数学

中级技术理论教育用书

陶祥和 主编

中国铁道出版社

中级技术理论教育用书

数学

陶祥和　卢迪富　编

张凤离　赖助进　陈雅梓　审

中国铁道出版社

1988年·北京

内 容 简 介

本书是根据铁道部颁布的《铁路工人中级技术理论教学计划、教学大纲》编写的基础培训教材。适合于具有初级技术理论知识的工人学习使用。全书共分八章，主要介绍了中级技工必须熟练掌握的数学基本知识，如集合与函数、三角函数、复数、解析几何、指数函数与对数函数等，各章中均附有适量的例题及习题，以便于自学。

学习本书全部内容约需130学时。教学时，可根据各工种的具体要求，选学相应的内容。

中级技术理论教育用书
数 学
陶祥和 主编
中国铁道出版社出版、发行
责任编辑 傅希刚 封面设计 安 宏
各 地 新 华 书 店 经 售
中国铁道出版社印刷厂印
开本：787×1092毫米1/32 印张：11.75 字数：269千
1988年11月 第1版 第1次印刷
印数：0001—9000册 定价：2.65元

说　　明

为适应全路开展岗位职务培训的需要，我局在1984年颁布《铁路工人中级技术理论教学计划、教学大纲（试行）》之后，于1986年发布《关于组编中级技工培训教材的通知》，决定组织编写一套相应的教材。现将其中《数学》、《机械制图》、《电工基础》、《电子技术基础》、《工程力学》等六种教学用书予以公共出版，作为有关工种中级技术培训通用的基础课、技术基础课统一教材。各工种的专业课教材，有关学校在试用之中，待总结试用经验、修订补充后将陆续编辑出版。

铁道部教育局

1987.10.30

前　　言

本书系根据铁道部颁布的《铁路工人中级技术理论教学计划、教学大纲（试行）》编写的，是一本供机务、车辆、工务、电务和运输系统36个工种的已具初中毕业文化程度和初级技术理论知识的中级技术工人使用的专业基础教材。

本书的内容包括式和方程，集合与函数，指数函数与对数函数，三角函数，复数，解析几何初步，排列、组合、二项式定理与概率初步，微积分初步等八章，并附有逻辑代数、数列、向量的基本运算、空间形体面积和体积计算公式表等内容。全书教学约需130课时。教学时，各工种可根据专业需要及教学时数安排，对书中有关章节作适当的调整和选取。

在编写中，我们注意了工人培训的特点，遵循职工教育的规律，文字上力求通俗易懂，内容安排上突出应用性，坚持少而精，并注意到数学的系统性、逻辑性。

在编写过程中，我们得到了有关单位的支持和帮助。在征求意见的过程中，各兄弟学校提出了许多宝贵意见，在此一并感谢。

本书由上海铁路局职工中等专业学校卢迪富编写第1～4章，陶祥和编写第5～8章及附录1～4。全书由郑州铁路机械学校张凤离和上海铁路分局职工学校赖助进任主审，杭州铁路分局职工学校陈雅梓协助审阅。

由于我们对成人数学教学法研究不够，经验不足，加之时间仓促，书中难免有欠妥之处，敬请教师在试用后提出宝贵意见，以便今后进一步修改完善。

编　　者

1987年 7 月

目　　录

第一章　式和方程

本章简要复习初中部分内容。通过复习，要求能了解代数式的意义及分类，掌握整式、分式和二次根式的四则运算法则，能正确进行代数式的加、减、乘（乘方）、除等各种运算，理解方程、方程组的概念及性质，熟练掌握一元一次、一元二次方程，二元一次、三元一次方程组的解法，为后面各章学习打好计算基础。

一、整　　式

（一）基本概念

1. 代数式

在生产实践中，各种零件的尺寸经常用字母来表示，用有限个加、减、乘、除、乘方、开方等六种运算符号把数或表示数的字母连接而成的式子，叫做代数式。例如，$2\pi R$，$a+b$，$\frac{1}{x}$，$x+\sqrt{y}$等都是代数式。单独一个数或字母也是代数式。例如，a，2，$\frac{4}{5}$等也看作是代数式。

