

高中数学教案

本社编

立体几何

北京师范大学出版社

高中数学教案

立体几何

本社编

北京师范大学出版社

责任编辑：林水平

高中数学教案

立体几何

本社编

*

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京通县燕山印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：9.25 字数：195千

1987年8月第1版 1987年8月第1次印刷

印数：1—1,9000

ISBN 7—303—00031—3/G·29

统一书号：7243·555 定价：2.00元

前 言

1984年我社编辑出版了《中学数学教材研究与教案选》(共六册),旨在将广大中学数学教师多年来积累的教学经验在全国范围内进行交流和推广。实践证明,这种做法得到全国各地广大中学数学教师的欢迎。它对于开展中学数学教学研究,提高教学质量起到了促进作用。

教育正改革,教学方法也在发展,同时不少中学数学教师使用《中学数学教材研究与教案选》中也给我们提出了很好的意见和建议。这些促使我们进行修订。这次修订改名为《初中数学教案》(包括代数一——四册、平面几何一、二册)和《高中数学教案》(包括代数一、二、三册,立体几何、平面解析几何及微积分初步)。这次修订仍然保持原书的优点,同时在以下三方面加以完善和补充。首先,力图使大多数教案在深度和份量方面对大多数学校的教学是切实可行的;其次,在教案中尽可能体现开发学生智力和培养学生的能力;第三,增加教案的数量,每章末配有复习课教案。

本书的特点是:(1)教案的作者仍然是全国范围内部分有经验的数学教师,其中有不少特级教师。(2)本书依据国家颁布的中学数学教学大纲的教学体系,结合现行中学教材编写。(3)本书的目的在于研究如何通过课堂教学,使学生掌握基础知识,基本技能技巧以及发展学生思维、开发学生智力、培养学生能力。(4)本书每章开头有一篇教材

分析或教学经验方面的文章，概括本章主要内容及其在中学教学中的地位 and 作用，教学目的和要求，重点和难点，并且提出教学建议和课时安排。（5）教案中一般是由教学目的和要求、教学重点和难点、教学过程（包括新课引入、新课、小结、作业）等组成。多数教案比较详尽，从中可以看到作者课堂教学的全过程；少数教案较略，但言简意明，脉络清楚、重点突出，有的同一教学内容附有两个不同特色的教案。

本册由上海育才中学章淳立组织定稿。

感谢北京师范大学数学系曹才翰先生对本书编辑出版的关心和支持。

对本书有什么意见和要求，希望广大读者来信告诉我们。

编 者

目 录

直线和平面	(1)
直线和平面的教材分析	(1)
平面的基本性质	(7)
水平放置的平面图形的直观图的画法	(14)
空间两条直线的位置关系	(19)
平行直线	(25)
两条异面直线所成的角	(29)
直线和平面平行的判定	(35)
直线和平面平行的性质	(40)
直线和平面垂直的判定	(44)
直线与平面垂直的性质	(51)
直线和平面的交角	(55)
三垂线定理	(62)
两个平面平行的判定	(83)
两个平面平行的性质	(87)
二面角	(93)
两个平面垂直的判定	(100)
两个平面垂直的性质	(105)
异面直线上两点间的距离	(110)
复习课 (一) ——线线、线面、面面的位置关系, 判定和性质	(115)
复习课 (二) ——空间的交角和距离	(126)
多面体和旋转体	(133)

多面体和旋转体的教材分析	(133)
棱柱	(139)
长方体	(143)
直棱柱直观图的画法及它的侧面积	(147)
棱锥的概念 性质和正棱锥的侧面积	(153)
棱锥的画法及截面计算	(159)
棱台的概念和性质	(164)
正棱台直观图的画法和侧面积	(169)
圆柱圆锥圆台的性质和画法	(174)
圆柱圆锥圆台的侧面积 (一)	(178)
圆柱圆锥圆台的侧面积 (二)	(182)
球的概念 性质和画法	(185)
球的表面积	(194)
球冠	(198)
棱柱 圆柱的体积	(202)
棱锥 圆锥的体积	(207)
棱台 圆台的体积	(213)
• 拟柱体及其体积	(217)
球的体积	(223)
球缺的体积	(227)
有关球体积的习题课	(233)
多面体和旋转体复习	(239)
• 多面角和正多面体	(266)
多面角的基本概念	(266)
多面角的基本性质	(271)
正多面体	(277)
多面体的变形与欧拉定理	(283)

