DAXUESHUXUE

面向21世纪普通高等教育规划教材

大学数学 上册

（理工类）

陈光曙 主编 陈学华 夏海峰 徐新亚 副主编

第2版

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

面向21世纪普通高等教育规划教材

大学数学

(理工类) 上册

(第2版)

陈光曙 主 编

陈学华
夏海峰 副主编

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本教材根据普通高等院校理工科数学课程教学要求和当前高等院校高等数学教育教学改革的形势，在第1版的基础上，由长期从事大学数学教学的一线教师执笔编写. 全书全面而系统地讲解大学数学的知识，分上、下两册，共10章内容. 上册包括函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，无穷级数，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学与多元函数积分学；下册包括常微分方程、概率论与数理统计以及线性代数等内容. 每章均配备了适量的例题和一定数量的习题.

本教材编写时，在保持传统数学教材的结构严谨、逻辑性强等风格的基础上，积极吸收近年来同类教材改革的成功经验，结合作者教学实践中的切身体会以及历年考研数学试题的命题要求，加强了章节内容间的联系和融合，对传统高等数学教材的内容进行了必要的精简和梳理，并力求做到语言准确、系统完整、例证适当、通俗易懂、好教易学.

本教材可作为普通高等院校理工科非数学专业大学数学的教学用书，也可供任课教师和相关专业人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学：理工类. 上册/陈光曙主编. --2版. --上海：同济大学出版社，2010.5

面向21世纪普通高等教育规划教材

ISBN 978-7-5608-4299-8

Ⅰ.①大… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第060542号

面向21世纪普通高等教育规划教材

大学数学(理工类)上册(第2版)

陈光曙 主编

陈学华 夏海峰 徐新亚 副主编

责任编辑 曹 建 责任校对 徐春莲

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路1239号 邮编：200092 电话：021－65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂

开 本 787mm×960mm 1/16

印 张 25

印 数 1—5100

字 数 500000

版 次 2010年5月第2版 2010年5月第1次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-4299-8

定 价 38.00元

新世纪高级应用型人才培养系列

面向21世纪普通高等教育规划教材

总编委会

前　　言

2007 年本教材面世以来，承蒙各位读者朋友和广大教师的厚爱，发行量逐年攀升．这使我们深受鼓舞，更令我们感动的是国内许多高校的专家、学者还专门给我们发来信函或电子邮件，对教材的结构体系与内容的选取等方面的成绩给予了充分的肯定，同时提出了许多改进意见．还有不少读者特别寄来信件，对教材在编写与印刷中产生的一些疏漏一一指出，以供我们改进．借再版之机，我们在此向关心和支持本教材的有关专家、学者和广大读者表示诚挚的感谢！

21 世纪是科技高速发展的时代，信息化社会必然对大学教材提出更高的要求，学习能力、应用能力和创新能力是高等学校对新时代大学生确定的培养目标．因此，我们在本教材再版时，除了对第 1 版中已发现的某些疏漏（如文字、符号、公式、图形等）进行修正外，还在不影响原教材结构体系的前提下，对相关概念、定理、习题进行了认真的梳理，并做了适当修改和调整，使内容的安排更加趋于合理，语言的叙述更加流畅，更便于教师的讲授，也更有利于学生的学习．另外，考虑到空间解析几何与多元微积分之间的联系，我们对有关章节进行了调整，将第 1 版中的原第 1 章改为现在的第 5 章，将原第 2，3，4，5 章依次改为现在的第 1，2，3，4 章．

此次修订工作主要由陈光曙、陈学华、夏海峰、徐新亚等人完成．我们深知，教材的建设是一项艰苦繁重的工作，绝不可能在短期内完成．因此，我们诚恳地希望国内高校的同行和广大读者继续对我们的工作予以关心和支持，对本教材给予批评指正．

编　者

2010 年 5 月

第1版前言

本教材根据普通高等院校理工科数学课程的教学要求和当前高等院校高等数学教育教学改革的形势，由长期从事大学数学教学的一线教师执笔编写而成. 全书包括向量代数与空间解析几何、微积分学、常微分方程、概率论与数理统计、线性代数等内容.

