

# 工科数学分析

## 习题及题解集

● 杨小远 邢冢省 编著



机械工业出版社  
CHINA MACHINE PRESS

# 工科数学分析习题 及题解集

杨小远 邢家省 编著



机械工业出版社

本书是数学分析的习题集,选题全面,难度适宜,适用于理工科大学学生的学习训练。本书对数学分析中的常规性练习题目给出了解答,对难度较大的题目给出了详细解答或证明,并收集了一些补充提高类型的题目。通过练习和对照使用,有助于学生巩固已学的知识和理论,掌握解决基本问题的方法和手段,培养分析的硬功夫,提高解决问题的能力,以期能熟练灵活创新地思考解决更多的问题,起到较好的效果。

本书既可作为理工科大学学生学习数学分析的自我训练和检测的辅导教材,也可作为学业考试、参加数学竞赛、考研复习的参考书,亦可作为青年教师和数学爱好者的参考资料。

### 图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析习题及题解集/杨小远,邢冢省编著. —北京:机械工业出版社,2010.6

ISBN 978-7-111-30446-3

I. ①工… II. ①杨…②邢… III. ①数学分析—高等学校—习题  
IV. ①O17-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第070398号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑:张金奎 责任编辑:张金奎 责任校对:陈延期

封面设计:张静 责任印制:杨曦

北京鑫海金澳胶印有限公司印刷

2010年7月第1版第1次印刷

169mm×239mm·17.75印张·344千字

标准书号:ISBN 978-7-111-30446-3

定价:26.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心:(010)88361066

门户网:<http://www.cmpbook.com>

销售一部:(010)68326294

教材网:<http://www.cmpedu.com>

销售二部:(010)88379649

读者服务部:(010)68993821

封面无防伪标均为盗版

# 前 言

数学分析是理工科大学的一门重要公共基础课,是理工科大学学生必备的知识体系。这门课程的研究对象和理论、方法、知识等,对于相关专业课程的学习和开展科学研究,都是必备的基础知识。

数学分析(微积分)已有三百多年的历史,微积分的创立和发展是人类智慧的结晶,是对科学文明的一大贡献,是人类哲学认识的重大突破,它对科学技术的发展发挥了不可或缺的作用,现代科学技术的创新和发展仍然离不了它。历代许多学子都是通过钻研数学分析而走向成功的。

经过无数数学先哲的研究和发展与广泛传播,数学分析成为了一个严密完整的知识体系,它方法众多、结论深刻、应用范围广阔。由于数学分析的经典成熟和高超技术性,历代学子在学习数学分析过程中,对其想法之妙、论证之精彩,往往都会令人发出叹为观止的感慨。

数学分析几乎是理工科大学生的第一门数学课程,出现了许多新问题和新理论、新方法,理论深度和知识增进梯度大,涉及知识面广。多数初学者在学习过程中往往会遇到一定的疑难,难于想到运用所学知识解题,解错了题但难于发现,对巧妙解法难于掌握。学习数学分析课程,需要具备扎实的数学基础知识并能灵活运用,需要掌握思考解决应用问题的能力。

本书专为帮助读者学习数学分析知识而编写,收集了常规性练习题目并给出了解答,题型多样,覆盖面较全,给出了类型与数量众多的典型习题的解析,对其中一些典型习题给出了独立发现的解法。学习数学课程知识最有效的方法,就是上课听好课、课后自学复习并及时做习题进行练习,读者可通过反复多次的训练对照使用,达到熟能生巧,这有助于理解概念和理论方法,掌握解决基本问题的方法和手段,提高解决问题的能力,以期能熟练灵活的解决更多的问题,起到较好的效果。

本书在编写过程中得到郑志明教授主持的北京市级精品课程建设项目基金资助和北京航空航天大学校级精品课程建设项目基金资助,作者得到郑志明教授的学术指导和创新思想启发,受益匪浅。同事李卫国、王永革、薛玉梅、孙玉泉等给作者提供了很大的帮助,他们对本书的写作、组织、汇编付出了辛勤的劳动,并提出了许多修改意见。作者的历届许多学生和研究生助教,也指出了他们发现的问题,我们都给予采纳,在此向他们表示感谢。