代数式的分类如下：

- 代数式
  - 有理式
    - 整式
      - 单项式（如：a^2，$\sqrt{5}xy^2$，$-\frac{4}{3}ab$）
      - 多项式（如：x^2-y^2，$3x^2-2x+5$）
    - 分式（如：$\frac{n}{m-n}$，$\frac{\sqrt{3}}{a^2-b^2}$，$a-\frac{1}{2c}$）
  - 无理式（如：$\sqrt{x}$，$x+\sqrt{y-7}$，$\sqrt{\frac{x}{x+y}}$）

用数值代替代数式里的字母，计算后所得的结果，叫做代数式的值。

2. 有理式

只含有加、减、乘、除、乘方运算，或者虽有开方运算而根号内不含有字母的代数式，叫做有理式。有理式包括整式和分式。

3. 整式

除式中不含字母的有理式，叫做整式。

4. 单项式

没有加、减运算的整式叫做单项式，单项式中的数字因数（包括前面的符号）叫做系数。例如，$-\frac{2}{3}x^2$的系数是$-\frac{2}{3}$；$2\pi R$的系数是2π；x的系数是1。系数是1或-1时，“1”通常省略不写。例如，$-x^2$一般不写成$-1x^2$。系数通常写在字母的前面。例如，$4x$一般不写成“$x4$”。

一个单项式中所有字母的指数的和，叫做这个单项式的次数。例如，$-\frac{2}{3}x^2$是二次单项式，$4x^2y$是三次单项式。

5. 多项式

几个单项式的代数和叫做多项式，其中每个单项式叫做多项式的项。多项式中的某些项，如果所含的字母相同，并且相同字母的指数也分别相同，那么这些项叫做同类项。例如，$4a^2b$和$-\frac{4}{5}a^2b$是同类项。多项式中，次数最高的项的次数就是多项式的次数，例如，$2x+3$是一次二项式，$3x^2-2x+5$是二次三项式，x^2+xy+y^2也是二次三项式。

（二）整式运算

1. 整式的加减法

整式的加、减法，实际上就是合并同类项，其法则是：把同类项的系数相加，所得的系数作为系数，字母和字母的

指数不变。式子中有括号时，要先去括号。去括号的法则是：如果括号前面是“+”号，把括号和它前面的“+”号去掉，括号里面的各项都不变号；如果括号前面是“−”号，把括号和它前面的“−”号去掉，括号里面各项都变号。例如：

$$m+(a-b+c)=m+a-b+c$$

$$m-(a-b+c)=m-a+b-c$$

2. 幂的运算

正整数指数幂的运算按下面的法则进行：

（1）$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

（2）$a^m \div a^n = a^{m-n}$　$(m>n,\ a \neq 0)$

（3）$(a^m)^n = a^{mn}$

（4）$(ab)^n = a^n b^n$

3. 整式乘法

（1）单项式的乘法，就是利用乘法交换律、结合律和幂的运算法则，对系数和字母分别计算。

（2）多项式的乘法，按乘法分配律和单项式的乘法法则进行，即

$$m(a+b+c)=ma+mb+mc$$

$$(m+n)(a+b)=ma+mb+na+nb$$

（3）几个常用的乘法公式：

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$

$$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$$

4. 因式分解

把一个多项式表示为几个整式的积的形式，叫做多项式的因式分解。因式分解与整式乘法是两个互为相反的变形过程，如：

$$(a+b)(a-b) \underset{\text{因式分解}}{\overset{\text{整式乘法}}{\rightleftarrows}} a^2-b^2$$

分解因式，必须分解到每一个因式都不能再分解为止。

下面是几种常用的因式分解方法。

（1）提取公因式法：多项式中各项都含有的相同因式叫做公因式，把多项式的公因式提到括号外面进行分解的方法叫做提取公因式法。例如，

$$ma+mb+mc=m(a+b+c)$$

（2）公式法：

根据多项式因式分解的意义，利用乘法公式的逆运算进行分解的方法，叫做公式法。所以，把乘法公式反过来就得到分解因式的公式：

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

$$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$$

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$$

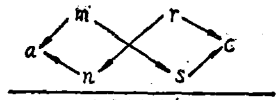
（3）分组分解法：把一个多项式作适当分组，使分组后可采用提取公因式法或公式法进行分解的方法，叫做分组分解法。例如，

$$\begin{aligned}ma+mb+na+nb&=m(a+b)+n(a+b)\\&=(a+b)(m+n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a^2-b^2+2bc-c^2&=a^2-(b-c)^2\\&=(a+b-c)(a-b+c)\end{aligned}$$