在编写过程中，我们在力求保持传统高等数学教材的结构严谨、逻辑性强等风格的基础上，积极吸收了近年来同类教材改革的成功经验，结合我们自己在教学实践中的切身体会以及历年研究生入学考试数学考试的命题要求，在各章节内容的联系与融合方面下了一番功夫，力求做到语言准确、系统完整、例证适当、通俗适用. 在每一章最后都配备了适量的习题，分为 A，B 两类. 其中 A 类为基本题，通过练习，以掌握和巩固所学知识的基本概念、基本性质、基本方法，建议将 A 类习题作为作业来完成. B 类习题是提高题，来源于近几年的数学考研真题，有一定的难度和技巧，建议教师选择部分 B 类习题讲解，同时，也建议学生将 B 类习题作为复习时的练习、自测题. 我们还将答案附于书后，以帮助学生检测学习效果和巩固相关知识.

本教材可作为普通高等院校理工科非数学专业高等数学的教学用书，也可供任课教师参考.

本教材分上、下两册，共 10 章内容. 上册内容为向量代数与空间解析几何，函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，无穷级数，多元函数微分学，多元函数积分学；下册内容为常微分方程、概率论与数理统计、线性代数. 其中，第 1 章、第 4 章、第 9 章由陈光曙执笔；第 2 章、第 3 章、第 8 章由徐新亚执笔；第 5 章、第 6 章、第 7 章由夏海峰执笔；第 10 章由陈学华执笔. 全书最后由陈光曙统稿. 在编写过程中，得到了阎超栋、王管等老师的大力支持，在此表示感谢.

浙江大学邵剑教授、李大侃教授审阅了本书，提出了许多宝贵意见和建议，谨此表示衷心的感谢!

由于我们水平有限，加上时间仓促，书中的疏漏、错误和不足之处难免，恳请各位专家、同行和广大读者批评指正.

编　者

2007 年 1 月

目　　次

第 1 章　函数、极限与连续

中学数学里研究的主要是常量,也就是本身不变的量.而高等数学的研究对象则是变量.变量与变量之间往往存在着某种依赖关系,这种关系我们称为函数关系.研究函数的有效工具是极限.这一章我们讨论函数、极限与连续等基本概念以及它们的一些基本性质.

1.1　函　　数

1.1.1　常量与变量

生产实践中遇到的问题往往含有几个不同的量,其中有些量只取一个值,这种量被称为常量;有些量在同一个问题中可以取不同的值,这种量被称为变量.

例如,把一个密闭的容器内的气体加热时,气体的体积始终不变,是常量;而气体的温度和压力在变化,它们是变量.

一个量是变量还是常量,要根据具体情况做出具体分析.例如就同一地点而言,重力加速度可以看作常量,但就大范围而言,重力加速度则是变量.

通常用字母 a,b,c 等表示常量,用字母 x,y,z 等表示变量.

1.1.2　函数概念

客观世界中的同一问题里含有的几个变量常常不是孤立的,而是遵循着一定的变化规律,相互依存,相互联系,这种相依相联的关系就是数学上的函数关系.我们先讨论两个变量的情形(多于两个变量的情形将在第六章中讨论).

例 1.1.1　已知某种规格的农用塑料薄膜每米售价 1.20 元,设买 x m 时需付款 y 元,则

$$y = 1.2x \quad (x \geqslant 0).$$

例 1.1.2　自由落体运动中,设物体下落的时间为 t,下落的距离为 s,并设刚开始下落的时刻为 $t=0$,那么,s 与 t 之间的关系为

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

式中,g 是重力加速度.若物体着地的时刻为 $t=T$,则当时间 t 为 0 与 T 之间的任意数值时,我们总能确定下落距离 s 的相应值.

例 1.1.3　已知银行一年期存款利率为 2.25%,设某人存入 x 元一年后的本

息合计是 y 元，则

$$y = (1 + 2.25\%)x.$$

以上例子中的两个变量之间都存在着相互依存的关系或者说存在一种对应的法则，当其中一个变量取某个数值时，就可以确定另一个变量的值，这正是函数概念的本质.

定义 1.1.1 设 D 是一个数集，若对 D 中的每一个数 x，按照对应法则 f，总可以确定唯一的数值 y 与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

对应法则 f 称为**函数关系**，数集 D 叫做这个函数的**定义域**，x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**. 当自变量 x 取遍定义域 D 内的每一个值时，所得到的因变量 y 的所有值的全体称为函数 $y = f(x)$ 的**值域**，记作 $f(D)$. 由此看来，函数关系 f 和函数的定义域 D 是函数的两大要素.

函数记号 $f(x)$ 中的字母"f"也通常用"φ"，"g"，"F"，"G"等表示，这时，函数就记作 $y = \varphi(x)$，$y = g(x)$，$y = F(x)$，$y = G(x)$ 等.

