

潜心22年打造精品 真情奉献 来年圆梦



模拟卷 2份
综合题 40题

中考真题 800 题

B卷 400 题

A卷 1200 题

55份
测试卷

中考分数

150

135

120

数学中考

修订版

复习新编

主编◎周继光

上海教育出版社

精编中考复习丛书

数学中考复习新编

(修订版)

主编 周继光

上海教育出版社

修 订 说 明

《数学中考复习新编》自 2006 年初版以来,由于它适应上海自 2005 年推出的初中学业考试的要求,在广大初中毕业班师生进行中考总复习时起到了“目标明、重点显、费时少、反馈快、负担轻、效率高”等积极的效果,受到读者的青睐和好评,在此谨表示衷心的感谢。

从 2009 年开始,上海初中生已全部使用根据“二期课改”制定的新课程标准编写的九年义务教育新教材,上海市教育考试院根据这个变化,出版了《上海市初中毕业统一学业考试手册(试验本)》(以下简称《考试手册》)。为了使本书符合《考试手册》的有关精神,更加贴近今后学业考试数学卷的命题要求,应读者要求,在保持原书“基础牢、信息广、习题精、变式多”等特色的基础上,着重在以下几方面作了修订。

1. 根据新课程标准和新编教材的要求,增加了“整数与整除”、“概率”、“图形运动”和“平面向量”等内容,删去了“一元二次方程根与系数的关系”以及“二次函数”、“直线和圆”中的部分内容,并重新编排了原书的目录,使本书更适合总复习的要求。

2. 根据《考试手册》中关于具体考试内容及规定的规定,参照市教委教研室编写的《上海市初级中学数学学科教学基本要求》(以下简称《基本要求》)中的“内容要目”与“基本要求”,对原书各单元的“复习目标”逐一进行了认真的疏理,力求科学地把握复习要求的深广度,使它更加符合教学和考试的要求,使数学中考所涉及的知识点能够更加清晰和具体,便于读者有计划、有重点地进行总复习。

3. 为了增加本书的信息量,对原书的“针对训练”进行了较大的变动,调换了大部分原有的训练题,以补充近年来上海和全国各省、市学业考试数学卷中的最新试题(对其中近两三年的中考试题还注明了考试年份和省、市名),帮助读者更好地了解上海和全国各省、市学业考试对该单元内容考查的重点和热点。为了使这些考试信息更加有效,一方面,我们注意精选试题,保证选题的典型性和代表性,使它具有较高的思维价值;另一方面,对其中有的试题我们还根据上海学业考试的要求作了一些变动,使它既保留各省、市试题的特色,又能贴近上海中考的要求,便于读者更好地把握中考的方向,提高总复习的针对性。

4. 中考“压轴题”历来备受关注,为应对上海中考数学卷中压轴题的变化,本书对“综合练习题”作了较大的增、删与变动,对原来的 40 道综合题仅保留了其中的 22 题,按前面“针对训练”的选题原则补充了 18 道上海和全国各省、市中

考数学试卷中的压轴题,根据近年上海数学试卷压轴题的命题风格,作了适当的变动.此外,为了提高总复习的有效性,对个别题目,改变了压轴题由3个小题构成的形式,减少了小题数,提高了题目的综合程度.我们在选题时,还注意体现了所选题的“开放性”和“探索性”,以帮助读者更好地领会“形数结合”、“分类讨论”、“运动、变换”等基本数学思想,提高解综合题的能力.

5. 为更加方便读者使用本书进行基础测试,将本书55份基础测试卷,按顺序统一编号,另行装订成册.为便于答题,大部分试卷都适当留有空白处.为便于反馈,每份试卷末都附上了“测试情况统计表”(使用说明见本书第178页).目的是让学生和老师都能及时了解测试情况,看到复习的成果,增强信心,提高实效.