数学分析的题目浩如烟海,已积累了丰富的知识智慧体系,并不断发展更新,

但核心的问题是不变的。本书在编写过程中参考引用了国内外众多图书中的许多资料习题的解答,无法一一列举,在此一并致谢。本书第1章至第10章由杨小远编写;第11章至第21章由邢家省编写。全书由邢家省进行了定稿,并增加了对一些典型问题的新的简单的解法,纠正了一些流行题目解答的不妥之处。

由于编者水平所限,书中不妥和错误之处肯定不少,敬请读者发现并给予指正。

编者

于北京航空航天大学  
数学与系统科学学院

# 目 录

## 前言

## 第 1 章 实数与数列的极限 ..... 1

- 习题 1.1 有理数与实数及  
有关常用不等式 ..... 1
- 习题 1.2 数列极限的定义 ..... 3
- 习题 1.3 数列极限的运算性质 ..... 4
- 习题 1.4 极限概念的推广 ..... 5
- 习题 1.5 单调有界数列的极限 ..... 6
- 习题 1.6 一个重要极限和自然  
对数底  $e$  ..... 7
- 习题 1.7 Cauchy 收敛定理 ..... 8
- 习题 1.8 上确界、下确界 ..... 9
- 习题 1.9 Stolz 定理的应用 ..... 10
- 第 1 章 部分习题答案与提示 ..... 11

## 第 2 章 函数的极限与连续性..... 28

- 习题 2.1 集合上的映射 ..... 28
- 习题 2.2 函数的概念和初等  
函数 ..... 28
- 习题 2.3 函数的极限 ..... 29
- 习题 2.4 极限过程的其他形式及  
其性质 ..... 31
- 习题 2.5 无穷小级及无穷大阶的  
比较 ..... 33
- 习题 2.6 连续函数的定义 ..... 33
- 习题 2.7 利用连续函数的性质  
求极限 ..... 34
- 习题 2.8 函数的一致连续性 ..... 35
- 习题 2.9 有限闭区间上连续函数  
的性质的应用 ..... 36

## 第 2 章 部分习题答案与提示 ..... 38

## 第 3 章 函数的导数理论及 其应用..... 47

- 习题 3.1 导数的定义 ..... 47
- 习题 3.2 求导数计算 ..... 48
- 习题 3.3 参数方程、隐函数的  
求导 ..... 49
- 习题 3.4 高阶导数 ..... 50
- 习题 3.5 微分中值定理 ..... 51
- 习题 3.6 利用导数研究函数  
单调性、证明不等式、  
求极值 ..... 53
- 习题 3.7 凸函数的性质及其  
应用 ..... 54
- 习题 3.8 L'Hospital 法则的  
应用 ..... 56
- 第 3 章 部分习题答案与提示 ..... 57

## 第 4 章 函数的 Taylor 展式及 其应用..... 67

- 习题 4.1 函数的微分的定义 ..... 67
- 习题 4.2 函数的 Taylor 展开  
公式 ..... 68
- 第 4 章 部分习题答案与提示 ..... 70

## 第 5 章 不定积分..... 76

- 习题 5.1 直接求不定积分 ..... 76
- 习题 5.2 换元法和分部积分法 ..... 77
- 习题 5.3 常用积分表及其应用 ..... 78

