普通高等教育“十一五”规划教材
21世纪大学数学创新教材

丛书主编 陈 化

高等数学
一元微积分学

李书刚 徐学文 编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”规划教材
21世纪大学数学创新教材
丛书主编　陈　化

高等数学

一元微积分学

李书刚　徐学文　编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是结合现行中学数学教学内容及《高等数学教学基本要求》，根据作者多年来讲授高等数学课程的讲义编写而成的. 全书共分五章，分别为函数与极限、导数与微分、微分学基本定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用.

本书可作为高等学校教材，也可供考研复习使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 一元微积分学／李书刚，徐学文编. —北京：科学出版社，2010.6
普通高等教育"十一五"规划教材. 21世纪大学数学创新教材
ISBN 978－7－03－027970－5

Ⅰ.高… Ⅱ.①李…②徐… Ⅲ.①高等数学－高等学校－教材②微积分－高等学校－教材 Ⅳ.①O13②O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第113752号

责任编辑：冯桂层／责任校对：王望容
责任印制：彭 超／封面设计：苏 波

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010年6月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2010年6月第一次印刷 印张：15 1/4
印数：1—5 000 字数：300 000

定价：26.80元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《21世纪大学数学创新教材》丛书编委会

丛 书 序

《21世纪大学数学创新教材》为大学本科数学系列教材，大致划分为公共数学类、专业数学类两大块，创新是其主要特色和要求．经组编委员会审定，列选科学出版社普通高等教育“十一五”规划教材．

一、组编机构

《21世纪大学数学创新教材》丛书由多所985和211大学联合组编：

丛书主编 陈 化

常务副主编 樊启斌

副 主 编 吴传生 何 穗 刘安平

丛书编委 （按姓氏笔画为序）

王卫华 王展青 严国政 李 星 杨瑞琰

肖海军 罗文强 赵东方 黄樟灿 梅全雄

彭 放 彭斯俊 曾祥金 谢民育

二、教材特色

创新是本套教材的主要特色和要求，创造双重品牌：

先进．把握教改、课改动态和学科发展前沿，学科、课程的先进理念、知识和方法原则上都要写进教材或体现在教材结构及内容中．

知识与方法创新．重点教材、高层次教材，应体现知识、方法、结构、内容等方面的创新，有所建树，有所创造，有所贡献．

教学实践创新．教材适用，教师好教，学生好学，是教材的基本标准．应紧跟和引领教学实践，在教学方法、教材结构、知识组织、详略把握、内容安排上有独到之处．

继承与创新．创新须与继承相结合，是继承基础上的创新；创新需转变为参编者、授课者的思想和行为，避免文化冲突．

三、指导思想

遵循国家教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会关于课程教学的基本要求，力求教材体系完整，结构严谨，层次分明，深入浅出，循序渐进，阐述精炼，富有启发性，让学生打下坚实的理论基础．除上述一般性要求外，还应具备下列特点：

(1) 恰当融入现代数学的新思想、新观点、新结果，使学生有较新的学术视野.

(2) 体现现代数学创新思维，着力培养学生运用现代数学软件的能力，使教材真正成为基于现代数学软件的、将数学软件融合到具体教学内容中的现代精品教材.

(3) 在内容取舍、材料组织、叙述方式等方面具有较高水准和自身特色.

(4) 数学专业教材要求同步给出重要概念的英文词汇，章末列出中文小结，布置若干道(少量)英文习题，并要求学生用英文解答. 章末列出习题和思考题，并列出可进一步深入阅读的文献. 书末给出中英文对照名词索引.

(5) 公共数学教材具有概括性和简易性，注重强化学生的实验训练和实际动手能力，加强内容的实用性，注重案例分析，提高学生应用数学知识和数学方法解决实际问题的能力.

四、主编职责

从书组编委员会和出版社确定全套丛书的编写原则、指导思想和编写规范，在这一框架下，每本教材的主编对本书具有明确的责权利：

1. 拟定指导思想

按照丛书的指导思想和特色要求，拟出编写本书的指导思想和编写说明.

2. 明确创新点

教改、课改动态，学科发展前沿，先进理念、知识和方法，如何引入教材；知识和内容创新闪光点及其编写方法；教学实践创新的具体操作；创新与继承的关系把握及其主客体融合.

3. 把握教材质量

质量是图书的生命，保持和发扬科学出版社“三高”、“三严”的传统特色，创出品牌；适用性是教材的生命力所在，应明确读者对象，篇幅要结合大部分学校对课程学时数的要求.

4. 掌握教材编写环节

(1) 把握教材编写人员水平，原则上要求博士、副教授以上，有多年课程教学经历，熟悉课程和学科领域的发展状况，有教材编写经验，有扎实的文字功底.