在本书修订前,我去拜访了我的恩师——本书的主审姚善源先生.他的一席话对我颇有启发.他说,抓“双基”并不容易,要“落实”更难.这次修订首先要搞清楚什么是双基,要设法把最基础的东西在本书中真正落实.其次,抓双基,并不是提倡不动脑筋,越容易越好.“容易题”要多选,但要“举一反三”,揭示规律;更要在“举一反三,多思出巧”上下功夫,体现出本书“多变式,促思维”的特色.现在,本书的修订即将脱稿,可以毫不夸张地说,从本书的设计、编写和修订的过程中所显露的特色里,体现出我对数学与教学,尤其是对复习教学的一些认识,大多得益于姚善源先生长达近五十年的悉心培养和指导.回想起1959年我有幸成为姚先生的学生以来深切体会到先生教数学的最大特点是教人求真,“授人以渔”.他“逼”着我练“基本功”,做一些似乎是“类似”的题,还时常“逼”着我独立思考,从思考中获取方法,认识规律,使我受益匪浅.直至我毕业后留校当了老师,他仍然是我教学的导师,他和教研组里的一些老教师手把手地指导我备课、上课、批改作业、辅导学生,并逐步成为一名好教师.1978年,年仅33岁的我能够成为特级教师,全靠先生的栽培.没有姚先生的点拨、引导和呵护,不可能有我在教学上的发展,我也不可能著书立说,把本书奉献给读者.在本书修订之际,恰逢姚善源先生85岁生日和从教60年的喜庆,谨在此对姚善源先生表示真挚的祝贺和衷心的感谢.

此次修订,虽然曾多次征求过一些专家和教师的意见,但由于时间紧迫,对《考试手册》与《基本要求》的学习、研究还不够深入,难免会有不足之处,企盼专家、同行和广大教师批评指正.

本次修订,王萍萍、叶筱斐、徐颖浩、姚远等在周继光工作室进修的一些同志参与了部分工作,上海教育出版社的编辑审读了修订稿并提出了一些有益的建议,在此一并表示衷心的感谢.

周继光

2009年7月28日

前 言

“如何进行初中数学总复习才能减轻负担、提高效率?”这是广大师生、家长极为关注的问题.围绕这个课题,我们曾进行了长达二十多年的探索、研究和实践.在课题开始时,我们以当时的教学大纲、教材为依据,编写了《初中数学基础测试》试卷“四十份”,并在几所不同类型的中学近八百名学生中试用.对于每次测试,我们都抽样 250 份试卷进行分析和统计.实践证明,这套测试比较贴近上海市初中毕业生的实际水平,既能够比较全面地检查学生掌握基础知识和基本技能的水平,衡量他们是否具备解决问题的能力的基本能力,又便于发现学生在以往学习中知识和能力上的缺陷,使复习取得目标明、花时少、负担轻、收效大的效果.1988 年在上海教育出版社数编室的支持下,我们出版了《初中数学基础测试与训练》,后更名为《初中数学复习》.

近年来上海深入进行了课程和考试制度的改革,随着课程标准的变化,教材与考试要求有过多次调整.其间周继光同志又先后八次参加了上海市中考命题和审题工作,对本课题作了进一步的实践和研究,每一次研究后都对本书作了补充和完善,在广泛听取意见的基础上,先后再版六次,印数达百万册之多,受到广大师生的欢迎,多年来本书一直是初三师生复习数学的首选,取得了很好的社会声誉.

现在上海正在进行“二期课改”.从 2005 年起,上海中考也将“毕业考”与“升学考”合并,推出新的学业考试办法,缩短了考试时间,减少了题量,控制了试题的难度.在新形势下,为了更好地适合初三复习数学的需要,我们以《初中数学复习》为基础,根据九年制义务教育新课程标准数学学科的教学要求,将该书改编为精编中考复习丛书《数学中考复习新编》.

本书的每一单元分“复习目标”、“知识要点”、“基础测试”、“测试讲评”和“针对训练”五个栏目.

“复习目标”,根据现行课程标准的基本要求,提出具体、明确、可测的目标,以便于学生掌握复习的要求和范围.

“知识要点”,主要是对基础知识,包括定义、定理、公式、法则、性质等作较系统的整理,帮助学生回顾掌握重要的基础知识.

“基础测试”,按照教学目标中识记、理解、简单应用的水平要求,以客观性试题为主进行设计.每份试卷分 A、B 两组,A 组试题体现了初中数学的基本要求,题目难度不大,有利于增强学生学习的信心,调动学生复习的积极性.试题

突出了基础知识、基本技能、基本方法的考查,便于全面检查学生掌握“三基”的情况. B组试题体现了知识的基本联系,以便检查学生的理解水平和思维能力. 每份试卷的答题时间为30~45分钟. 同时,每份试卷都给出A、B两组的评分, A组满分100分, B组满分50分,以便测试后根据学生的得分与答卷时间,对学生的数学水平作出评价,确定复习的重点内容,并进行针对性的复习.

“测试讲评”,对学生测试中的常见错误进行分析讲评,帮助学生找出错误的原因,并指出纠正方法. 同时,对测试题所涉及的有关解题方法进行归纳和整理,力求起到总结规律、点拨思维的作用.

“针对训练”,选编适量典型性、代表性、思考性较强的题目,供学生进行针对性复习与巩固时选用.