|                                   |     |                                                      |     |
|-----------------------------------|-----|------------------------------------------------------|-----|
| 习题 5.4 有理函数积分 .....               | 79  | 和幂级数求和 .....                                         | 126 |
| 习题 5.5 可有理化函数的<br>原函数 .....       | 80  | 第 8 章 部分习题答案与提示 .....                                | 128 |
| 第 5 章 部分习题答案与提示 .....             | 81  | 第 9 章 曲线的切向量和曲率 ...                                  | 137 |
| 第 6 章 函数的定积分 .....                | 88  | 习题 9.1 曲线的几种表示<br>方式 .....                           | 137 |
| 习题 6.1 定积分的概念与基本<br>性质 .....      | 88  | 习题 9.2 曲线的切向量和切线<br>方程 .....                         | 137 |
| 习题 6.2 可积条件 .....                 | 89  | 习题 9.3 光滑曲线的弧长 .....                                 | 138 |
| 习题 6.3 定积分的性质 .....               | 90  | 习题 9.4 平面曲线的曲率和曲率<br>半径 .....                        | 139 |
| 习题 6.4 微积分基本定理 .....              | 91  | 习题 9.5 空间曲线的曲率 .....                                 | 140 |
| 习题 6.5 分部积分法与换元公式<br>的应用 .....    | 93  | 第 9 章 部分习题答案与提示 .....                                | 140 |
| 习题 6.6 反常积分 .....                 | 95  | 第 10 章 定积分的应用 .....                                  | 143 |
| 第 6 章 部分习题答案与提示 .....             | 96  | 习题 10.1 平面图形的面积 .....                                | 143 |
| 第 7 章 数项级数 .....                  | 110 | 习题 10.2 由平行截面面积求<br>体积 .....                         | 143 |
| 习题 7.1 无穷级数收敛的基本<br>性质 .....      | 110 | 习题 10.3 旋转曲面的侧面积 .....                               | 144 |
| 习题 7.2 正项级数敛散的比较<br>判别法 .....     | 111 | 第 10 章 部分习题答案与提示 ...                                 | 144 |
| 习题 7.3 正项级数敛散的其他<br>判别法 .....     | 112 | 第 11 章 反常积分的收敛<br>判别法 .....                          | 150 |
| 习题 7.4 一般级数的敛散性 .....             | 113 | 习题 11.1 非负函数无穷积分的收敛<br>判别法 .....                     | 150 |
| 习题 7.5 绝对收敛和条件<br>收敛 .....        | 114 | 习题 11.2 无穷积分收敛的 Dirichlet<br>判别法和 Abel 判<br>别法 ..... | 151 |
| 第 7 章 部分习题答案与提示 .....             | 115 | 习题 11.3 瑕积分的收敛判<br>别法 .....                          | 152 |
| 第 8 章 函数序列与函数项<br>级数 .....        | 123 | 第 11 章 部分习题答案与提示 ...                                 | 153 |
| 习题 8.1 函数序列与函数项级数<br>的一致收敛性 ..... | 123 | 第 12 章 Fourier 级数 .....                              | 159 |
| 习题 8.2 极限函数与和函数的<br>性质 .....      | 124 | 习题 12.1 周期函数的 Fourier                                |     |
| 习题 8.3 幂级数的收敛区间                   |     |                                                      |     |

