

文通青年叢書

從算術到代數

張元鼎著

文通書局印行

青年叢書

從算術到代數

張元鼎著

文通青年叢書

從算術到代數

中華民國三十七年十一月上海初版

(滬版西白報紙本)

每冊定價金圓玖角伍分

(印刷地點外酌加運費)

著 作 者	張 元 鼎
發 行 人	華 問 渠
印 刷 所	文 通 書 局 印 刷 廠
發 行 所	文 通 書 局
	上海 廣州 長沙
	貴陽 昆明 重慶 成都

版權所有 翻印必究

自序

這是一本供給初中生的課外讀物，編這一本書有三個動機：

第一初中生的數學課外讀物實在太少了。當然坊間不乏些什麼幾百解幾十解的或是些什麼升學指導和投考指南等一類的東西，汗牛充棟固然談不上，裝滿了一小間或半小間屋子總是可以的。可是，除去供教師參考及備學生查抄以外，對學生有什麼其他的幫助呢？那麼，用淺顯有趣的語句，談話或故事的方式，講一點教學方面的基本問題給他們聽一聽，該不是絕無意義的事吧？

其次我深覺在初中生升入二年級這階段，由算術改學代數，變換得似乎突兀一點，因為代數比算術更抽象了，更形式化了，在其間多談一點關於兩者的關連和基本認識，這當然也不是無益的事。

復次有些初中二的學生，常請我介紹些數學方面的課外讀物給他們看，我便將劉薰宇先生著的馬二先生談算學，

數學的園地，數學趣味等介紹給他們了，但他們有很多不懂。當然這些書並不是爲初中編的，不懂是應該的。於是，他們請我在課外講一點給他們聽，講呀講的，成功這一本小冊子了。

小朋友總喜愛吃糖的，越甜越愛。這一本書呢？當然不會對他們像一塊很甜的糖，但能像一片薄荷糖那樣辣一陣甜一陣地不馬上被吐出來，就算意外的成功了。

目 錄

自序

上篇

- 一 數的發生.....(1)
- 二 拾槓子.....(3)
- 三 零與一的特性.....(5)
- 四 四大法則.....(7)
- 五 名數記載法.....(12)
- 六 二次碰壁.....(15)
- 七 整數性質.....(18)
- 八 整數問題的分類及其基本性質.....(23)
- 九 勿以其小而忽之.....(42)
- 十 氣死人了.....(44)
- 十一 分數問題的三型.....(47)
- 十二 異軍突起.....(52)
- 十三 三位一體.....(54)
- 十四 變化無窮.....(57)

- 十五 比例問題.....(59)
- 十六 三化和八不.....(70)

下篇

- 一 新開篇.....(75)
- 二 舊話重提.....(77)
- 三 算伯伯病了.....(80)
- 四 講演會.....(82)
- 五 形式與內容.....(86)
- 六 形式和內容的互涉.....(88)
- 七 具體與抽象.....(91)
- 八 變與不變.....(92)
- 九 極限.....(95)
- 十 絕對的零與極限的零.....(99)
- 十一 兩個新困難.....(104)
- 十二 恆等式與方程式.....(107)
- 十三 公理定義和定理.....(109)
- 十四 笛家花園.....(114)
- 十五 論方法.....(119)
- 十六 談趣味.....(125)
- 十七 後方病院.....(127)
- 十八 再會.....(130)

從算術到代數

上 篇

一 數的發生

科學均起源於人類的實際需要，數學雖是最抽象的科學，當也不能例外。所以談到數的發生，就應該回想到原始人類的的生活。

讀過歷史的都知道，人類最初是度着游牧生活的，他們必須出外狩獵，以獲得生活的資料；廝守在營幕裏的婦女們，惦念着出外的有無收穫；即是那些狩獵者，也是惴惴於今天的有沒有辦法。因此可以說，他們對於數的最初概念，只是「有」或「沒有」。

「沒有」，只好餓着肚皮，期待明天，或是另覓一個有較多的野獸的地方去。有呢，那麼就要由首長來分配給大家了。甲的食量大，多得些，乙的年齡小，少給些，於是對數的次一概念是「多」或「少」。