函数的定义域和值域通常用**区间**表示. 区间共分为两类，即有限区间和无限区间. 其中有限区间包括以下四种($a < b$，a,b 都是实数)：

(a,b)，表示 $a < x < b$，称为开区间；

$[a,b]$，表示 $a \leqslant x \leqslant b$，称为闭区间；

$(a,b]$，表示 $a < x \leqslant b$，称为左开右闭区间；

$[a,b)$，表示 $a \leqslant x < b$，称为左闭右开区间.

有时将 $(a,b]$ 与 $[a,b)$ 统称为半开半闭区间. 无限区间或无穷区间共有以下五种：

$[a, +\infty)$，表示 $x \geqslant a$；

$(a, +\infty)$，表示 $x > a$；

$(-\infty, a]$，表示 $x \leqslant a$；

$(-\infty, a)$，表示 $x < a$；

$(-\infty, +\infty)$，表示 x 取一切实数.

开区间 $(a-\delta, a+\delta)$(这里，δ 是一个确定的正实数)称为点 a 的 δ **邻域**，记为 $U(a,\delta)$，δ 称为半径，a 称为中心；点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$.

在直角平面坐标系中，取自变量 x 在横轴上变化，因变量 y 在纵轴上变化，则平面点集

$$\{(x,y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为定义在 D 上的函数 $y = f(x)$ 的**图形或图像**.

在实际问题中，函数的定义域是根据函数的实际意义来研究的，如例 1.1.1 和

例 1.1.3 中的定义域 $D=[0,+\infty)$；例 1.1.2 中的 $D=[0,T]$. 若所讨论的函数仅仅是一个抽象的算式，通常认为定义域就是使该算式有意义的实数的全体. 例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-1,1]$，函数 $y=\dfrac{1}{x}+\sqrt{4-x^2}$ 的定义域是 $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2, 且\ x\neq 0\}$.

1.1.3　函数的表示法

表示一个函数的方法通常有以下三种：

公式法（又称解析法）是用数学式子表示函数的方法. 例如 $y=1.2x$, $y=\sqrt{1-x^2}$ 等；

图像法就是用坐标平面上的图形表示函数的方法；

表格法是用表格表示函数的方法，通常使用的三角函数表就是这样的例子.

这三种表示法各有优点. 解析法的优点便于数学上的分析和计算，它在数学上的应用非常广泛；图像法的优点是直观性强，函数的变化情况一目了然，工科问题中常用这种方法；表格法的优点是数据都是现成的，便于查找.

例 1.1.4　函数 $y=C$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域只有一个点 C，即 $f(D)=\{C\}$，它的图形是一条平行于 x 轴的直线，如图 1-1 所示.

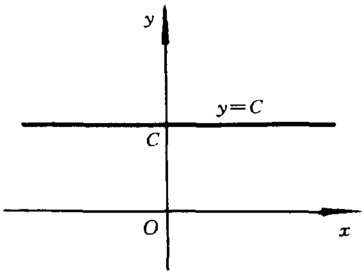

图 1-1

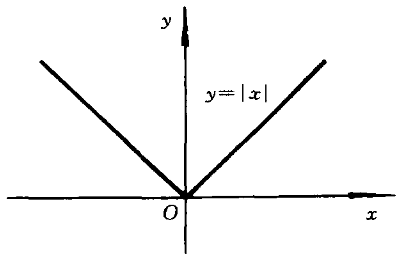

图 1-2

例 1.1.5　函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $f(D)=[0,+\infty)$，它的图形如图 1-2 所示，这个函数被称为**绝对值函数**.

例 1.1.6　函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为**符号函数**，它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $f(D)=\{-1,0,1\}$，它的图形如图 1-3 所示. 对于任何实数 x，有 $x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$，其中 $\operatorname{sgn}x$ 起到了符号的作用，这正是符号函数名称的由来.

例 1.1.7 设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作 $[x]$. 例如，$\left[\frac{5}{7}\right]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[\pi]=3$，$[-1]=-1$，$[-3.5]=-4$. 函数 $y=[x]$ 称为**整数函数**，它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域是整数，它的图形如图 1-4 所示.