在测试题的选取及复习内容安排上,本书突出了近年来上海市中考数学学科考查的八个重点内容:代数部分中,“数和式”是基础,“统计初步”、“方程与不等式”、“函数”是重点;几何部分中,“三角形和四边形”是基础,“比例和相似”、“锐角三角比”、“圆”是重点. 最后,本书第九部分“初中数学综合应用”,选编了40道综合性较强的练习题和两套中考模拟测试题供学生选用. 其中综合练习题供学生在达到基本要求后进行思考练习,以便进一步培养学生综合应用初中数学知识分析、解决问题的能力.

本书另附习题的答案或提示(见附录),供读者随时检查测试或练习的效果.

使用本书进行中考数学复习时,可根据学校或班级的实际情况灵活安排. 例如:一种安排是在新课结束前,先用本书的“基础测试”的A组试卷对学生进行全面的测试,并对测试的情况分析、整理,作好记录,然后在新课结束后,根据测试的情况,对学生进行有针对性的重点复习. 这样安排,可以使复习时间比较充裕,但测试与复习相隔时间较长,分析讲评和训练的针对性不易被学生接受. 另一种安排是按本书的顺序,一单元一单元地复习,先明确复习目标,回顾知识要点,然后测试、讲评与训练. 这样安排,目标明确,系统性强,但花时较多.

本书由周继光同志任主编.

由于编者水平有限,难免有许多不足之处,祈盼专家、同行及广大师生批评指正.

本书编写组

2006年5月

目 录

一、实数	1
§ 1 整数与整除	1
§ 2 有理数与无理数	6
二、代数式	17
§ 1 整式	17
§ 2 因式分解	23
§ 3 分式	27
§ 4 二次根式	32
三、方程和不等式	37
§ 1 一元一次方程与一元一次不等式(组)	37
§ 2 一元二次方程	42
§ 3 分式方程与无理方程	45
§ 4 方程组	48
四、函数	52
§ 1 函数的概念	52
§ 2 正(反)比例函数与一次函数	56
§ 3 二次函数	62
五、概率和统计初步	67
§ 1 概率初步	67
§ 2 统计初步	73
六、三角形和四边形	83
§ 1 相交线与平行线	83
§ 2 三角形	88
§ 3 四边形	95
七、相似形	103
§ 1 比例线段	103
§ 2 相似三角形	108
八、锐角三角比	115
§ 1 锐角三角比	115
§ 2 解直角三角形	120
九、圆和正多边形	126
§ 1 圆和正多边形	126
§ 2 点和圆、直线和圆、圆和圆的位置关系	132

十、图形运动和平面向量.....	138
§ 1 图形运动和基本作图	138
§ 2 平面向量	147
十一、初中数学综合应用.....	156
§ 1 综合练习题	156
§ 2 中考模拟试题	167
附录 1 对中考数学总复习的几点建议	173
附录 2 基础测试(卷 1~卷 55)	177
附录 3 答案或提示	333

一、实数

§1 整数与整除

【复习目标】

1. 知道整数的意义;了解整数、正整数、自然数三者之间的从属关系.
2. 知道整除的意义;理解因数、倍数的概念;掌握一个正整数能被 2、5 整除的特征.
3. 会区分一个正整数是奇数还是偶数、是素数还是合数.
4. 会求一个已知正整数的因数和倍数;会求两个已知正整数的公因数和公倍数.
5. 知道素因数的含义;会用短除法把一个正整数分解素因数.
6. 知道最大公约数和最小公倍数的含义;会求两个正整数的最大公因数和最小公倍数.

【知识要点】

1. 自然数

(1) 概念

在小学里,自然数概念的形成是从计数开始的.我们在数物体个数的时候,用 1、2、3、… 这些数来表示物体的个数,如果遇到一个物体也没有,用数“0”表示.在数字里,我们把在数数过程中自然产生的数称为自然数.除了表示物体的个数外,自然数还可以用来表示事物的次序.

(2) 性质

① 自然数列是无穷尽的.

“1”是自然数的单位,除“0”外,任何自然数都是由若干个 1 组成的.自然数从 0 开始,逐次加 1,就能得出有头无尾的一串数:0、1、2、3、…、10、…、100、…、1000、…,在这一个以 0 为首的自然数列里,由于逐次加 1 是可以无止境地操作下去的,因此自然数列是无穷无尽的.

② 任意两个自然数,它们相加或相乘所得的结果(和或积)一定是自然数,但它们相减或相除,所得的结果(差或商)不一定是自然数.