其後，生活漸漸安定了，耕田代替了畋獵，生產分工

需要互通有無，互相交換物品，以前的「有無」，「多少」概念，在此時嫌太籠統了。他們認識了外界事物間的區別及類同，仰首天空，白天有一個日頭，晚上有一個月亮，光度雖有很大差異，但總不曾看見過另一個日頭或月亮，於是他們有了「一」這個概念了。又在交換當中，拿五尺布換一斗米，（當然他們還不知道單位），他們也約畧的知道價值差不多相等，手指和足趾的數目恰恰相同，我有眼、耳、鼻、口，你也具有同數的眼、耳、鼻、口，外界事物以類羣呈現在他們面前，日、月爲一羣，手、足爲一羣。有大羣，有小羣。譬如手、足這一羣，就比日、月那一羣大。因爲在這兩羣裏用「一對一」辦法處理一次，日、月那一羣已經無餘了。所謂「一對一」就是從甲羣取一個，乙羣也取一個，誰較遲的被取完，誰便是大羣。並且在小羣上加一個，可得次羣，再加一個，又可得次羣的次羣，於此，數的概念很完備了。他們已經認識了一二三……等等的自然數，並且認識了數的連續性。雖然這些術語，在他們的時代還沒有，但他們對客觀的認識，似乎應該這樣的。

人要生活，便要勞動，便要和自然搏鬥，認識自然，克服自然，利用自然。因勞動才有語言，才有文化，才有進步。數的發生及發展，也是隨着人類生活而繁榮滋長的。但有些學者們，偏說數學是離開現實獨立地存在的，是些思想銳敏的學者，從腦子裏想出來而構成的體系，我

們能相信嗎？

二 拾槓子

上次，我們講過羣。三隻鳥，三隻狗，三顆豆子，叫做相似羣。那麼一隻鳥，一隻狗，和一顆豆子和攏來，算不算相似羣呢？認定「三」字講，不管是狗是鳥，或二狗一鳥，二鳥一狗，二豆一狗或一鳥，怎麼配都可以，應該是相似羣，若將狗鳥豆扯在裏面講，則二狗一鳥或二鳥一豆等，沒有一羣是相似的。在這裏我們自己和自己抬起槓子來了。

拾槓子本非壞事。俗話說：鼓不敲不響。槓子愈抬得利害，愈能揭發真理。狗、鳥、豆等這些事物，是具體的，「三」是牠們的數目，是抽象的。從狗鳥等看出「三」，而由「三」更看清楚狗鳥等這些事物。且更由此看出三個人，三本書等也具有相同的性質。於是拋開事物的本身，而專研究「三」這個數字的本身，問題在一番衝突激盪之後給解決了。是為數的發展的基礎。

由有無進步到多少，由多少進步到類羣之認識，由類羣而認識羣的連續性，「一」的羣進而為「二」的羣而三而四……於是發明了聲音和符號，傳表數目的觀念，是為自然數列。這是一個巨大的進步。我們開始知道，三

隻鳥，三隻狗，三顆豆子，其中有一些共同的東西，不是鳥，不是狗，不是豆子，而是那個「三」，離開物體而有其本身的興趣。這是具體與抽象拾槓子的結果。

符號的發明，從數的發展說，似乎先是零，因為零就是沒有。有無是人類對數的最初概念，然後是一，二，三……至九。至於阿刺伯字碼或羅馬數字，是無多關係的。九以後呢？於此我們發現一樁最有趣味的問題。

我們假想倘使沒有進位法，則每一數有一符號，豈不要成為符號世界嗎？我們又假想，假使把我們現在通用的十進法改變一下，又該成什麼現象呢？我們應該感謝我們的手指，牠恰巧是一共十個，我們應感謝發明十進法的天才者，他將九加一所成的數另立一名叫做十，再聚攏十個十叫做百，十個百叫千等等……尤其奇妙的，名目雖立，並未增加符號。滿十時向左進一個，這一位名叫十位，再左為百千萬等等。若某一位沒有，便用零字補足，是為十進法。有了這個方法，一切整數自零起以迄於無窮，均可用1,2,3……9,0等符號表示了，這不是數學上一大奇跡嗎？例如：三千零七十六即記做：

3	0	7	6
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
千	百	十	個
位	位	位	位

現在若我們換成七進法，將怎麼樣呢？則25便不是

二十五，而是 $2 \times 7 + 5$ 等於十九了。字碼只要 0, 1, 2, …… 5, 6 便够了。所以不管那一種記數法，應用起來，都是一樣，其所以感覺十進法之便當者，不過習慣罷了。

