}\widetilde{D}\xlongequal{\widetilde{D}\text{ 按第 1 行展开}}2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}$，于是

$D_n-aD_{n-1}=a(D_{n-1}-aD_{n-2})=\cdots=a^{n-2}(D_2-aD_1)=a^n$，则

$D_n=a^n+aD_{n-1}=a^n+a(a^{n-1}+aD_{n-2})=\cdots=(n-1)a^n+a^{n-1}D_1=(n+1)a^n$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，当 $a\neq0$ 时，$|\boldsymbol{A}|\neq0$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，此时方程组有唯一解.

解法一（利用 Cramer 法则）因将 $|\boldsymbol{A}|$ 中的第 1 列换为 $\boldsymbol{B}$ 时的行列式按第 1 列展开即得 D_{n-1}，而由（Ⅰ）知，$D_{n-1}=na^{n-1}$，故由 Cramer 法则得

$$x_1=\frac{D_{n-1}}{|\boldsymbol{A}|}=\frac{na^{n-1}}{(n+1)a^n}=\frac{n}{(n+1)a}.$$

解法二（利用伴随矩阵）此时，方程组有唯一解 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}$

$$=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{n1}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix}A_{11}\\ \vdots\\ A_{1n}\end{pmatrix}，\text{故 } x_1=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}A_{11}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}D_{n-1}.$$

解法三（利用矩阵分块运算及行初等变换，当考生万一忘记了 Cramer 法则，也没想到利用伴随矩阵，但若对矩阵、向量很熟，则下面的解法虽较解法一、二复杂得多，但却也充分展现出**线性代数形式规律的美感**）此时，方程组的唯一解为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，现将 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 按列分块，记为 $\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，则方程组的解为

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1\overset{\text{记作}}{=\!=\!=}\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}，\text{于是知 } x_1=a_{11}.$$

现对矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})$ 作一系列行初等变换最终可得 $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1})$，由（Ⅰ）的证法一知，对 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})$ 先作行初等变换（有先后次序）：$r_2-\frac{a}{2}r_1,r_3-\frac{2}{3}ar_2,r_4-\frac{3}{4}ar_3,\cdots,r_n-\frac{n-1}{n}ar_{n-1}$，则其中 $\boldsymbol{E}$ 的第 1 列会变为

$$\boldsymbol{\xi}=(1,-\frac{1}{2}a,\frac{1}{3}a^2,-\frac{1}{4}a^3,\cdots,(-1)^{n-2}\frac{1}{n-1}a^{n-2},(-1)^{n-1}\frac{1}{n}a^{n-1})^{\mathrm{T}}$$

再作行初等变换：$\frac{1}{2a}r_1,\frac{2}{3a}r_2,\frac{3}{4a}r_3,\frac{4}{5a}r_4,\cdots,\frac{n-1}{na}r_{n-1},\frac{n}{(n+1)a}r_n$，则 $\boldsymbol{\xi}$ 会变为：

$$\boldsymbol{\eta}=(\frac{1}{2a},-\frac{1}{3},\frac{1}{4}a,-\frac{1}{5}a^2,\cdots,(-1)^{n-2}\frac{1}{n}a^{n-3},(-1)^{n-1}\frac{1}{n+1}a^{n-2})^{\mathrm{T}}$$

最后作（有次序）：$r_{n-1}-\frac{n-1}{na}r_n,r_{n-2}-\frac{n-2}{(n-1)a}r_{n-1},\cdots,r_2-\frac{2}{3a}r_3,r_1-\frac{1}{2a}r_2$，此时，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})$ 中的 $\boldsymbol{A}$ 已化为 $\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{\eta}$ 就变为 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第 1 列 $\boldsymbol{\alpha}_1$，得到过程如下：

$a_{n1}=(-1)^{n-1}\frac{1}{n+1}a^{n-2},a_{n-1,1}=(-1)^{n-2}\frac{1}{n}a^{n-3}-\frac{n-1}{na}a_{n1}=(-1)^{n-2}\frac{2}{n+1}a^{n-3},a_{n-2,1}=(-1)^{n-3}\frac{1}{n-1}a^{n-4}-\frac{n-2}{(n-1)a}a_{n-1,1}=(-1)^{n-3}\frac{3}{n+1}a^{n-4},\cdots,a_{41}=(-1)^3\frac{n-3}{n+1}a^2,a_{31}=\frac{1}{4}a-\frac{3}{4a}a_{41}=(-1)^2\frac{n-2}{n+1}a,a_{21}=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3a}a_{31}=(-1)^1\frac{n-1}{n+1}$，最终有 $a_{11}=\frac{1}{2a}-\frac{1}{2a}a_{21}=\frac{n}{(n+1)a}$.

（Ⅲ）**解** 显然，当 $a=0$ 时，$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})=n-1<n$，方程组有无穷多解. 此时，原方程组即为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}，\text{设 } x_1 \text{ 为任意常数，此即为通解.}$$

张永怀

2010.2

第1版前言

本书的终极目标是使读者朋友能在较短的时间里大幅度提高线性代数知识水平及应试能力。

每一位学习过线性代数课程的朋友可能都会有一个共同的感受：内容少、较抽象、联系紧、频渗透。对，正因如此，可能有很多朋友感觉“害怕”线性代数，但考试中约22%的份额又不容忽视。

编者首先告诉朋友们，行列式是几乎贯穿整个线性代数内容的工具，经常会用到，但对非数学类的，不会要求对行列式有很高的计算及应用技巧；矩阵及向量是线性代数的基础核心内容，掌握好这两部分内容是至关重要的，由此，作为线性代数重要内容的线性方程组的理论则迎刃而解；最后，特征值（特征向量）及二次型实际是前面内容的应用。

编者依据考试大纲及在考研辅导班授课的经验，并结合近年来的命题特点编写了此书。本书从头至尾都尽可能多地关注各部内容的联系与渗透，对于很多典型题经常给出几种分析解法，相信通过这样的训练，必能使读者在做题时能迅速给出最有效快捷的解题方法，最终取得好成绩。

感谢西安交通大学出版社的支持，对亲人及朋友的勉励也深表谢意。最后，欢迎广大读者朋友不吝指正，以使本书日臻完善！

张永怀

2007年3月底于西安交通大学