2. 整数

(1) 概念

整数的概念是由人类生活的实际需要形成的,在实际生活中有许多例子说明“0”并非只表示“没有”.例如,我们在用数表示温度的时候,“0”并不表示没有温度,而表示常态下水结冰时的温度.如果用 1、2、3、… 这些数表示零上温度,那么怎样表示零下温度呢?我们在 1、2、3、… 的前面添上“-”号得出负数-1、-2、-3、…,用这些负数来表示零下温度.在数学里,为了区别 1、2、3、… 和 -1、-2、-3、… 的不同意义,把 1、2、3、… 这些数叫做正整数,把 -1、-2、-3、… 这些数叫做负整数.

正整数、负整数和零统称为整数. 它们的从属关系如下:

$$\text{整数} \begin{cases} \text{正整数} \\ \text{零} \\ \text{负整数} \end{cases} \left. \vphantom{\begin{matrix} \text{正整数} \\ \text{零} \\ \text{负整数} \end{matrix}} \right\} \text{自然数}$$

(2) 性质

①自然数都是整数, 因为自然数包括正整数和零, 所以自然数是非负整数. 注意: 整数不一定是自然数.

②任意两个整数, 它们相加、相减、相乘所得的结果都是整数. 也就是说, 任意两个整数的和、差、积仍然是整数. 但是, 两个整数相除, 商不一定是整数.

(3) 运算(略)

3. 数的整除

(1) 整除 整数 a 除以整数 $b(b \neq 0)$, 除得的商正好是整数而没有余数, 我们就说 a 能被 b 整除(也可以说 b 能整除 a).

(2) 倍数和因数 如果数 a 能被数 $b(b \neq 0)$ 整除, a 就叫做 b 的倍数, b 就叫做 a 的因数(有的书上叫做约数).

一个数的因数的个数是有限的, 其中最小的因数是 1, 最大的因数是它本身.

一个数的倍数的个数是无限的, 其中最小的倍数是它本身.

注意: 有关数的整除的概念, 如果没有特别说明, 所说的数一般指正整数, 不包括 0 和负整数.

(3) 偶数和奇数

正整数按照能否被 2 整除可以分成以下两类:

偶数: 能被 2 整除的数叫做偶数.

奇数: 不能被 2 整除的数叫做奇数.

注意: 奇数和偶数的概念可以扩展到整数范围. 也就是说, 整数仍然可以按照能否被 2 整除分成奇数和偶数两类.

(4) 能被 2、5 整除的数的特征(即判别方法)

①偶数(能被 2 整除的数, 即 2 的倍数)的判别方法:

因为个位上是 0、2、4、6、8 的数, 都能被 2 整除, 所以这些数都是偶数. 因此, 判别一个数是否是偶数, 只要看它个位上的数是不是偶数.

一个整数, 不是偶数, 就是奇数.

②能被 5 整除的数(5 的倍数)的判别方法:

个位上是 0 或者 5 的数, 都能被 5 整除.

4. 分解素因数

(1) 素数和合数

素数: 一个数, 如果只有 1 和它本身两个因数, 那么这样的数叫做素数(有的书上叫做质数).

合数: 一个数, 如果除了 1 和它本身还有别的因数, 那么这样的数叫做合数.

注意: 1 既不是素数, 也不是合数. 所以, 正整数按它的因数的个数可以分成素数、合数和 1 三类.

(2) 素因数 每个合数都可以写成几个素数相乘的形式,其中每个素数都是这个合数的因数,这样的因数叫做这个合数的素因数.

(3) 分解素因数 把一个合数用素因数相乘的形式表示出来,叫做分解素因数.

分解素因数时,如果要分解的数较大,通常用“短除法”来分解素因数(具体方法可参见九年义务教育数学六年级第一学期课本).

5. 最大公因数和最小公倍数

(1) 公因数和最大公因数

公因数:几个数公有的因数叫做这几个数的公因数(有的书上叫做公约数).如果两个数的公因数只有1,那么我们说这两个数互素.

最大公因数:公因数中最大的一个,叫做这几个数的最大公因数.

最大公因数的求法:先求两个数的公因数,当数目不大时,可先分别将两个数的因数一一列出,从中找出公因数和最大公因数;当数目较大时,可用“短除法”来求.

特别地,当 a 是 b 的倍数时, a 、 b 两数的最大公因数就是 b ;

当 a 、 b 互素时, a 、 b 两数的最大公因数是1.

(2) 公倍数和最小公倍数

公倍数:几个数公有的倍数,叫做这几个数的公倍数.

最小公倍数:公倍数中最小的一个,叫做最小公倍数.