三 零與一的特性

零就是沒有，牠在數學裏有很大的作用。沒有牠，不好記數。307 裏去掉零，變為 37，與原數相差很大。0.25 裏沒有零，顯不出整數和小數的界限。50 後面加一個零成為 500，恰為原來的十倍。由汽車號碼 00097，立知所在的都市至少有一萬輛以上的汽車。沒有零，整個數學體系，將不堪想像。

和零的重要性一樣，牠有很多可以利用的特性，例如：

a. $9827 \times 0 - 0 \times 9827 = 0$

b. $0 + 0 + 0 + 0 + \dots = 0$

c. $0 - 0 - 0 - 0 - \dots = 0$

d. $0 \times 0 \times 0 \times 0 \times \dots = 0$

上面四個式子，用話說，即任意數乘零或零乘任意數仍得零，零自加若干次，自減若干次或自乘若干次，均得零。這些特性，是零以外的數不會有的。利用這些特性，可得速乘法，可以推知 $a + b = 0$ 中， a 或 b 至少有一者須為零。在加、減、乘中只要零字愈多，算法便愈簡便。所以，

零也是一個重要的數，而且是數的最初概念。

緊接住零後面的「一」，也是一位很了不起的英雄。牠是一切整數的基礎，在任便一個整數裏，都有牠的足跡。如75，是七十五個一合攏來的，可寫成： $1+1+1+\dots$ 加至七十五次，也可以寫成 $1\times 75=75$ 。在人類對數的概念，零以後恐怕就是1，因為「沒有」是零，「有」呢，當然以「一」為簡單易曉了。

沒有「一」便沒有整數，沒有整數，自然也不會有小數及分數的產生，則人類將停止在只知「有無」的階段，數學更談不上了。

和零一樣，「1」也具有很多特性，如：

- a. 任意數乘一或一乘任意數仍得原數
- b. $1\times 1\times 1\times 1\times \dots = 1$
- c. 任意數 $\div 1$ 仍得任意數
- d. $1\div 1\div 1\div 1\div \dots = 1$
- e. 1的倒數還是一

在乘法，我們喜愛含有較多的1的乘數或被乘數，在應用問題裏，1起着很大的作用，在分數應用上，1以代表整體的資格幫我們解決很多困難，牠有時是因數，如 $72\times 1=72$ ，有時是整體，如設某工程為1。誰要不善利用這個1，誰便要在計算上遭到很多困難。

四 四大法則

人類社會愈進步，生活就愈複雜，數的運用便愈加擴展。由於財富的集積，人口的增加，產生了加法，由於食糧之消耗，收穫的盈歉，產生了減法，商品的交換，債務的糾葛，日月的盈缺，河海的變遷；有的在生長滋繁，有的在衰落退化，一切事物衝擊變化，都增強人們對加減二法的認識和運用，因之奠定了加法的基礎。

加法是求總數的方法，減法是求剩餘或求二不等的量的差的方法，這是誰都知道的。牠們彼此是相反的二法，這也是誰都知道的。但牠們爲什麼相反呢？在發生上說，有沒有先後呢？這些問題，就不是誰都知道的了。如上節所說，我們周圍的一切事物，時刻在變化，變化裏有相反的兩面，則其所表現的量的變化，也就有相反的二面，對這些量的處理方法，也就有了相反的二法。譬如說：有甲乙二人於此，甲以布換乙的米，假定甲討了便宜，那麼乙一定吃了虧。所以加法和減法之具有相反的性質，仍是客觀的反映，牠們表現同一變化的兩面，無所謂那一個在前，那一個在後。 $12+5=17$ ，也可以被說成「 $12+?$ 才是17呢？」同一句話，用前者的說法是加法，用後者是減法。普通誤認爲加法在前者，是因爲這加法的本身較易於運