|                                          |     |                                   |     |
|------------------------------------------|-----|-----------------------------------|-----|
| 级数 .....                                 | 159 | 第 15 章 曲面的法向量和切平面 .....           | 195 |
| 习题 12.2 Fourier 级数的收敛定理 .....            | 160 | 习题 15.1 曲面的法向量和切平面 .....          | 195 |
| 习题 12.3 平方平均逼近 .....                     | 161 | 习题 15.2 曲面的参数方程 .....             | 196 |
| 第 12 章 部分习题答案与提示 ...                     | 163 | 习题 15.3 凸曲面 .....                 | 196 |
| 第 13 章 多变量函数的极限和连续性 .....                | 169 | 第 15 章 部分习题答案与提示 ...              | 197 |
| 习题 13.1 $n$ 维 Euclid 空间中的向量和点之间的距离 ..... | 169 | 第 16 章 二重积分和三重积分 .....            | 201 |
| 习题 13.2 $\mathbf{R}^n$ 中点列的极限 .....      | 170 | 习题 16.1 二重积分的定义和基本性质 .....        | 201 |
| 习题 13.3 $\mathbf{R}^n$ 中的开集和闭集 .....     | 170 | 习题 16.2 直角坐标系下的二重积分的计算 .....      | 202 |
| 习题 13.4 列紧集和紧致集 .....                    | 171 | 习题 16.3 二重积分的换元法 .....            | 203 |
| 习题 13.5 集合的连通性 .....                     | 171 | 习题 16.4 三重积分 .....                | 205 |
| 习题 13.6 多变量函数的重极限和累次极限 .....             | 171 | 习题 16.5 $n$ 重积分 .....             | 206 |
| 习题 13.7 多变量函数的连续性 .....                  | 173 | 习题 16.6 重积分的物理应用 .....            | 207 |
| 第 13 章 部分习题答案与提示 ...                     | 174 | 第 16 章 部分习题答案与提示 ...              | 207 |
| 第 14 章 多变量函数的微分学 .....                   | 178 | 第 17 章 第一型曲线积分和第二型曲线积分 .....      | 216 |
| 习题 14.1 多变量函数的偏导数与微分 .....               | 178 | 习题 17.1 第一型曲线积分 .....             | 216 |
| 习题 14.2 复合函数的微分和函数的方向导数 .....            | 179 | 习题 17.2 第二型曲线积分 .....             | 217 |
| 习题 14.3 高阶偏导数 .....                      | 180 | 习题 17.3 Green 公式 .....            | 218 |
| 习题 14.4 多元函数的 Taylor 展开公式与极值问题 .....     | 181 | 第 17 章 部分习题答案与提示 ...              | 220 |
| 习题 14.5 隐函数与隐函数方程组 .....                 | 182 | 第 18 章 第一型曲面积分和第二型曲面积分 .....      | 224 |
| 习题 14.6 条件极值 .....                       | 184 | 习题 18.1 第一型曲面积分 .....             | 224 |
| 第 14 章 部分习题答案与提示 ...                     | 185 | 习题 18.2 第二型曲面积分 .....             | 225 |
|                                          |     | 习题 18.3 Gauss 公式和 Stokes 公式 ..... | 225 |
|                                          |     | 第 18 章 习题答案与提示 .....              | 228 |

|                                     |     |                              |     |
|-------------------------------------|-----|------------------------------|-----|
| 第 19 章 场的数学初步·····                  | 236 | 第 20 章 部分习题答案与提示 ···         | 246 |
| 习题 19.1 数量场的梯度 ·····                | 236 | 第 21 章 数学分析模拟试题及<br>答案·····  | 252 |
| 习题 19.2 向量场的散度 ·····                | 236 | 工科数学分析(1)期中模拟试题及<br>答案 ····· | 252 |
| 习题 19.3 向量场的旋度 ·····                | 237 | 工科数学分析(1)期终模拟试题及<br>答案 ····· | 255 |
| 习题 19.4 有势场和势函数·····                | 238 | 工科数学分析(2)期中模拟试题及<br>答案 ····· | 261 |
| 第 19 章 部分习题答案与提示 ···                | 239 | 工科数学分析(2)期终模拟试题及<br>答案 ····· | 266 |
| 第 20 章 含参变量的积分·····                 | 242 | 参考文献 ·····                   | 275 |
| 习题 20.1 含参变量的常义<br>积分 ·····         | 242 |                              |     |
| 习题 20.2 含参变量反常积分的<br>一致收敛的判别法 ····· | 243 |                              |     |
| 习题 20.3 一致收敛的含参变量<br>反常积分的性质·····   | 244 |                              |     |
| 习题 20.4 $\Gamma$ 函数和 B 函数·····      | 246 |                              |     |

# 第 1 章 实数与数列的极限

## 习题 1.1 有理数与实数及有关常用不等式

1. 证明: 设  $a$  为有理数,  $b$  为无理数, 则  $a \pm b, ab, \frac{b}{a} (a \neq 0)$  也为无理数.

2. 证明: (1) 任何两个不等的有理数之间存在无穷多个有理数和无穷多个无理数;

(2) 任何两个不等的实数之间存在无穷多个有理数和无穷多个无理数.

3. (1) 设  $n$  为正整数且  $n$  不是完全平方数, 证明:  $\sqrt{n}$  是无理数; (2) 证明  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  为无理数.

