工科数学分析

习题及题解集

● 杨小远　邢家省　编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

工科数学分析习题及题解集

杨小远　邢家省　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书是数学分析的习题集，选题全面，难度适宜，适用于理工科大学学生的学习训练。本书对数学分析中的常规性练习题目给出了解答，对难度较大的题目给出了详细解答或证明，并收集了一些补充提高类型的题目。通过练习和对照使用，有助于学生巩固已学的知识和理论，掌握解决基本问题的方法和手段，培养分析的硬功夫，提高解决问题的能力，以期能熟练灵活创新地思考解决更多的问题，取到较好的效果。

本书既可作为理工科大学生学习数学分析的自我训练和检测的辅导教材，也可作为学业考试、参加数学竞赛、考研复习的参考书，亦可作为青年教师和数学爱好者的参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

工科数学分析习题及题解集/杨小远，邢家省编著. —北京：机械工业出版社，2010.6

ISBN 978-7-111-30446-3

Ⅰ.①工… Ⅱ.①杨…②邢… Ⅲ.①数学分析—高等学校—习题 Ⅳ.①O17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 070398 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策划编辑：张金奎 责任编辑：张金奎 责任校对：陈延翔
封面设计：张 静 责任印制：杨 曦
北京鑫海金澳胶印有限公司印刷
2010 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
169mm×239mm · 17.75 印张 · 344 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-30446-3
定价：26.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
社服务中心：(010)88361066
销 售 一 部：(010)68326294
销 售 二 部：(010)88379649
读者服务部：(010)68993821

网络服务
门户网：http://www.cmpbook.com
教材网：http://www.cmpedu.com

前　　言

数学分析是理工科大学的一门重要公共基础课,是理工科大学生必备的知识体系。这门课程的研究对象和理论、方法、知识等,对于相关专业课程的学习和开展科学研究,都是必备的基础知识。

数学分析(微积分)已有三百多年的历史,微积分的创立和发展是人类智慧的结晶,是对科学文明的一大贡献,是人类哲学认识的重大突破,它对科学技术的发展发挥了不可或缺的作用,现代科学技术的创新和发展仍然离不了它。历代许多学子都是通过钻研数学分析而走向成功的。

经过无数数学先哲的研究和发展与广泛传播,数学分析成为了一个严密完整的知识体系,它方法众多、结论深刻、应用范围广阔。由于数学分析的经典成熟和高超技术性,历代学子在学习数学分析过程中,对其想法之妙、论证之精彩,往往都会令人发出叹为观止的感慨。

数学分析几乎是理工科大学生的第一门数学课程,出现了许多新问题和新理论、新方法,理论深度和知识增进梯度大,涉及知识面广。多数初学者在学习过程中往往会遇到一定的疑难,难于想到运用所学知识解题,解错了题但难于发现,对巧妙解法难于掌握。学习数学分析课程,需要具备扎实的数学基础知识并能灵活运用,需要掌握思考解决应用问题的能力。

本书专为帮助读者学习数学分析知识而编写,收集了常规性练习题目并给出了解答,题型多样,覆盖面较全,给出了类型与数量众多的典型习题的解析,对其中一些典型习题给出了独立发现的解法。学习数学课程知识最有效的方法,就是上课听好课、课后自学复习并及时做习题进行练习,读者可通过反复多次的训练对照使用,达到熟能生巧,这有助于理解概念和理论方法,掌握解决基本问题的方法和手段,提高解决问题的能力,以期能熟练灵活的解决更多的问题,取到较好的效果。

本书在编写过程中得到郑志明教授主持的北京市级精品课程建设项目基金资助和北京航空航天大学校级精品课程建设项目基金资助,作者得到郑志明教授的学术指导和创新思想启发,受益匪浅。同事李卫国、王永革、薛玉梅、孙玉泉等给作者提供了很大的帮助,他们对本书的写作、组织、汇编付出了辛勤的劳动,并提出了许多修改意见。作者的历届许多学生和研究生助教,也指出了他们发现的问题,我们都给予采纳,在此向他们表示感谢。