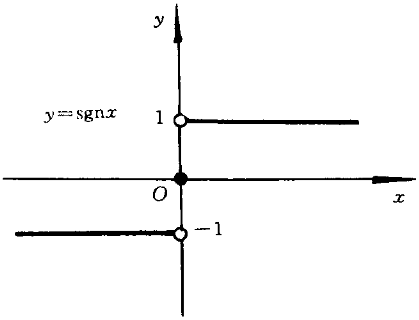

图 1-3

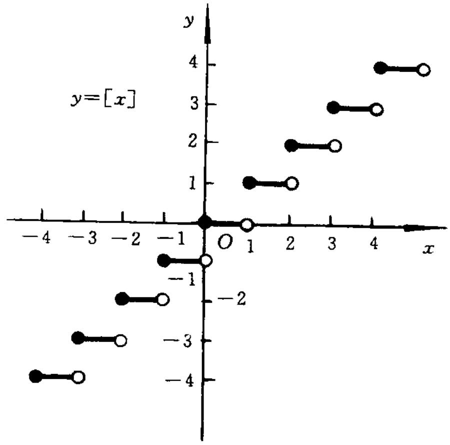

图 1-4

例 1.1.8 函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

称为**狄利克雷(Dirichilet) 函数**，它的定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$，值域是 $f(D)=\{0,1\}$.

在例 1.1.6、例 1.1.7 和例 1.1.8 中，我们看到，有时，一个函数要用几个式子表示，这种在自变量不同变化范围中对应法则用不同式子表示的函数，称为**分段函数**.

例 1.1.9 函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1-x, & x<0\end{cases}$$

是一个分段函数，它的定义域是 $D=(-\infty,1]$，当 $x\in[0,1]$ 时，对应的函数值 $f(x)=\sqrt{x}$；当 $x<0$ 时，对应的函数值 $f(x)=1-x$. 例如，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$；

$f(0)=\sqrt{0}=0$；$f(-3)=1-(-3)=4$.

需要指出的是，分段函数是一个函数，不要理解为几个函数. 在现实生活中，常常会用到这类函数.

例 1.1.10 设有一个谷仓，它的下半部分是直径和高都为 10m 的圆柱，上半部分是高 5m 的圆锥，如图 1-5 所示，试建立粮食高度和体积的函数关系.

解 设谷仓中平均存粮高度为 x m，粮食总体积为 $y\,\mathrm{m}^3$，则

$$y=\begin{cases}25\pi x, & 0\leqslant x\leqslant 10,\\ \dfrac{\pi}{3}[875-(15-x)^3], & 10<x\leqslant 15.\end{cases}$$

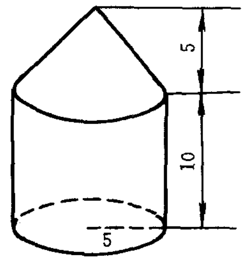

图 1-5

1.1.4 函数的几种特殊性质

1. 有界性

设函数的定义域为 D，数集 X 是 D 的一部分，如果存在正数 M，使得对一切 $x\in X$，都有

$$|f(x)|\leqslant M \quad (f(x)\leqslant M, f(x)\geqslant -M)$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 内是**有界的**（**有上界的，有下界的**）.

若这样的正数 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 X 内是**无界的**（**无上界的，无下界的**）.

显然，函数 $f(x)$ 在 X 内有界的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在 X 内既有上界又有下界.

例 1.1.10 中的函数在 $[0,15]$ 上是有界的；函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内有下界，但无上界，因而是无界的.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对于区间 I 内的任意两点 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2) \quad (f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加的**（**单调减少的**）. 单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的，如图 1-6 所示.

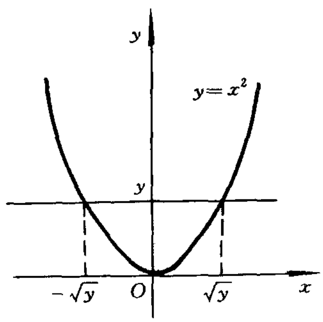

图 1-6

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对

于任一 $x \in D$，

$$f(-x) = -f(x) \quad (f(-x) = f(x))$$

恒成立，则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**（**偶函数**）.

例如，$f(x) = x^3$ 是奇函数，$f(x) = x^2$ 是偶函数.

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称.

4. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域是 D，如果存在一个正数 T，使得对任一 $x \in D$，有 $x \pm T \in D$，且

$$f(x+T) = f(x)$$

恒成立，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为函数 $f(x)$ 的**周期**. 通常我们说的周期指的是周期函数的最小正周期（也叫基本周期）.