（4）十字相乘法：对于系数比较简单的二次三项式 ax^2+bx+c，如果二次项系数 a 与常数项 c 可以分别分解成两个因数 m、n 和 r、s，且 $ms+nr=b$，则 $ax^2+bx+c=(mx+r)(nx+s)$，这种方法叫做十字相乘法。

为了方便起见，可写成下面的形式：



$ms+nr=b$

$$ax^2+bx+c=(mx+r)(nx+s)$$

（5）求根公式法：

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2) \qquad (a\neq 0)$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

5．整式除法

（1）单项式除以单项式：

把系数、同底数幂分别相除，作为商的因式，被除式单有的字母连同它的指数也作为商的一个因式。

（2）多项式除以单项式：按单项式除以单项式的法则，把多项式的各项分别除以单项式，再把所得的商相加。

例1　化简：

（1）$\left(\frac{3}{2}x^3-\frac{4}{3}x^2y-\frac{3}{2}y^3-4xy^2\right)$
$+(2y^3+4xy^2-x^2y-3x^3)$；

（2）$2a-\{7b+[4a-7b-(2a-4b-c)]+3a\}$，
并求出当 $a=-\frac{2}{7}$，$b=0.4$，$c=-1$时此式的值。

解：（1）原式$=\frac{3}{2}x^3-\frac{4}{3}x^2y-\frac{3}{2}y^3-4xy^2$

$$+2y^3+4xy^2-x^2y-3x^3$$

$$=\left(\frac{3}{2}-3\right)x^3-\left(\frac{4}{3}+1\right)x^2y$$

$$+\left(2-\frac{3}{2}\right)y^3$$

$$=\frac{1}{2}y^3-\frac{7}{3}x^2y-\frac{3}{2}x^3$$

（2）原式$=2a-[7b+(4a-7b-2a+4b+c)+3a]$

$=2a-(7b+2a-3b+c+3a)$

$=2a-5a-4b-c$

$=-3a-4b-c$

当$a=-\frac{2}{7}$，$b=0.4$，$c=-1$时，原式的值是

$-3\times\left(-\frac{2}{7}\right)-4\times\frac{2}{5}-(-1)=\frac{6}{7}-\frac{8}{5}+1$

$=\frac{6}{7}-\frac{3}{5}=\frac{9}{35}$

例2 计算：

（1）$(-2a^2b)^3\cdot 3bc\div 12a^5b^2$；

（2）$-x(3-2x)(2x+5)$。

解：（1）原式$=-8(a^2)^3b^3\cdot 3bc\div 12a^5b^2$

$=-(8\times 3\div 12)a^{6-5}b^{3+1-2}c$

$=-2ab^2c$

（2）原式$=x(2x-3)(2x+5)$

$=x(4x^2+4x-15)$

$=4x^3+4x^2-15x$

例3 用乘法公式计算：

（1）$(a-3b+1)(a+3b-1)$；

（2）$\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}\right)$；

（3）$(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)$。

解：（1）原式$=[a-(3b-1)][a+(3b-1)]$

$=a^2-(3b-1)^2$

$=a^2-(9b^2-6b+1)$

$=a^2-9b^2+6b-1$

（2） 原式$=a^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3=a^3+\frac{1}{8}$

（3） 原式$=(x^2-1)(x^4+x^2+1)$

$=(x^2)^3-1$

$=x^6-1$

例 4　分解因式：

（1） $4x(1-y)^3+2(y-1)^2$；

（2） $-a^{m+1}x^{2n-1}+a^{m-1}x^{2n+1}$；

（3） $2x^2+x-10$；　　（4） $0.09a^2-\frac{1}{9}b^2$；

（5） $x^4-2x^3-8x+16$。

解 （1） 原式$=4x(1-y)^3+2(1-y)^2$

$=2(1-y)^2[2x(1-y)+1]$

$=2(1-y)^2(1+2x-2xy)$

（2） 原式$=a^{m-1}x^{2n-1}(x^2-a^2)$

$a^{m-1}x^{2n-1}(x+a)(x-a)$

（3） 解法 1 （十字相乘法）：

∵

$$\begin{array}{ccccc} & 2 & & 5 & \\ 2 & & \times & & -10 \\ & 1 & & -2 & \\ \hline & & 5+(-4)=1 & & \end{array}$$