最小公倍数的求法:求两个数的最小公倍数,当数目不大时,可以将较大的那个数依次乘2、乘3、乘4、……,一直到乘得的数是另一个数的倍数为止,这个数就是最小公倍数;如果还要求其他的公倍数,只需将最小公倍数乘2、乘3、……,即可得到这两个数的其他公倍数.当数目较大时,可用“短除法”来求.

特别地,当 a 是 b 的倍数时, a 、 b 的最小公倍数就是 a .

当 a 、 b 互素时, a 、 b 的最小公倍数是 ab .

【基础测试】

卷1见第179页.

【测试讲评】

1. 初中阶段一开始,我们就把数的概念从自然数扩展到整数.观察两个自然数或两个整数进行四则运算所得的结果,就不难判断卷1(A组)第2(1)、(2)两题的结论都是错误的.两个自然数的差不一定是自然数,但它一定是整数.例如自然数3减5,差是-2,是整数,不是自然数.两个整数的商不一定是整数,可能是整数,也可能是小数或分数.例如 $1 \div 10 = 0.1$ (或 $\frac{1}{10}$), $1 \div 9 = 0.111\cdots$. 由于两个整数的商不一定是整数,因此研究数的整除是十分必要的.

2. “数的整除”是按上海“二期课改”课程标准新增加的教学内容,从2009年起,纳入初中数学学业考试的命题范围.与“数的整除”有关的概念比较多,也容易混淆.如除尽和整除是两个不同的概念,掌握它们的相同点和不同点很重要.除尽或整除时,余数都为0,这是它们的相同点;整除所得的商是整数,除尽所得的商不一定是整数,还可以是有限小数,这是整

除和除尽的主要区别. 另外, 整除的前提条件是整数除以整数(除数不为 0), 而除尽不必有这个前提条件. 也就是说, 除尽时被除数、除数不一定是整数, 也可以是有限小数. 例如卷 1(A 组)第 2(3)题, 2.4 除以 0.8, 余数为 0, 只能说 2.4 能除尽 0.8, 不能说 2.4 能被 0.8 整除. 又如素数与互素两个概念也容易混淆. 素数是指一个正整数, 它只有两个因数(1 和它本身). 而互素是指两个正整数的关系, 只要两个整数只有一个公因数 1, 这两个整数就互素, 但这两个整数不一定是素数. 如 8 和 9 都是合数, 但 8 和 9 互素. 所以卷 1(A 组)第 1(8)题应填“不一定”. 容易混淆的概念还有很多, 如素数与素因数、奇数与素数等. 希望卷 1(A 组)的练习对读者正确理解这些概念有所帮助.

3. 求两个正整数的最大公因数和最小公倍数是分数中约分与通分的基本功. 要切实掌握它的基本方法, 并能根据不同情况采用不同的方法. 如卷 1(A 组)第 4 题在求两个数的最大公因数时, (1)中两个数有倍数关系, (2)中两个数互素, 可以直接得出结果. 卷 1(A 组)第 5 题(1)、(2)也是这样. 当给出的两数较大或所含因数较多时, 如卷 1(A 组)第 4(3)、(4)题, 与第 5(3)、(4)题. 一般用短除法或利用分解素因数求解. 具体方法可参考九年义务教育数学课本(六年级第一学期)有关例题, 这里从略.

4. 卷 1(B 组)各题需应用数的整除的有关知识求解, 有些还要用到其他知识. 如(B 组)第 1 题应用分解素因数即可获解. 因为 $15=3 \times 5$, 所以有两种分法, 一种是分给 5 个人、每人 3 支; 另一种是分给 3 个人、每人 5 支.(想一想: 如果将题中的 15 支改为 18 支, 怎么解?) 又如由(B 组)第 3 题的题意, 知正方形小纸片边长的厘米数应该是 36 和 20 的公因数, 且要使裁出的正方形纸片最少, 所以本题实际上是求 36 和 20 的最大公因数. 由(B 组)第 4 题的题意, 知亮灯的时间间隔是 9 分钟, 响铃的时间间隔是 1 小时即 60 分钟, 本题实际上是求 9 和 60 的最小公倍数. (B 组)的第 2 题还需要用到其他知识, 如果设组成这个两位数的两个数字分别是 x 和 y ($x > y$), 列出方程组 $\begin{cases} x+y=8, \\ x-y=2, \end{cases}$ 求得 $\begin{cases} x=5, \\ y=3, \end{cases}$ 于是可组成两个两位数 35 和 53. 再根据这个两位数是素数的条件即可断定这个两位数是 53. 卷 1(B 组)最后两题需要较强的分析与综合能力, 供学有余力的学生选做.