例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\tan x$，$\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

常数函数 $y = C$ 是周期函数，但它没有最小正周期.

1.1.5 初等函数

1. 反函数

在一个函数中，自变量和因变量的位置有时是可以转化的. 例如，半径为 r 的球的体积 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$，这里，半径 r 是自变量，V 是因变量. 如果要从体积 V 确定球的半径 r 时，有

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}},$$

这里，V 是自变量，r 是因变量.

一般地，设函数 $y = f(x)$ 的定义域是 D，值域是 W，如果对任意一个 $y \in W$，D 中总有唯一的 x 满足 $y = f(x)$，则 x 称为 y 的函数，称它为函数 $y = f(x)$ 的反函数，记为 $x = f^{-1}(y)$.

若函数 $y = f(x)$ 在 D 上有反函数 $x = f^{-1}(y)$，则它的定义域和值域分别是反函数的值域和定义域.

在同一坐标下，函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的图形是重合的. 习惯上，用 x 表示自变量，y 表示因变量，将 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 改记为 $y = f^{-1}(x)$（即 x，y 互换位置），仍称为函数 $y = f(x)$ 的反函数. 函数 $y = f(x)$ 与反函数 $y = f^{-1}(x) = \varphi(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称，如图 1-7 所示.

单值单调的函数一定存在反函数.

2. 复合函数

设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，其定义域为 D，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，其值域 $W\subset D$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，u 称为**中间变量**.

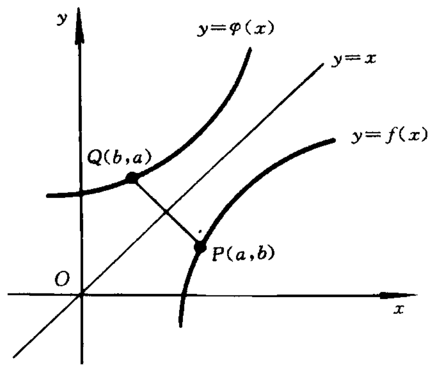

图 1-7

例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 可看作由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=1-x^2$ 复合而成.

必须指出，并非任意两个函数都可以进行复合，例如 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能复合，这是因为 $y=\arcsin u$ 的定义域是 $[-1,1]$，而 $u=2+x^2$ 的值域是 $[2,+\infty)$.

复合函数也可以由多个函数复合而成. 例如，$y=\sin^2\sqrt{1-x^2}$ 可以看作由 $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=\sqrt{w}$，$w=1-x^2$ 四个函数复合而成. 这里，u,v,w 都是中间变量.

例 1.1.11 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，试求 $f[f(x)]$.

解 $$f[f(x)]=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

例 1.1.12 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$ ________.

解 因为 $|f(x)|\leqslant 1$，所以 $f[f(x)]=1$.

3. 初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**. 现将它们的主要性质归纳如下：

(1) 常数函数 $y=C$

它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，图像是平行于 x 轴，且在 y 轴上的截距为 C 的一条直线.

(2) 幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为常数）

幂函数的定义域要看 α 是什么数而定，例如，当 $\alpha=\dfrac{1}{3}$ 时，其定义域是 $(-\infty,$

$+\infty)$，当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时，其定义域是$[0,+\infty)$. 但不论 α 是什么值，它在$(0,+\infty)$内总有定义，并且图像总是过点$(1,1)$，如图 1-8 所示.

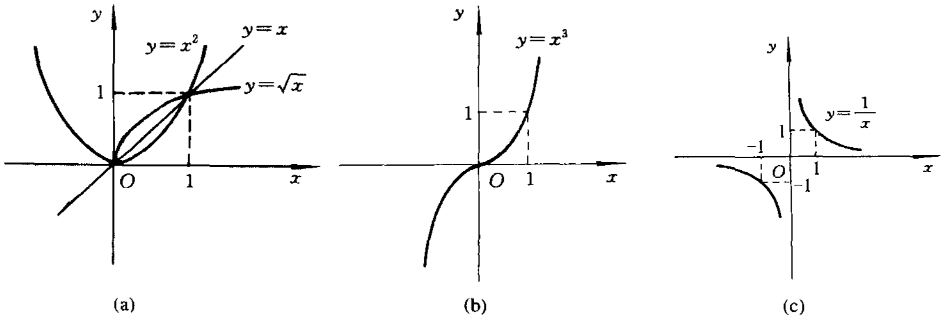

图 1-8

(3) 指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,+\infty)$，其图像总是在 x 轴的上方，且过点$(0,1)$. 当$a>1$时，函数单调增加；当$0<a<1$时，函数单调减少，如图1-9所示.