∴原式$=(2x+5)(x-2)$

解法 2 （求根公式法）：

把 $a=2$， $b=1$， $c=-10$，代入求根公式得

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{1+80}}{4}=2$$

$$x^2=\frac{-1-\sqrt{1+80}}{4}=-\frac{5}{2}$$

于是，原式$=2(x-2)\left[x-\left(-\frac{5}{2}\right)\right]$

$$=2\left(x+\frac{5}{2}\right)(x-2)$$

$$=(2x+5)(x-2)$$

（4）原式$=(0.3a)^2-\left(\frac{1}{3}b\right)^2$

$$=\left(0.3a+\frac{1}{3}b\right)\left(0.3a-\frac{1}{3}b\right)$$

（5）原式$=(x^4-2x^3)-(8x-16)$

$$=x^3(x-2)-8(x-2)$$

$$=(x-2)(x^3-8)$$

$$=(x-2)^2(x^2+2x+4)$$

习题 1—1

1. 下列各式中，哪些是整式？哪些是分式？哪些是多项式？

$3x^2$，y^2-x^2，$\frac{1}{2}xy$，$\sqrt{x^2-y^2}$，$\frac{a}{\sqrt{ab}}$，3，$\frac{1}{\sqrt{3}}$，

$\frac{x}{x+y}$，$\sqrt{2}+x$，$\sqrt{2}x^2-3x-1$。

2. 用代数式表示：

（1）3的负倒数与 x 的差；

（2）a 的平方与 b 的相反数的和；

（3）x 与 y 的差的平方；

（4）一个三位数的百位数字为 a，十位数字为 b，个位数字为7；

（5）a 的15%与 b 的3倍的差；

（6）x、y 两数平方差的倒数的2倍。

3. 合并下列各式的同类项：

（1）$5a^2+3-a^2-5a-4+5a$；

（2） $3a^2x-3ax^2+\frac{1}{2}a^2x-\frac{1}{3}x^2a+a$；

（3） $3(2a-b)-\frac{1}{3}(2a-b)+2(b-2a)$

$+\frac{1}{2}(2a-b)$。

4． 求下列代数式的值：

（1） $-3(a-2b)^3-2(2a+b)^2$，其中 $a=-2, b=-1$；

（2） $|x+y|-|x|+|y|$，其中 $x=-3$，$y=5$。

5． 计算：

（1） $(-a^3+3a^2-2a+5)+2(8a^2-5a)$

$-3(a^3-4a+7)$；

（2） $3x^2-\{5x^2-[2x-(3x^2-3x+x^3)]-5x\}$；

（3） $19a^2-[5a-8a^2-(2a^2-a)]-3a$；

（4） $(-a^2)\cdot(-a^3)+a^5$；

（5） $a^{n+2}\cdot a^{n-1}$；　　（6） $a^{n+2}+a^{n-1}$；

（7） $\left(-\frac{1}{3}ab^2c^4d^3\right)^3$；（8） $\left[(2a)^2\cdot\left(\frac{1}{2}a\right)^3\right]^4$；

（9） $\frac{2}{5}x^2y^3\cdot\frac{5}{8}xyz$；　（10） $(-3x)\cdot 2xy^2\cdot 4y$；

（11） $(-4a^2+6a-10)\left(-\frac{1}{2}a\right)$；

（12） $-8(x-2y)(3x-2y)$。

6． 用乘法公式计算：

（1） 9.7×10.3；　　（2） 0.99^2；

（3） $(1-x)(1+x)(x^2+1)(1+x^4)$；

（4） $-2(x-y)^2\cdot 3(y-x)$；

（5） $(0.25ab+0.125c)\left(\frac{1}{4}ab-\frac{1}{8}c\right)$；