【针对训练】

1. 判断:(正确的在括号内打“√”, 错误的在括号内打“×”).

- (1) 一个数的因数一定比它的倍数小. ()
- (2) 正整数 a 的最大的因数是 a . ()
- (3) 一个数的因数, 不是素数, 就是合数. ()
- (4) 奇数的因数一定是奇数. ()
- (5) 个位上是 0 的整数一定是能被 5 整除的偶数. ()
- (6) 所有的素数都是奇数. ()
- (7) 所有的偶数都是合数. ()
- (8) 两个素数一定互素. ()
- (9) 两个合数一定不互素. ()
- (10) 互素的两个数没有最大公因数. ()
- (11) 两个数的最大公因数一定能被这两个数整除. ()

(12) 两个数的最小公倍数一定能被这两个数整除.

()

2. 填空:

(1) 比 20 小的自然数有 _____ 个.

(2) 最大的负整数是 _____.

(3) 在正整数中,最小的合数是 _____.

(4) 在自然数中,最小的偶数是 _____.

(5) 在 30 的所有因数中,偶数有 _____ 个.

(6) 能被 5 整除的奇数,它的个位上的数是 _____.

(7) 12 和 36 的最大公因数是 _____,最小公倍数是 _____.

(8) 8 和 11 的最大公因数是 _____,最小公倍数是 _____.

3. 把下列命题中的假命题改写为真命题:

(1) 最小的自然数是 1.

(2) 1 是最小的整数.

(3) 如果整数 a 能被整数 b ($b \neq 0$) 除尽,那么就说 a 能被 b 整除.

(4) 一个合数一定可以写成几个素数相加的形式.

(5) 任何素数加上 1 都成为偶数.

4. 下列两种整数的分类方法是否正确? 为什么?

(1) 整数 $\begin{cases} \text{正整数,} \\ \text{负整数;} \end{cases}$

(2) 整数 $\begin{cases} \text{自然数,} \\ \text{负整数.} \end{cases}$

5. (1) 已知 $A=2 \times 3 \times m$, $B=2 \times 3 \times 7 \times m$, 那么当 m 等于多少时, A 、 B 两数的最大公因数是 30?

(2) 用“短除法”求 96、84 的最大公因数和最小公倍数.

6. (1) 小杰用 12 个小正方形排成一个长方形,有几种不同的排法?

(2) 王老师带领 24 名学生去社区为居民服务,需分成若干个人数相同的小组,每组人数在 5 到 10 人之间,应当怎样分组?

7. 某校六年级有学生 255 人,其中男生 120 人,现在要把男、女生分别编组,要求每一小组人数相等,且使组数最少,那么每组有几个学生?

8. 卢浦大桥是 17 路电车和 36 路汽车的起点站. 17 路电车每 5 分钟发车一次, 36 路汽车每 7 分钟发车一次,这两路公交车同时发车以后,至少再过多少时间又同时发车?

9. 甲乙两镇间有一段公路,长 3600 米,路旁有路标,原来每 40 米一个路标(起点、终点各有 1 个),现在要改成 50 米一个路标,问多少个旧路标可以留用.

10. 一块长方形绿地长 40 米,宽 24 米. 现计划在绿地四周插上彩旗,长方形的四角各插一面彩旗,并且要求相邻两面彩旗间的距离相等.

(1) 在各种方案中,相邻两面彩旗之间的最大距离是多少米?

(2) 在所有方案中,至少要在绿地四周插多少面彩旗?

11. 有一包糖果,不论是分给 8 个人,还是分给 10 个人,都能正好分完. 这包糖至少有多少块? 如果把“正好分完”改为“都剩 3 块”,那么这包糖果至少有多少块?

12. 已知甲、乙、丙三个数的和等于 235,甲数比乙数大 80,丙数比甲数小 90,求这三个数的最大公因数和最小公倍数.