4. 证明下面结果: (1) 若  $r + \sqrt{2}s = 0, r, s$  为有理数, 则  $r = s = 0$ ; (2) 若  $x, y$  都为有理数, 则称  $(x, y)$  为有理点, 证明: 圆周  $(x - \sqrt{2})^2 + y^2 = 2$  上只有惟一的有理点; (3) 若  $r + \sqrt{2}s + \sqrt{3}t = 0, r, s, t$  为有理数, 则  $r = s = t = 0$ .

5. 证明: 任何分数都可以表示为有尽小数或无尽循环小数, 无尽循环小数一定能用分数表示.

6. (1) 证明二项式展开定理:  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$ , 其中  $a, b$  为实数,  $n$  为正整数;

(2) 证明:  $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$ ,  $n$  为正整数.

7. 证明下面的不等式:

(1) 设  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  为  $n$  个实数, 且它们的符号相同,  $a_i > -1, i = 1, 2, \cdots, n$ , 证明伯努利 (Bernoulli) 不等式:  $(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ , 若  $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = x, x > -1$ , 成立  $(1 + x)^n \geq 1 + nx, n \in \mathbf{N}^+$ ;

(2) 证明 Cauchy 不等式:  $(\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2)$ ;

(3) 证明 Minkowski 不等式:  $[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2]^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_{k=1}^n a_k^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{k=1}^n b_k^2)^{\frac{1}{2}}$ ;

(4) 设  $x, y \geq 0, m, n$  为正整数, 证明

$$x^m y^n + x^n y^m \leq x^{m+n} + y^{m+n}, \text{等号当且仅当 } x = y \text{ 时成立};$$

(5) 若  $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ , 证明 Tchebycheff 不等式:

$$\sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i \leq n \sum_{i=1}^n a_i b_i;$$

(6) 设  $a_1, a_2, \dots, a_n (n \geq 2)$  都是正数, 且  $a_1 + a_2 + \dots + a_n < 1$ , 证明:

$$\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^n a_k} > \prod_{k=1}^n (1 + a_k) > 1 + \sum_{k=1}^n a_k;$$

$$\frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n a_k} > \prod_{k=1}^n (1 - a_k) > 1 - \sum_{k=1}^n a_k;$$

(7) 设  $a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ , 且  $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$ , 证明:

$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$ , 当且仅当  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  时等号成立;

(8) 设  $a, b \geq 0$ , 对任一正整数  $n$ , 则有 1)  $ab^{n-1} \leq \frac{1}{n}a^n + \frac{n-1}{n}b^n$ ;

2) 对任意  $x, y \geq 0$ , 对任一正整数  $n \geq 2$ , 成立  $xy \leq \frac{1}{n}x^n + \frac{n-1}{n}y^{\frac{n}{n-1}}$ ;

(9) 证明几何平均-算术平均不等式: 对任意  $n (n \geq 2)$  个非负实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 成立

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \text{ 等号当且仅当 } x_1 = x_2 = \cdots = x_n \text{ 时成立};$$

(10) 对任意  $n (n \geq 2)$  个正实数  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 成立

$$\frac{1}{\frac{1}{n} \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right)} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

等号当且仅当  $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$  时成立.

8. 设  $n$  为正整数, 试证成立 (1)  $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, (n > 1)$ ;

(2)  $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$ ; (3)  $n! \geq n^{\frac{n}{2}}$ ; (4)  $\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$ .

9. (1) 对任意实数  $x, y \geq 0, n \in \mathbf{N}^*$ , 证明成立  $(x+y)^n \geq x^n + y^n$ ,  
 $(x^n + y^n)^{\frac{1}{n}} \leq x + y$ ;

(2) 对任意实数  $x, y \geq 0, n \in \mathbf{N}^*$ , 证明成立  $(x+y)^{\frac{1}{n}} \leq x^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{1}{n}}$ ,  
 $\left| x^{\frac{1}{n}} - y^{\frac{1}{n}} \right| \leq |x - y|^{\frac{1}{n}}.$

10. 对任意实数  $a, b$ , 正实数  $p > 0$ , 证明成立  $|a + b|^p \leq 2^p (|a|^p + |b|^p)$ .