(2) 充分注意著作权问题，不侵犯他人著作权.

(3) 讨论、拟定教材提纲，并负责编写组的编写分工、协调与组织.

(4) 拟就内容简介、前言、目录、样章，统稿、定稿，确定交稿时间.

(5) 负责出版事宜，敦促编写组成员使用本教材，并优先选用本系列教材.

《21世纪大学数学创新教材》组编委员会

2009年6月

前　　言

这本教材是为大学新生编写的微积分学入门书，内容包括函数与极限、导数与微分、微分学基本定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用等五章.

教材的编写充分考虑了现行中学数学教学内容，并注意到了知识的衔接与学生学习的便利性. 内容通俗易懂，便于自学. 也可作为考研复习用书.

本教材的编写与出版得到了华中师范大学数学与统计学学院领导的亲切指导与大力支持，公共数学教研室的教师们积极参与了本教材的内容讨论与编写工作. 具体执笔的是徐学文(负责第一、二、三章)，李书刚(负责第四、五章)，最后由李书刚统稿.

由于编者水平有限，书中难免有缺点和错误，欢迎广大师生批评指正.

编　者

2010 年 5 月

目　　录

第1章

函数与极限

1.1　函数与复合函数

1. 函数

我们知道，函数是数集 A 到数集 B 的一个映射，它是刻画变化现象的变化规律的数学模型. 为了丰富我们的函数知识，下面介绍几个特殊函数.

例 1-1　函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为符号函数. 它的定义域是$(-\infty,\ +\infty)$，值域为$\{-1,\ 0,\ 1\}$，图像如图 1-1 所示.

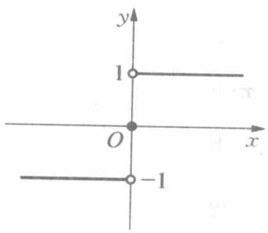

图 1-1

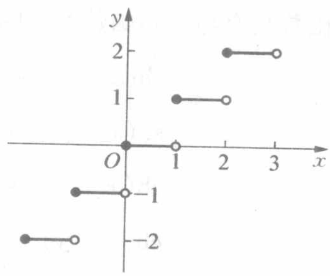

图 1-2

例 1-2　用$[x]$表示不超过 x 的最大整数，函数

$$y=[x]$$

称为高斯函数或取整函数，它的定义域为$(-\infty,\ +\infty)$，值域为整数集 **Z**，图像如图 1-2 所示.

例 1-3　函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

称为狄利克雷(Dirichlet)函数,它的定义域为实数集 $\mathbf{R}$,值域为$\{1, 0\}$.

例 1-4 令

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

我们将函数 $\operatorname{sh} x$、$\operatorname{ch} x$、$\operatorname{th} x$ 分别叫做双曲正弦、双曲余弦、双曲正切函数,并统称为双曲函数,它们的图像分别如图 1-3、图 1-4、图 1-5 所示.

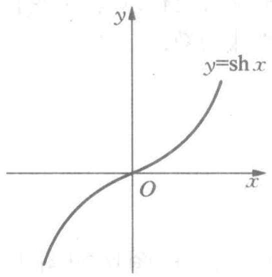

图 1-3

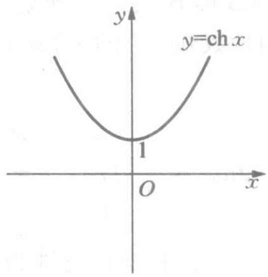

图 1-4

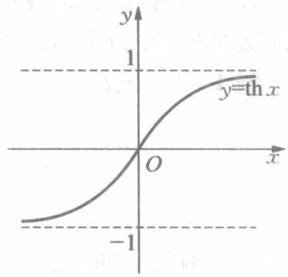

图 1-5

双曲函数具有与三角函数类似的公式:

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \tag{1-1}$$

$$\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \tag{1-2}$$

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \tag{1-3}$$

$$\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y. \tag{1-4}$$

特别地,在公式(1-1)中令 $y = x$, 则有

$$\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x; \tag{1-5}$$

在公式(1-3)中令 $y = x$, 则有

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x; \tag{1-6}$$

在公式(1-4)中令 $y = x$,注意到 $\operatorname{ch} 0 = 1$, 则有

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1. \tag{1-7}$$

下面我们仅就公式(1-1)给出证明.