§ 2 有理数与无理数

【复习目标】

1. 理解分数和分数单位的意义;会把两个整数相除的商用分数表示;也会把一个分数写成两个整数相除的形式.
2. 掌握分数的基本性质;会应用它熟练地进行分数的约分和通分、比较两个分数的大小,并会熟练地进行分数、小数和百分数的互化.
3. 理解一个数乘以或除以分数(百分数)的意义,并会应用它解有关的分数(或百分数)应用题.
4. 知道有理数和无理数的意义;会对实数进行分类,会鉴别一个数是有理数还是无理数.
5. 会求所给实数的相反数和绝对值(绝对值符号内不含字母);会求一个有理数的倒数;会用式子表示一个实数的绝对值、相反数和倒数.
6. 会用数轴上的点表示一个数,知道数轴上的点与实数一一对应;会利用数轴比较实数的大小;也会利用有理数中的大小比较法则比较实数的大小.
7. 会进行有理数加、减、乘、除、乘方及其混合运算(计算步骤不超过三个).
8. 了解近似数与有效数字的概念;掌握近似数的截取方法;能用有理数近似地表示一个无理数的大小或确定这个无理数的大致范围,并能根据实际问题的要求,对计算结果取近似值.
9. 会利用平方运算和立方运算求一个数的平方根和立方根,并会用分数指数幂表示一个数的平方根和立方根;会使用计算器或查表求平方根和立方根的近似值.
10. 会根据各种整数指数幂的定义求一个数的整数指数幂;会用科学记数法表示一个数.
11. 知道比和百分比的意义;会求两个数的比值;会用比的基本性质化简比.
12. 知道比例的意义;掌握比例的基本性质;会用这个性质,在比例式中求出某个未知项;会求两个数的比例中项.

【知识要点】

1. 分数

(1) 概念

在小学里,我们曾由“等分”一个“整体1”,引入分数的概念:把单位“1”平均分成若干份,表示这样的一份或者几份的数叫做分数.表示其中一份的数,叫做分做单位.

分数也可以表示两个整数相除所得的商.如果用 a 表示被除数, b 表示除数,那么

$$a \div b = \frac{a}{b} (b \neq 0).$$

当 a 不能被 b 整除时,商 $\frac{a}{b}$ 是分数;

当 a 能被 b 整除时, 商 $\frac{a}{b}$ 是整数.

为了研究的需要, 我们常把数 $\frac{a}{b}$ 在形式上看作是一个分数. 于是, 一个正分数, 按它和“1”的大小来分, 可以分成真分数和假分数两类.

真分数: 分子比分母小的分数叫做真分数. 真分数小于 1.

假分数: 分子比分母大或者分子和分母相等的分数, 叫做假分数. 假分数大于 1 或者等于 1 (即假分数不小于 1).

任何一个整数都可以用假分数来表示 (方法略).

任何一个分数都可以像整数一样, 用数轴上的点来表示.

(2) 分数的基本性质

分数的分子和分母同时乘以或除以相同的数 (零除外), 分数的大小不变. 用字母表示如下:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a \div n}{b \div n} \quad (b \neq 0, k \neq 0, n \neq 0).$$

应用分数的基本性质, 可以把一个分数化成分母不同而大小相等的分数, 约分和通分的依据是分数的基本性质.

①约分 把一个分数化成同它相等, 但分子、分母都比较小的分数叫做约分.

分子、分母互素的分数, 叫做最简分数.

约分的一般方法是用分子、分母的公因数分别去除分数的分子和分母, 通常要除到得出最简分数为止. 如果用分子、分母的最大公因数去除, 那么约分过程就比较简便.

②通分 把异分母分数化成和原来分数相等的同分母的分数叫做通分.

两个分数的分母的公倍数叫做这两个分数的公分母. 通分的一般方法是: 先求出原来几个分数的分母的最小公倍数作为公分母, 然后把各分数分别化成用这个公分母作分母且与原分数大小相等的分数. 利用通分可以比较几个异分母分数的大小.

(3) 运算

加减法:

$$\text{同分母分数相加、减} \quad \frac{b}{a} \pm \frac{c}{a} = \frac{b \pm c}{a}.$$

异分母分数相加、减 先通分, 再按上面同分母分数的加、减法则进行运算.

$$\text{乘法: } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

$$\text{除法: } \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

在分数运算中, 如果遇到带分数 (整数与真分数相加所成的数叫做带分数, 如 $2 + \frac{1}{3}$ 用带分数 $2\frac{1}{3}$ 表示), 有时需要把带分数化为假分数 (具体方法略, 可参见九年义务教育数学课本 (六年级第一学期), 在中学里, 运算最后结果中的假分数一般不要求化为带分数.

(4) 分数运算的应用

①求一个数的几分之几 (或百分之几), 用乘法.

②已知一个数的几分之几(或百分之几),求这个数,用除法.

③求甲数是(或占)乙数的几分之几(或百分之几),用甲数除以乙数,再把所得的商写成分数形式(或化为百分数).

2. 有理数

(1) 概念

整数和分数统称有理数.

整数可分为正整数、零、负整数,分数可分为正分数和负分数.

有理数都可以表示成 $\frac{m}{n}$ 的形式(m, n 是整数, $n \neq 0$).