数学分析的题目浩如烟海,已积累了丰富的知识智慧体系,并不断发展更新,

但核心的问题是不变的。本书在编写过程中参考引用了国内外众多图书中的许多资料习题的解答，无法一一列举，在此一并致谢。本书第1章至第10章由杨小远编写；第11章至第21章由邢家省编写。全书由邢家省进行了定稿，并增加了对一些典型问题的新的简单的解法，纠正了一些流行题目解答的不妥之处。

由于编者水平所限，书中不妥和错误之处肯定不少，敬请读者发现并给予指正。

编者

于北京航空航天大学

数学与系统科学学院

目　录

第 1 章　实数与数列的极限

习题 1.1　有理数与实数及有关常用不等式

1. 证明:设 a 为有理数,b 为无理数,则 $a\pm b,ab,\dfrac{b}{a}(a\neq 0)$ 也为无理数.

2. 证明:(1)任何两个不等的有理数之间存在无穷多个有理数和无穷多个无理数;

(2)任何两个不等的实数之间存在无穷多个有理数和无穷多个无理数.

3. (1)设 n 为正整数且 n 不是完全平方数,证明:$\sqrt{n}$是无理数;(2)证明$\sqrt{2}+\sqrt{3}$为无理数.

4. 证明下面结果:(1)若 $r+\sqrt{2}s=0,r,s$ 为有理数,则 $r=s=0$;(2)若 x,y 都为有理数,则称(x,y)为有理点,证明:圆周$(x-\sqrt{2})^2+y^2=2$ 上只有惟一的有理点;(3)若 $r+\sqrt{2}s+\sqrt{3}t=0,r,s,t$ 为有理数,则 $r=s=t=0$.

5. 证明:任何分数都可以表示为有尽小数或无尽循环小数,无尽循环小数一定能用分数表示.

6. (1)证明二项式展开定理:$(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}$,其中 a,b 为实数,n 为正整数;

(2)证明:$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$,$n$ 为正整数.

7. 证明下面的不等式:

(1)设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个实数,且它们的符号相同,$a_i>-1,i=1,2,\cdots,n$,证明伯努利(Bernoulli)不等式:$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant 1+a_1+a_2+\cdots+a_n$,若 $a_1=a_2=\cdots=a_n=x,x>-1$,成立$(1+x)^n\geqslant 1+nx,n\in\mathbf{N}^*$;

(2)证明 Cauchy 不等式:$\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2\right)$;

(3)证明 Minkowski 不等式:$\left[\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum\limits_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$;

(4)设 $x,y\geqslant 0,m,n$ 为正整数,证明

$$x^my^n+x^ny^m\leqslant x^{m+n}+y^{m+n},\text{等号当且仅当 } x=y \text{ 时成立};$$

(5)若 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n,b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$,证明 Tchebycheff 不等式:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i \leqslant n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i\ ;$$

(6) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n (n \geqslant 2)$ 都是正数，且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 1$，证明：

$$\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{n} a_k} > \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) > 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k;$$

$$\frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n} a_k} > \prod_{k=1}^{n} (1 - a_k) > 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k;$$

(7) 设 $a_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$，且 $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$，证明：

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant n$，当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时等号成立；

(8) 设 $a, b \geqslant 0$，对任一正整数 n，则有 1) $ab^{n-1} \leqslant \frac{1}{n} a^n + \frac{n-1}{n} b^n$；

2) 对任意 $x, y \geqslant 0$，对任一正整数 $n \geqslant 2$，成立 $xy \leqslant \frac{1}{n} x^n + \frac{n-1}{n} y^{\frac{n}{n-1}}$；

(9) 证明几何平均-算术平均不等式：对任意 $n (n \geqslant 2)$ 个非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，成立

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\text{，等号当且仅当 } x_1 = x_2 = \cdots = x_n \text{ 时成立；}$$

(10) 对任意 $n (n \geqslant 2)$ 个正实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，成立

$$\frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)} \leqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时成立.

8. 设 n 为正整数，试证成立 (1) $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, (n > 1)$；

(2) $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \geqslant \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$；(3) $n! \geqslant n^{\frac{n}{2}}$；(4) $\frac{n!}{n^n} \leqslant \frac{1}{n}$.