(4) 对数函数 $y=\log_a x\ (a>0,a\neq 1)$

它的定义域是$(0,+\infty)$，值域为$(-\infty,+\infty)$，其图像总是过点$(1,0)$，当$a>1$时，函数单调增加；当$0<a<1$时，函数单调减少，如图 1-10 所示. 对数函数与指数函数互为反函数.

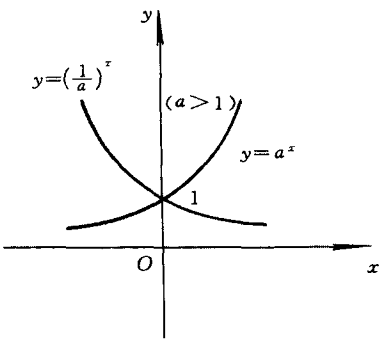

图 1-9

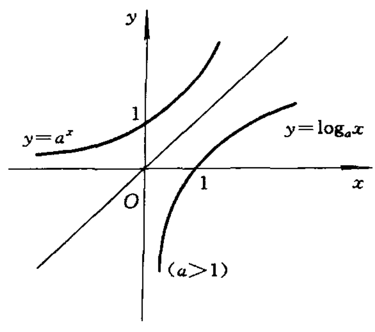

图 1-10

(5) 三角函数

共有六个，它们是

正弦函数 $y=\sin x$(图 1-11)；

余弦函数 $y=\cos x$(图 1-12)；

正切函数 $y=\tan x$(图 1-13)；

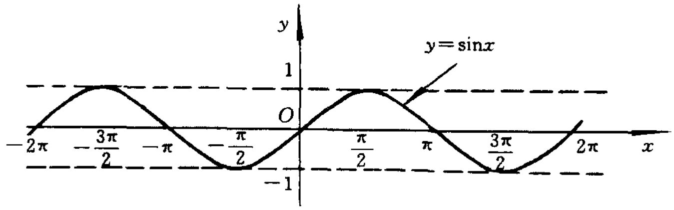

图 1-11

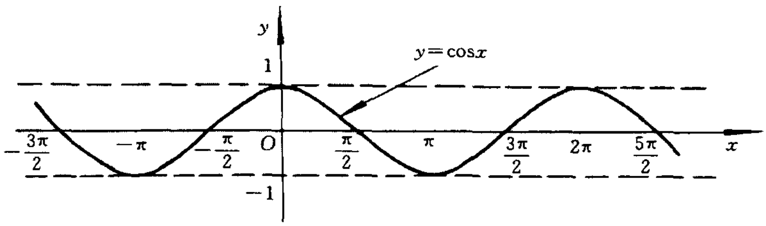

图 1-12

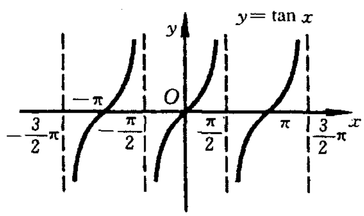

图 1-13

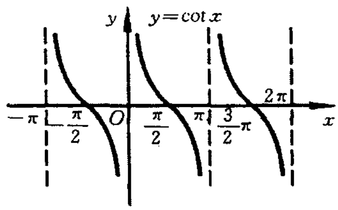

图 1-14

余切函数 $y = \cot x$(图 1-14);

正割函数 $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$;

余割函数 $y = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$.

正弦函数 $\sin x$ 和余弦函数 $\cos x$ 的定义域都是$(-\infty, +\infty)$,值域都是$[-1,1]$;它们都是以 2π 为周期的周期函数;正弦函数 $\sin x$ 是奇函数,余弦函数 $\cos x$ 是偶函数.

正切函数 $\tan x$ 和余切函数 $\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数,它们都是奇函数. 正切函数 $\tan x$ 的定义域是$\left\{x \middle| x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}, n \text{ 是整数}\right\}$;余切函数 $\cot x$ 的定义域是$\{x \mid x \neq n\pi, n \text{ 是整数}\}$,它们的值域都是$(-\infty, +\infty)$.

正割函数 $\sec x$ 和余割函数 $\csc x$ 的性质通常借助余弦函数 $\cos x$ 和正弦函数 $\sin x$ 去理解,不作专门讨论.