11. 试证对任意实数  $a_i (i = 1, 2, \dots, k)$ , 正实数  $p > q > 0$ , 成立

$$\left( \sum_{i=1}^k |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{i=1}^k |a_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

12. 设  $a_1, a_2, a_3 > 0$ , 试证成立  $(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3)^{\frac{1}{3}} < (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{\frac{1}{2}}$ .

13. 设正整数  $n \geq 2$ , 试证  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$  不是整数.

## 习题 1.2 数列极限的定义

1. 用极限定义证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1} = 0;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3}; \quad (4) \text{ 设 } x_n = \begin{cases} \frac{2n+1}{n}, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{\sqrt{4n^2+n}}{n}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2.$$

2. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$ , 举例说明, 这个命题的逆命题不真.

3. 下列陈述是否可以作为  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  的定义? 若回答是肯定的, 请证明之; 若回答是否定的, 请举出反例.

(1) 对于无限多个正数  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbf{N}^*$ , 凡是  $n > N$  时, 便有  $|a_n - a| < \varepsilon$ ;

(2) 对于任意给定的  $\varepsilon > 1$ , 存在  $N \in \mathbf{N}^*$ , 凡是  $n > N$  时, 便有  $|a_n - a| < \varepsilon$ ;

(3) 对于任意给定的正数  $\varepsilon < 1$ , 存在  $N \in \mathbf{N}^*$ , 凡是  $n > N$  时, 便有  $|a_n - a| < \varepsilon$ ;

(4) 对于每一个正整数  $k$ , 存在  $N_k \in \mathbf{N}^*$ , 凡是  $n > N_k$  时, 便有  $|a_n - a| < 1/k$ ;

4. 用精确语言表达数列  $\{a_n\}$  不以  $a$  为极限的定义, 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n\pi$  不存在.

5. 证明: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则对任何正整数  $k$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+k} = a$ .

6. 证明: 若  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1} = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

7. 设数列  $\{a_{1,n}\}, \{a_{2,n}\}, \{a_{3,n}\}$  满足  $a_{1,n} = \frac{1}{2}(a_{2,n-1} + a_{3,n-1}), a_{2,n} = \frac{1}{2}(a_{1,n-1} + a_{3,n-1})$ ,

$a_{3,n} = \frac{1}{2}(a_{1,n-1} + a_{2,n-1}), n = 2, 3, \dots$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{i,n}, i = 1, 2, 3$ .

## 习题 1.3 数列极限的运算性质

## A

1. 回答下列问题:

(1) 若  $\{a_n\}, \{b_n\}$  都发散, 对  $\{a_n + b_n\}$  与  $\{a_n b_n\}$  的收敛性能不能作出肯定的结论?

(2) 若  $\{a_n\}$  收敛, 而  $\{b_n\}$  发散, 这时  $\{a_n + b_n\}$  的敛散性如何?

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0$ , 而  $\{b_n\}$  发散, 这时  $\{a_n b_n\}$  的敛散性如何?

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 而  $b_n$  发散, 这时  $\{a_n b_n\}$  的敛散性如何?

(5) 设  $a_n \leq b_n \leq c_n$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n - a_n) = 0$ , 问  $\{b_n\}$  是否必收敛?

2. (1) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0$ , 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ , 举例说明, 当  $a = 0$  时不能得出上述结论;

(2) 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则有  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{k}} = |a|^{\frac{1}{k}}, (k \in \mathbf{N}^*)$ .

(由  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| = 0$ , 利用  $||a_n|^{\frac{1}{k}} - |a|^{\frac{1}{k}}| \leq |a_n - a|^{\frac{1}{k}}$ , 即可得证.)

3. 求下列极限: (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}}{1 + b + b^2 + \cdots + b^{n-1}}$ , 其中  $|a| < 1, |b| < 1$ ;

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$ ; (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{2^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{3^2} \right) \cdots \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)$ ;

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{1+2} \right) \left( 1 - \frac{1}{1+2+3} \right) \cdots \left( 1 - \frac{1}{1+2+\cdots+n} \right)$ .