9. (1) 对任意实数 $x, y \geqslant 0, n \in \mathbf{N}^*$，证明成立 $(x+y)^n \geqslant x^n + y^n$，$(x^n + y^n)^{\frac{1}{n}} \leqslant x + y$；

(2) 对任意实数 $x, y \geqslant 0, n \in \mathbf{N}^*$，证明成立 $(x+y)^{\frac{1}{n}} \leqslant x^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{1}{n}}$，$\left| x^{\frac{1}{n}} - y^{\frac{1}{n}} \right| \leqslant |x - y|^{\frac{1}{n}}$.

10. 对任意实数 a,b,正实数 $p>0$,证明成立 $|a+b|^p\leqslant 2^p(|a|^p+|b|^p)$.

11. 试证对任意实数 $a_i(i=1,2,\cdots,k)$,正实数 $p>q>0$,成立

$$\left(\sum_{i=1}^{k}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{k}|a_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

12. 设 $a_1,a_2,a_3>0$,试证成立 $(a_1{}^3+a_2{}^3+a_3{}^3)^{\frac{1}{3}}<(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2)^{\frac{1}{2}}$.

13. 设正整数 $n\geqslant 2$,试证 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ 不是整数.

习题1.2 数列极限的定义

1. 用极限定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}=0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\dfrac{1}{3}$;　(4) 设 $x_n=\begin{cases}\dfrac{2n+1}{n}, & n\text{ 为偶数}\\[2ex] \dfrac{\sqrt{4n^2+n}}{n}, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,求证:$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$,举例说明,这个命题的逆命题不真.

3. 下列陈述是否可以作为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的定义? 若回答是肯定的,请证明之;若回答是否定的,请举出反例.

(1) 对于无限多个正数 $\varepsilon>0$,存在 $N\in\mathbf{N}^*$,凡是 $n>N$ 时,便有 $|a_n-a|<\varepsilon$;

(2) 对于任意给定的 $\varepsilon>1$,存在 $N\in\mathbf{N}^*$,凡是 $n>N$ 时,便有 $|a_n-a|<\varepsilon$;

(3) 对于任意给定的正数 $\varepsilon<1$,存在 $N\in\mathbf{N}^*$,凡是 $n>N$ 时,便有 $|a_n-a|<\varepsilon$;

(4) 对于每一个正整数 k,存在 $N_k\in\mathbf{N}^*$,凡是 $n>N_k$ 时,便有 $|a_n-a|<1/k$;

4. 用精确语言表达数列 $\{a_n\}$ 不以 a 为极限的定义,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n\pi$ 不存在.

5. 证明:若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则对任何正整数 k,有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+k}=a$.

6. 证明:若 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k+1}=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

7. 设数列 $\{a_{1,n}\},\{a_{2,n}\},\{a_{3,n}\}$ 满足 $a_{1,n}=\dfrac{1}{2}(a_{2,n-1}+a_{3,n-1})$,$a_{2,n}=\dfrac{1}{2}(a_{1,n-1}+a_{3,n-1})$,$a_{3,n}=\dfrac{1}{2}(a_{1,n-1}+a_{2,n-1})$,$n=2,3,\cdots$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{i,n}$,$i=1,2,3$.

习题1.3 数列极限的运算性质

A

1. 回答下列问题:

(1)若$\{a_n\}$,$\{b_n\}$都发散,对$\{a_n+b_n\}$与$\{a_nb_n\}$的收敛性能不能作出肯定的结论?

(2)若$\{a_n\}$收敛,而$\{b_n\}$发散,这时$\{a_n+b_n\}$的敛散性如何?

(3)$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq0$,而$\{b_n\}$发散,这时$\{a_nb_n\}$的敛散性如何?

(4)$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,而$b_n$发散,这时$\{a_nb_n\}$的敛散性如何?

(5)设$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$,且$\lim\limits_{n\to\infty}(c_n-a_n)=0$,问$\{b_n\}$是否必收敛?

2. (1)若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq0$,求证:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$,举例说明,当$a=0$时不能得出上述结论;

(2)设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则有$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{k}}=|a|^{\frac{1}{k}}$,$(k\in\mathbf{N}^*)$.