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y+\operatorname{ch} x \operatorname{sh} y &= \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^{y}+e^{-y}}{2}+\frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^{y}-e^{-y}}{2} \\ &= \frac{e^{x+y}+e^{x-y}-e^{-x+y}-e^{-x-y}}{4}+\frac{e^{x+y}-e^{x-y}+e^{-x+y}-e^{-x-y}}{4} \\ &= \frac{2e^{x+y}-2e^{-x-y}}{4}=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}=\operatorname{sh}(x+y).\end{aligned}$$

2. 有界函数

在研究函数的性质时，常常要讨论函数的有界性.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 若存在实数 M，使得对于任意 $x \in D$，均有 $f(x) \leqslant M$，则称 $f(x)$ 为 D 上有上界函数，M 称为 $f(x)$ 的一个上界；若存在实数 L，使得对于任意 $x \in D$，均有 $f(x) \geqslant L$，则称 $f(x)$ 为 D 上有下界函数，L 称为 $f(x)$ 的一个下界；若存在实数 M，使得对于任意 $x \in D$，均有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 为 D 上有界函数；若这样的 M 不存在，就称 $f(x)$ 在 D 上无界.

显然，若函数 $f(x)$ 在 D 上有界，则 $f(x)$ 在 D 上既有上界，也有下界. $f(x)$ 在 D 上无界意味着对于任意正数 M，均存在 $x_0 \in D$，使得 $|f(x_0)| \geqslant M$.

例如，函数 $y=-x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有上界而无下界. 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有下界而无上界. 函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界. 函数 $y=x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无界.

3. 复合函数

在有些实际问题中，函数的自变量与因变量的对应关系需要借助于一些中间变量来建立.

设函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D，值域为 $g(D)$，函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1. 若 $D_1 \cap g(D) \neq \varnothing$，令 $D^*=\{x \mid x \in D 且 g(x) \in D_1\}$，则对于每一个 $x \in D^*$，可通过函数 $g(x)$ 对应 D_1 中唯一一个值 u，而 u 又通过函数 $f(u)$ 对应唯一一个值 y，这样就确定了一个定义在 D^* 上以 x 为自变量、y 为因变量的函数. 我们将这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 经过复合运算得到的复合函数，记为

$$y=f(g(x)),\ x \in D^*.$$

其中 f 称为外函数，g 称为内函数，而 u 称为中间变量.

例 1-5　已知 $f(u)=\sqrt{u}$，$u \in [0,+\infty)$，$u=g(x)=1-x^2$，$x \in (-\infty,+\infty)$，求 $f(g(x))$.

解　由 $1-x^2 \geqslant 0$ 得，$-1 \leqslant x \leqslant 1$，则

$$f(g(x))=\sqrt{1-x^2},\ x\in[-1,1].$$

例 1－6 设 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)$，$\varphi(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0,\end{cases}$求 $f(\varphi(x))$.

解 因 $f(\varphi(x))=\dfrac{1}{2}(\varphi(x)+|\varphi(x)|)$，所以

当 $x<0$ 时，$f(\varphi(x))=\dfrac{1}{2}(x+|x|)=\dfrac{1}{2}(x-x)=0$；

当 $x\geqslant 0$ 时，$f(\varphi(x))=\dfrac{1}{2}(x^2+|x^2|)=x^2$.

故

$$f(\varphi(x))=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

例 1－7 已知函数 $y=\mathrm{e}^{2\sin x\cos x}$ 是由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\sin 2x$ 复合而成，求 $f(u)$.

解 因 $y=\mathrm{e}^{2\sin x\cos x}=\mathrm{e}^{\sin 2x}=\mathrm{e}^{u}$，故 $f(u)=\mathrm{e}^{u}$.

复合函数也可以由多个函数相继复合而成. 例如，由函数

$$y=\log_a u,\ u\in(0,+\infty),$$

$$u=\sqrt{z},\ z\in[0,+\infty),$$

$$z=1-x^2,\ x\in(-\infty,+\infty)$$

相继复合运算可得如下复合函数

$$y=\log_a\sqrt{1-x^2},\ x\in(-1,1).$$

值得注意的是，对于函数

$$y=f(u),\ u\in D_1$$

与函数

$$u=g(x),\ x\in D,$$

只有 $D_1\cap g(D)\neq\varnothing$ 时，两个函数才能进行复合. 例如，以 $y=f(u)=\ln u\ (u\in(0,+\infty))$ 为外函数，$u=-x^2\ (x\in(-\infty,+\infty))$ 为内函数，就不能进行复合，因为外函数的定义域 $(0,+\infty)$ 与内函数 $u=-x^2$ 的值域 $(-\infty,0]$ 的交集为空集.

4. 几个特殊集合与符号

在中学，我们学习了一些特殊集合的记法. 如用 $\mathbf{R}$ 表示实数集，$\mathbf{Z}$ 表示整数集，

$\mathbf{N}$ 表示自然数集，$\mathbf{N}_+$ 表示正整数集，$\mathbf{Q}$ 表示有理数集. 本书中我们将沿用这些记法. 我们再介绍几个特殊集合.