算，而且教科書也是從加法講起的緣故。

數學具有一種特性，即是最初雖發生於現實，但常常會離開現實，而自串成一套很鬧熱的戲法。看哪！這戲法便開始了！第一齣是加法交換定律。

四斗米加五斗米等於九斗米，四塊錢加五塊錢等於九塊錢，所加的品種雖有差別，但得數總是九，此時九跑開米與錢的範束，而自己構成「四加五總是得九」這個結論了。若是五塊錢加四塊錢呢？便又可得到「 $4+5=5+4$ 總是得9」的結論。這戲法雖簡單，也自分兩個步驟：第一步，4,5,9先離開事物的本體，第二步，4,5交換了一次位置，而得 $4+5=5+4=9$ 。這戲法就是加法交換定律，把意義再普通化一點，是 $a+b=b+a$ 。

有人問：減法有無交換定律呢？ $12-2-8$ 不是等於 $12-8-2$ 嗎？是的，確有些算術教本上，說減法也有交換定律的，也是舉像 $12-8-2=12-2-8$ 這樣的例子的。但我們不應承認在算術裏減法有所謂交換定律（在代數是可以的），因為這裏所交換的，只限於減數2及8，不曾分毫涉及被減數12；並且， $12-2-8=12-(2+8)=12-(8+2)$ ，2及8之所以能交換，也還是加法上一種活動，也還是加法交換定律。我們只能說，倘減數多於一個以上時，減數次序是可以隨便調動的。

又有人問：數學既具有離開現實的特性，是否真的一

去永不復返呢？是不是說五人加四斗米，仍有其意義呢？是的，這確是一個極有趣味的問題。我們答：數學雖與現實相離，我們卻不能不根據現實去理解牠。你們不是學過名數與不名數嗎？名數就是用現實規定了的數，是與現實分不開的數。五人，五是表示人這個量的數；四斗米，四是表示米這個量的數；五人加四斗米，在現實既無意義，則五人加四斗米便無意義。所以算術上有一條規則：異名數不能相加，和 $4+5=9$ ，不名數的處理方法大不相同。

加法的興趣很濃厚，第一齣戲法剛完，第二齣——結合定律又來了！這戲法說來很平常，是你們曾經不自覺的運用過的。舉個例子說：

$$\begin{array}{r}
 3\ 5\ 8\ 2 \\
 1\ 4\ 3\ 9 \\
 2\ 5\ 2\ 8 \\
 +\ 6\ 6\ 7\ 1 \\
 \hline
 \end{array}$$

這個題目，讀小學的小朋友們都做得很好的，不但答案不錯，並且會在未一行，將2與8先加攏，在心頭記一個10，次將9和1加攏，又在心頭記一個10，連前一共20；其餘三行，也會如上弧線所示，一一加攏而加以覆按，存入上位。這種算法，是交換定律和結合定律的合用。2先加8，9先加1，未照原來次序，是運用的交換定律。先求各部的和，次將部分和求得全和，這是結合定律。結合律者，簡單的說，就是有諸數相加，可先行部分的結合，再求各部

分結合的總和。如式：

$a+b+c+d=a+(b+c)+d=(a+b)+(c+d)=(a+b+c)+d=\dots\dots$ 和先前講的一樣，在算術上，減法沒有結合定律，因為 $12-2-8=12-(2+8)$ ，是加法的活動。

數，由發生至發展，由記法和命法，由加減法以至於交換和結合二大定律，也算得極其壯觀了。可是加法在得意之餘，忽遭到一個嚴重的困難。是怎樣的一個困難呢？

比如說：某甲每天用洋五十元，三天用好多？這是很容易解決的， $50+50+50$ 便行了，但假設問，二年用好多錢？啊呀！可不得了！我們必須連寫七百三十個50相加，要用比較大的紙，而且寫好以後，還須從頭細數一遍，深恐寫多了或是寫少了。假設又問；某乙每天用洋3935元，九年用好多？那更其可怕了。但現實上這樣的問題有的是，怎麼辦呢？

於是，乘法來解圍了， $50+50+50=50\times 3=150$ ， $50+50+50+\dots\dots\dots$ 加至730個 $=50\times 730$ 。被乘數表示要連加的數，乘數表示要加的個數。天才者把最基本的乘法，如 $5\times 3=15$ ， $8\times 4=32$ 等，製成歌訣，以便應用，這個困難給順利地解決了。我們可以說，乘法是加法的發展。

乘法既胚生於加法，則凡加法所會變的戲法，乘法也會，而且要得更加巧妙，原來乘法也有交換律及結合律；而且牠還約了加法或減法，耍了一套新戲法分配律——