(由$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n-a|=0$,利用$\left||a_n|^{\frac{1}{k}}-|a|^{\frac{1}{k}}\right|\leqslant|a_n-a|^{\frac{1}{k}}$,即可得证.)

3. 求下列极限:(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}}{1+b+b^2+\cdots+b^{n-1}}$,其中$|a|<1$,$|b|<1$;

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$;(3)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$;

(4)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{1+2}\right)\left(1-\dfrac{1}{1+2+3}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$.

4. 求下列极限:

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$;(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+3n^2+1}{4n^3+2n+3}$; (3)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$;

(4)$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$; (5)$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;(6)$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)^{1/n}$;

(7)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{1/n}$; (8)$\lim\limits_{n\to\infty}(n^2-n+2)^{1/n}$; (9)$\lim\limits_{n\to\infty}(2\sin^2n+\cos^2n)^{1/n}$;

(10)$\lim\limits_{n\to\infty}\left((n^2+1)^{1/8}-(n+1)^{1/4}\right)$;

(11)$\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{1/n^2}$(提示:$1\leqslant(n!)^{1/n^2}\leqslant(n^n)^{1/n^2}=n^{1/n}$).

5. 求极限:(1)$\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{1/n}$,其中$0\leqslant a\leqslant b$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{1/n}$，这里 $a_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,m$.

6. (1) 设数列 $\{x_n\}$ 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$，

(其中 a 为有限数，或 $a=+\infty$)，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$;

(2) 设数列 $\{x_n\}$ 满足条件 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=l$,

(其中 l 为有限数，或 $l=+\infty$)，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=l$;

(3) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}$; (4) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}(a>0)$.

7. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\dfrac{1}{n}\right)=0$.

8. 如果 $a_0+a_1+\cdots+a_p=0$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}(a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_p\sqrt{n+p})=0$.

9. 设 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{k}{n^2}}-1\right)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

B

1. 若：$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=S$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(a_1+2a_2+\cdots+na_n)}{n}=0$.

2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，则：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab$.

3. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，$a<b$，证明必存在发散数列 $\{c_n\}$，满足：存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$.

4. 设数列 $\{x_n\}$ 满足：$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$.

习题 1.4　极限概念的推广

1. 设三次多项式 $p(x)=x^3-4x^2+5x-6$，用定义证明：

$$\lim_{n\to\infty}p(n)=+\infty,\ \lim_{n\to\infty}p(-n)=-\infty.$$

2. 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(1+2+3+\cdots+n)=+\infty$.

3. 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})=-\infty$.

4. 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots\dfrac{1}{\sqrt{n+n}}\right)=+\infty$.

5. 设 $a_1=1$，又设 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}, n=1, 2, \cdots$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

6. 设 $\{x_n\}$ 无上界，证明存在子序列 $\{x_{n_k}\}$，满足 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=+\infty$.

习题1.5 单调有界数列的极限

A

1. 证明下列数列极限存在：

(1) $x_n=\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n+9}{2n-1}$；(2) $x_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$.

2. 求证：如果单调数列有一子列收敛，那么原数列也必收敛.

3. 证明：若 $a_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

4. 设 $\{a_n\}$ 单调递增，$\{b_n\}$ 单调递减，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 都存在.

5. (1) 设 $a>0, x_1>0, x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right), n=1,2,\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；

(2) 设 $a>0, x_1>0, x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{a}{x_n^2}\right), n=1,2,\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

6. 证明：(1) $\frac{1}{2\sqrt{n+1}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}, (n=1,2,\cdots)$；

(2) 序列 $x_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$ 的极限存在.

7. 设 $a,b>0$，令 $x_1=a, y_1=b, x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}, y_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+y_n), n=1,2,\cdots$，求证数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

8. 设 $a_n=(n!)^{\frac{1}{n}}, n\in\mathbf{N}^*$，(1) 试证 $\{a_n\}$ 是递增数列；(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n}}$.

B

1. 证明：若有界数列 $\{x_n\}$ 满足 $2x_n\leqslant x_{n-1}+x_{n+1}, (n=2,3,\cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-1})=0$.