设 δ 是一正数，我们将开区间 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 称为 x_0 的 δ 邻域，简称为 x_0 的邻域，记作 $U(x_0,\ \delta)$ 或 $U(x_0)$，即

$$U(x_0,\ \delta)=\{x \mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}.$$

点 x_0 称为这个邻域的中心，δ 称为这个邻域的半径. 注意到不等式 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ 与不等式 $|x-x_0|<\delta$ 等价，所以

$$U(x_0,\ \delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\},$$

即 $U(x_0,\ \delta)$ 是数轴上与 x_0 距离小于 δ 的点构成的集合，如图 1－6 所示.

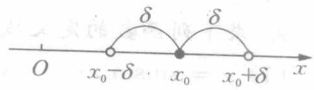

图 1－6

将邻域 $U(x_0,\ \delta)$ 去掉一个点 x_0 得到的集合称为 x_0 的去心 δ 邻域，简称为去心邻域，记作 $\mathring{U}(x_0,\ \delta)$，即

$$\mathring{U}(x_0,\ \delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}.$$

为了方便，有时把开区间 $(x_0-\delta,\ x_0)$ 称为 x_0 的左 δ 邻域，把开区间 $(x_0,\ x_0+\delta)$ 称为 x_0 的右 δ 邻域.

在讨论函数的有界性时，我们常用到短语“对于任意的 $x\in D$”，“存在 $x\in D$”. “对于任一个 $x\in D$”，为了书写简便，下文中我们用符号“$\forall$”表示“对于任意的”或“对于任一个”，用符号“$\exists$”表示“存在”. 例如，“$\forall x\in D$”表示的是“对于任意的 $x\in D$”或“对于任一个 $x\in D$”，“$\exists x\in D$”表示的是“存在 $x\in D$”.

习　题　1.1

1. 求下列函数值：

(1) $\operatorname{sgn}\pi$；　(2) $\operatorname{sgn}(-\pi)$；　(3) $\operatorname{sgn}(0)$；

(4) $[3.15]$；　(5) $[-3.15]$；　(6) $[-\sqrt{2}]$.

2. 证明：$|x|=x\operatorname{sgn}x$.

3. 证明：$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y$.

4. 证明：$y=\operatorname{sgn}x$ 是奇函数.

5. 证明：$\operatorname{sh}x$ 是奇函数，$\operatorname{ch}x$ 是偶函数.

6. 判断函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 在定义域内是否有界，并说明理由.

7. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，试证明 $f(x)$ 在 D 上有界的充要条件是它在 D 上既有上界又有下界.

8. 在下列各题中，求由所给函数构成的复合函数，并求复合函数对于给定自

变量 x_1 和 x_2 的函数值.

(1) $y = u^2$, $u = \sin x$, $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{4}$;

(2) $y = \sin u$, $u = 3x$, $x_1 = \frac{\pi}{9}$, $x_2 = \frac{\pi}{6}$;

(3) $y = \sqrt{u}$, $u = x^2+1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$;

(4) $y = \ln u$, $u = x^2$, $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{e}$.

9. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \sin\sin x$;　　(2) $y = \lg(\ln x)$.

10. 设 $f(x) = \frac{1}{2}(x+|x|)$, $\varphi(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0, \\ x^2, & x \geqslant 0, \end{cases}$ 求 $f(\varphi(x))$.

1.2　反函数与初等函数

函数是定义域到值域的一个对应法则,它描述了因变量与自变量的某种依赖关系.然而,在某些变化过程中,自变量与因变量的关系往往是相对的.设变量 x 与变量 y 有某种依赖关系,我们不仅要研究 y 随 x 变化的状况,有时也要研究 x 随 y 变化的状况.例如,中学教材在描述生物死亡后体内碳 14 的含量 y 随时间 x 的变化规律时,用的是指数函数

$$y = a^x, \tag{1-8}$$

此时 x 为自变量,y 为因变量.教材在介绍考古学家利用古生物体内的碳 14 的残留量 y 去测量古生物的年限 x 时,用的是由(1-8)得到的函数

$$x = \log_a y, \tag{1-9}$$

此时 y 是自变量,x 是因变量.

中学教材称式(1-9)是式(1-8)的反函数,下面我们来介绍反函数的一般概念.

1. 反函数的一般概念

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D,值域为 $f(D)$,若 $\forall y_0 \in f(D)$,D 中有且只有一个 x_0,使得

$$f(x_0) = y_0,$$

则按此对应法则能得到一个定义在 $f(D)$ 上的函数,我们将这个函数称为 $y = f(x)$ 的反函数,记作