(2) 性质(见实数的性质,略)

(3) 运算(见实数的运算,略)

任意两个有理数的和、差、积、商都是有理数.

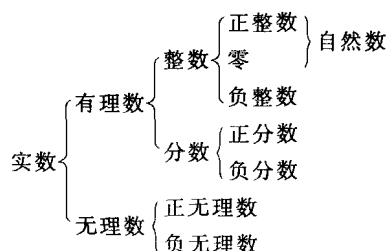
3. 实数的概念

有理数表示成小数形式时,一定是有限小数或者是循环小数.但在现实中还有一类无限不循环小数,由此,我们有必要引入无理数和实数的概念.

(1) 无理数 无限不循环小数叫做无理数.

(2) 实数 有理数和无理数统称实数.

实数的分类可由下列系统表来表示.



4. 实数的性质

(1) 数轴 规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴. 数轴上的点与实数是一一对应的.

(2) 相反数 只有符号不同的两个数,叫做互为相反数,即其中一个是另一个的相反数. 零的相反数是零. 如果两个数互为相反数,那么这两个数的和等于零.

(3) 倒数 1 除以一个数的商,叫做这个数的倒数. 零没有倒数.

如果两个数互为倒数,那么这两个数的积等于 1.

(4) 绝对值 一个实数的绝对值等于它在数轴上表示的点与原点的距离. 正数的绝对值是它的本身,负数的绝对值是它的相反数,零的绝对值是零.

如果设 a 表示任何一个实数,那么绝对值的意义可用字母表示如下:

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0), \\ 0 & (a = 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$$

(5) 实数的大小 数轴上的点,在右边的点所表示的实数大于左边的点所表示的实数.

利用数轴可以得出实数大小的比较的法则：

正数都大于零，零大于负数，正数大于一切负数；

两个正数，绝对值大的那个数大；

两个负数，绝对值大的那个数小。

5. 实数的运算

(1) 运算法则

加法：同号两数相加，取原来的符号，并把绝对值相加；异号两数相加，取绝对值较大的加数的符号，并用较大的绝对值减去较小的绝对值；互为相反数的两个数相加得零；一个数同零相加，仍得这个数。

减法：减去一个数等于加上这个数的相反数。

乘法：两数相乘，同号得正，异号得负，并把绝对值相乘；任何数同零相乘都得零。

除法：两数相除，同号得正，异号得负，并把绝对值相除；零除以任何一个不等于零的数都得零（零不能作除数）。

除以一个数，等于乘以这个数的倒数。

乘方：正数的任何次幂都是正数，负数的奇次幂是负数，负数的偶次幂是正数。

(2) 运算定律

交换律： $a+b=b+a$ （加法交换律）， $a \cdot b=b \cdot a$ （乘法交换律）。

结合律： $(a+b)+c=a+(b+c)$ （加法结合律）， $(a \cdot b)c=a(b \cdot c)$ （乘法结合律）。

分配律： $a(b+c)=ab+ac$ ， $a(b+c+d)=ab+ac+ad, \dots$ 。

(3) 运算顺序 有括号时先进行括号里的运算；在三级运算中，先进行乘方或开方运算，再进行乘或除运算，最后进行加或减运算；在同级运算中，应该从左到右依次进行运算。

(4) 近似数和近似计算

近似数：接近准确数而不等于准确数的数，叫做这个准确数的近似数（有时也称近似值）。近似数一般是按四舍五入方法取得的，有时也会根据实际需要“去尾法”或“进一法”截取近似数。

近似数的精确度：表示近似数的精确程度，当一个近似数四舍五入到哪一位，我们就说这个近似数精确到哪一位。

有效数字：一个由“四舍五入法”取得的近似数，从左边第一个不是零的数字起，到精确的数位止，所有的数字都叫做这个近似数的有效数字。

在实数的运算中，如果遇到无理数，一般可以按要求取它的近似值（有限小数），转化为有理数的运算。

6. 数的开方

(1) 平方根 如果一个数的平方等于 a ，那么这个数就叫做 a 的平方根。 a 是正数时，它有两个平方根，分别记作 $\sqrt{a}$ 和 $-\sqrt{a}$ （也可以记作 $\pm\sqrt{a}$ ），其中 $\sqrt{a}$ 表示正数 a 的算术平方根。 a 是零时，零的平方根是零，记作 $\sqrt{0}$ 。 a 是负数时，负数没有平方根。

(2) 立方根 如果一个数的立方等于 a ，那么这个数就叫做 a 的立方根，记作 $\sqrt[3]{a}$ ，其中 a 可以是任意实数。正数有一个正的立方根，负数有一个负的立方根，零的立方根是零。