直线和平面

直线和平面的教材分析

立体几何是研究空间图形（由空间的点、线、面构成，也可以看成是空间点的集合）的性质、画法、计算以及它们的应用的学科。中学里学习立体几何的目的在于使学生系统地掌握空间图形的基本性质，从而掌握一些简单多面体和旋转体的画法、表面积和体积公式，从中培养学生的空间想象能力和逻辑思维能力。

构成空间图形的基本元素是直线和平面，由直线和平面的不同位置关系便构成了具有不同形状和性质的空间图形。因此，空间直线和平面的位置关系既是学习多面体和旋转体的基础知识，又是学生树立空间概念的基础。本章就是专门来研究空间直线和平面的位置关系，所以对本章的理解和掌握得如何，是能否学好立体几何的关键。在教学时应向学生说明这一点。

本章教材分为四大节：平面、空间两条直线，空间直线和平面，空间两个平面。第一大节主要研究平面的基本性质、水平放置的平面图形的直观图的画法；第二大节主要研究空间两条直线的位置关系、平行直线、两条异面直线所成的角；第三大节主要研究直线和平面的位置关系，直线和平面平行的判定和性质、直线和平面垂直的判定和性质、斜线

在平面上的射影、直线和平面所成的角、三垂线定理；第四大节主要研究两个平面的位置关系、两个平面平行的判定和性质、二面角、两个平面垂直的判定和性质。这四大节之间是紧密联系着的。前一大节的内容是研究后几大节内容的理论概括，后一大节内容既巩固了前一大节的知识，又发展和推广了论证的根据。由此逐节的发展和推广，得到了一整套直线和平面位置关系的概念、判定和性质，成为研究具体空间图形的基础。

我们在研究空间图形的时候，往往是将有关的点、线归到一个平面内，再利用平面图形的性质来解决，所以平面的基本性质成了研究空间图形性质的理论基础，也是本章教材的一个重点内容。本章是专门研究空间直线和平面的位置关系的，因此本章的另一个重点内容是直线和直线、直线和平面、平面与平面的平行或垂直关系的判定和性质。

本章教材是在学生已有平面图形知识的基础上来研究空间图形的。从平面观念过渡到立体观念，对一般学生来说困难是大的。因为学生刚学完平面几何，习惯于平面几何的观念，往往从平面几何的角度来理解空间图形的问题，常把空间图形看成平面图形，并且对于在平面内画出空间图形未受过训练。因此，对平面的无限伸展性的理解，水平放置的平面图形的直观图的画法，异面直线的概念和异面直线的交角、距离、二面角的概念成为本章的难点。

根据上述对教材的分析和教学大纲的要求，本章在教学中的基本要求是：

1. 使学生掌握直线与平面的位置关系和本章的知识结构。

因为组成空间图形的基本元素是直线和平面，因此，首先要使学生弄清直线与平面的基本属性（平面的三个公理及确定平面的三个推论），其次，要明确这两种“元素”的相互关系（线线、线面、面面的相关位置），能从“定性”与“定量”两个方面去认识它们的相互关系。定性方面就是指“元素”之间的关系（垂直与平行）的判定和性质；定量方面是指不同位置之间内在联系的数量分析，这种数量分析就是通过对角（线线角、线面角、面面角）和距离（二点间距离、点线间的距离、点面间距离、线线间距离和面面间距离）的计算来完成的。在数量分析中要特别注意掌握三垂线定理的应用。

2. 培养学生空间想象能力。

由于空间图形有长、宽、高三度，而研究空间图形的性质是在二度的纸上进行的，这样就存在用二度的纸来表示三度的空间图形的矛盾。这个矛盾的解决就能形成学生的空间想象力。因此，在教学中要对学生提出看图和画图的能力要求，具体的是：