2. 设数列定义如下：$x_0=1, x_{n+1}=\frac{1}{x_n+1}, n=0,1,2,3,\cdots$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3. 设 $x_0=a, x_1=b, (b>a)$,定义如下数列:

$$\begin{cases} x_{2n}=\dfrac{x_{2n-1}+2x_{2n-2}}{3} \\ x_{2n+1}=\dfrac{2x_{2n}+x_{2n-1}}{3} \end{cases}, n=1,2,3,\cdots,\text{ 证明}\{x_n\}\text{收敛.}$$

习题1.6 一个重要极限和自然对数底e

1. 求下列极限:(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n-2}\right)^n$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+3}\right)^n$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+n}{2+n}\right)^n$; (5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n^2}\right)^{4n^2}$.

2. 设 $k\in\mathbf{N}^*$,求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^n=\mathrm{e}^k$.

3. 设 $e_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n, n\in\mathbf{N}^*$; $E_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}, n\in\mathbf{N}^*$;

证明: (1) $\{e_n\}$是严格递增的; (2) $\{E_n\}$是严格递减的;

4. 证明不等式: (1) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}, n\in\mathbf{N}^*$;

(2) 记 $e_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n, E_m=\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^{m+1}$,对任意 $m,n\in\mathbf{N}^*$,成立 $e_n<e_{n+m}<E_{n+m}<E_m$, $E_5=\left(1+\dfrac{1}{5}\right)^{5+1}=(1.2)^6=2.985984<3$.

5. 用对数函数 $\ln x$ 的严格递增性质证明: $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$,对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立.

6. 设 $n\in\mathbf{N}^*$,且 $k=1, 2,\cdots$,证明不等式: $\dfrac{k}{n+k}<\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)<\dfrac{k}{n}$.

7. 对 $n\in\mathbf{N}^*$,求证: $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n+1}<\ln(n+1)<1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$.

8. 令 $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln(n+1), n\in\mathbf{N}^*$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,这个极限值常记为 γ,叫做 Euler 常数,更进一步有:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+\varepsilon_n,\text{其中}\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0.$$

9. 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$.

10. 设 $n\in\mathbf{N}^*$，则有 (1) $\left(\dfrac{n+1}{e}\right)^n<e\left(\dfrac{n}{e}\right)^n<n!,(n>1)$；

(2) $n!<e^2\left(\dfrac{n}{e}\right)^{n+1}<e\left(\dfrac{n+1}{e}\right)^{n+1},(n>1)$；(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n!)^{1/n}}{n}=\dfrac{1}{e}$.

11. 求极限：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$；(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n!)^{1/n}}{n}$.

习题 1.7 Cauchy 收敛定理

A

1. 若对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}^*$，凡是 $n>N$ 时，有 $|a_n-a_N|<\varepsilon$ 成立. 问 $\{a_n\}$ 是不是基本列？

2. (1) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_{n+p}-a_n|\leqslant\dfrac{p}{n}$，对一切 $n,p\in\mathbf{N}^*$ 成立，问 $\{a_n\}$ 是不是基本列？

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_{n+p}-a_n|\leqslant\dfrac{p}{n^2}$，对一切 $n,p\in\mathbf{N}^*$ 成立，问 $\{a_n\}$ 是不是基本列？

3. 证明下列数列收敛：

(1) $a_n=1-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2},n\in\mathbf{N}^*$；

(2) $a_n=\sin x+\dfrac{\sin 2x}{2^2}+\cdots+\dfrac{\sin nx}{n^2},n\in\mathbf{N}^*,x\in\mathbf{R}$；

(3) $a_n=\dfrac{\sin 2x}{2(2+\sin 2x)}+\dfrac{\sin 3x}{3(3+\sin 3x)}+\cdots+\dfrac{\sin nx}{n(n+\sin nx)},n\in\mathbf{N}^*,x\in\mathbf{R}$.

4. 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件：$\{|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_n-a_{n-1}|\}$ 有界，求证 $\{a_n\}$ 收敛.

5. 用精确语言表示“数列 $\{a_n\}$ 不是基本列”，并证明下列数列发散.

$$x_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

6. 设 $x_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，求证：若 $\tilde{x}_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$ 极限存在，则