4. 求下列极限:

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}$ ; (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2 + 1}{4n^3 + 2n + 3}$ ; (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right)$ ;

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$ ; (5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ ; (6)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)^{1/n}$ ;

(7)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{1/n}$ ; (8)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n + 2)^{1/n}$ ; (9)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2\sin^2 n + \cos^2 n)^{1/n}$ ;

(10)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( (n^2 + 1)^{1/8} - (n+1)^{1/4} \right)$ ;

(11)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{1/n^2}$  (提示:  $1 \leq (n!)^{1/n^2} \leq (n^n)^{1/n^2} = n^{1/n}$ ).

5. 求极限: (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n + b^n)^{1/n}$ , 其中  $0 \leq a \leq b$ ;

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{1/n}$ , 这里  $a_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, m$ .

6. (1) 设数列  $\{x_n\}$  满足条件  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 且  $x_n > 0 (n = 1, 2, \cdots)$ ,

(其中  $a$  为有限数, 或  $a = +\infty$ ), 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ;

(2) 设数列  $\{x_n\}$  满足条件  $x_n > 0 (n = 1, 2, \cdots)$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l$ ,

(其中  $l$  为有限数, 或  $l = +\infty$ ), 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l$ ;

(3) 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$ ; (4) 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} (a > 0)$ .

7. 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) = 0$ .

8. 如果  $a_0 + a_1 + \cdots + a_p = 0$ , 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 \sqrt{n} + a_1 \sqrt{n+1} + \cdots + a_p \sqrt{n+p}) = 0$ .

9. 设  $x_n = \sum_{k=1}^n \left( \sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right)$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

## B

1. 若:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = S$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n)}{n} = 0$ .

2. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , 则:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab$ .

3. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, a < b$ , 证明必存在发散数列  $\{c_n\}$ , 满足: 存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 有  $a_n \leq c_n \leq b_n$ .

4. 设数列  $\{x_n\}$  满足:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-2}) = 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$ .

## 习题 1.4 极限概念的推广

1. 设三次多项式  $p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 6$ , 用定义证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} p(-n) = -\infty.$$

2. 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (1 + 2 + 3 + \cdots + n) = +\infty$ .

3. 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) = -\infty$ .

4. 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} \right) = +\infty$ .

5. 设  $a_1 = 1$ , 又设  $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, n = 1, 2, \dots$ , 求证  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ .

6. 设  $\{x_n\}$  无上界, 证明存在子序列  $\{x_{n_k}\}$ , 满足  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = +\infty$ .

## 习题 1.5 单调有界数列的极限

### A

1. 证明下列数列极限存在:

$$(1) x_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n+9}{2n-1}; (2) x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

2. 求证: 如果单调数列有一子列收敛, 那么原数列也必收敛.

3. 证明: 若  $a_n > 0$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = l > 1$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

4. 设  $\{a_n\}$  单调递增,  $\{b_n\}$  单调递减, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  都存在.

5. (1) 设  $a > 0, x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), n = 1, 2, \dots$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ;

(2) 设  $a > 0, x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{a}{x_n^2}\right), n = 1, 2, \dots$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

6. 证明: (1)  $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}, (n = 1, 2, \dots)$ ;

(2) 序列  $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$  的极限存在.

7. 设  $a, b > 0$ , 令  $x_1 = a, y_1 = b, x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n), n = 1, 2, \dots$ , 求证数列  $\{x_n\}$  和  $\{y_n\}$  都收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ .

8. 设  $a_n = (n!)^{\frac{1}{n}}, n \in \mathbf{N}^*$ , (1) 试证  $\{a_n\}$  是递增数列; (2) 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n}}$ .

### B

1. 证明: 若有界数列  $\{x_n\}$  满足  $2x_n \leq x_{n-1} + x_{n+1}, (n = 2, 3, \dots)$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-1}) = 0$ .

2. 设数列定义如下:  $x_0 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{x_n + 1}, n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ .

3. 设  $x_0 = a, x_1 = b, (b > a)$ , 定义如下数列:

$$\begin{cases} x_{2n} = \frac{x_{2n-1} + 2x_{2n-2}}{3} \\ x_{2n+1} = \frac{2x_{2n} + x_{2n-1}}{3} \end{cases}, n = 1, 2, 3, \dots, \text{证明 } \{x_n\} \text{ 收敛.}$$

## 习题 1.6 一个重要极限和自然对数底 e

1. 求下列极限: (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ ; (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-2}\right)^n$ ; (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+3}\right)^n$ ;

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n$ ; (5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)^{4n^2}$ .

2. 设  $k \in \mathbf{N}^*$ , 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$ .

3. 设  $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbf{N}^*; E_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, n \in \mathbf{N}^*$ ;

证明: (1)  $\{e_n\}$  是严格递增的; (2)  $\{E_n\}$  是严格递减的;

4. 证明不等式: (1)  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, n \in \mathbf{N}^*$ ;

(2) 记  $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, E_m = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}$ , 对任意  $m, n \in \mathbf{N}^*$ , 成立  $e_n < e_{n+m} <$

$E_{n+m} < E_m, E_5 = \left(1 + \frac{1}{5}\right)^{5+1} = (1.2)^6 = 2.985984 < 3$ .

5. 用对数函数  $\ln x$  的严格递增性质证明:  $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ ,

对一切  $n \in \mathbf{N}^*$  成立.

6. 设  $n \in \mathbf{N}^*$ , 且  $k = 1, 2, \dots$ , 证明不等式:  $\frac{k}{n+k} < \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) < \frac{k}{n}$ .

7. 对  $n \in \mathbf{N}^*$ , 求证:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ .

8. 令  $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1), n \in \mathbf{N}^*$

证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 这个极限值常记为  $\gamma$ , 叫做 Euler 常数, 更进一步有:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n, \text{ 其中 } \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

9. 求极限:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right).$

10. 设  $n \in \mathbf{N}^*$ , 则有 (1)  $\left( \frac{n+1}{e} \right)^n < e \left( \frac{n}{e} \right)^n < n!$ ,  $(n > 1)$ ;

(2)  $n! < e^2 \left( \frac{n}{e} \right)^{n+1} < e \left( \frac{n+1}{e} \right)^{n+1}$ ,  $(n > 1)$ ; (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{1/n}}{n} = \frac{1}{e}.$

11. 求极限: (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ ; (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$ ; (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{1/n}}{n}.$

## 习题 1.7 Cauchy 收敛定理

### A

1. 若对任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbf{N}^*$ , 凡是  $n > N$  时, 有  $|a_n - a_N| < \varepsilon$  成立. 问  $\{a_n\}$  是不是基本列?

2. (1) 设数列  $\{a_n\}$  满足  $|a_{n+p} - a_n| \leq \frac{p}{n}$ , 对一切  $n, p \in \mathbf{N}^*$  成立, 问  $\{a_n\}$  是不是基本列?

(2) 设数列  $\{a_n\}$  满足  $|a_{n+p} - a_n| \leq \frac{p}{n^2}$ , 对一切  $n, p \in \mathbf{N}^*$  成立, 问  $\{a_n\}$  是不是基本列?

3. 证明下列数列收敛:

(1)  $a_n = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}, n \in \mathbf{N}^*;$

(2)  $a_n = \sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n^2}, n \in \mathbf{N}^*, x \in \mathbf{R};$

(3)  $a_n = \frac{\sin 2x}{2(2 + \sin 2x)} + \frac{\sin 3x}{3(3 + \sin 3x)} + \cdots + \frac{\sin nx}{n(n + \sin nx)}, n \in \mathbf{N}^*, x \in \mathbf{R}.$

4. 设数列  $\{a_n\}$  满足条件:  $|a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_n - a_{n-1}|$  有界, 求证  $\{a_n\}$  收敛.

5. 用精确语言表示“数列  $\{a_n\}$  不是基本列”, 并证明下列数列发散.

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

6. 设  $x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ , 求证: 若  $\tilde{x}_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$  极限存在, 则