(1) 会用平行四边形表示平面及掌握水平面内画平面图的方法。会用平面衬托法画异面直线。

(2) 会画两个或三个平面相交的空间图形。

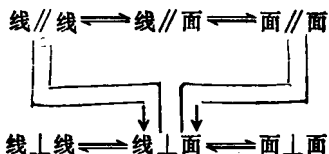
(3) 会添一些线、面作出各种线线交角、线面交角、二面角的平面角。会作出可利用三垂线定理的图形。

(4) 会看一般画在水平面上的空间图形，特别要能识别同一图形的各种不同位置的情况，从中找出线、面的主要关系。

3. 学会解决空间图形的各种问题的思想方法。

(1) 矛盾转化是数学中的一个基本思想。在本章教材中这种思想的反映十分明显，表现在：

① 空间线面位置关系的转化。从线面位置关系的判定定理和性质定理中，我们可看到面面关系的判定可转化为线面关系的判定，而线面关系判定又可转化为线线关系的判定，我们把这种转化称为“降维”转化。反之也存在“升维”转化，即线线关系判定可转化为线面关系的判定，而线面关系的判定又可转化为面面关系的判定。又垂直与平行的判定也可相互转化。这些转化可表示为：



② 立几问题转化为平几问题。这种转化有两个方面：其一是空间线面中的某些概念是借助于平几中的概念来定义的，例如二面角的大小就用它的平面角的大小来定义的。其二是空间线面关系的论证和计算常常通过辅助线或辅助面，将已知条件和未知条件集中在一个平面内，而转化为平面问题来处理。

这两种转化方法通过本章教学要让学生掌握。

(2) 教学生学会对比的方法。任何知识都必然与其他知识联系着，但又别于其他知识，在教学中应指导学生抓住这些区别与联系，学会利用对比和类比的方法来学习线面的位置关系。这种对比可在线面关系的定性研究方面（如线面平行的判定定理和面面平行的判定定理的证明（反证法）和空间图形的性质的讨论方面（与平面图形性质作比较）进行。

(3)学会分析、综合的思维方法和间接论证的方法。分析与综合是逻辑论证的核心，是解数学题的重要的方法，通过本章线面位置关系的论证，使学生在掌握这二种方法程度上有提高。同时本章线面的位置关系的判定定理中有多条定理采用间接证法，较多是用反证法，也有个别用同一法（教科书中未出现这个名称）。因此对反证法的原理、论证方法和步骤、书写和表达应作为要求学生掌握的内容，并要求学生会使用反证法证明一些比较简单的问题。同一法可不作要求。

根据上述教学要求，在本章教学中应把侧重点放在学生的“学”上。通过教师的启发引导、点拨解惑促使学生自己思考，通过相互议论来理解并掌握所学内容，从而提高学生的空间想象能力。空间想象能力的培养和形成，只有通过学生自己的思维才能实现。这是本章的教学指导思想。

在具体教学过程中，在教法上应注意几点：

1. 引入实例来启发学生。由于学生自身的生活经历中已积累了一些空间图形和线面位置关系的感性知识，因此，教师在教学中可先引入有关的实例，启发学生从所得到的一些模糊的无条理的感性素材中提炼，整理升华为理性知识。这样做可减少学生因感到抽象而带来的困难，提高了学生学习的积极性。

2. 合理应用模型。模型是具体与抽象二者间的中介，对实物来说，模型已初步抽象化了，所以，使用模型就能为学生从感性素材抽象出理性的概念架起一座桥梁。特别在本章教学中，充分利用模型是一种极重要的教学手段。如立方体骨架模型，平板、橡皮泥、竹针搭成所需模型都是教学的

帮手。当然，模型使用了一段时间，当学生已形成了一些空间想象能力后，就应逐渐减少使用，因为当学生已初步积累了一些立体几何知识，再大量使用模型就不利于学生空间能力的培养。但对学生不易想象或不熟悉的空间图形还是应用模型来帮助教学。

3. 教学中要根据前面提出的要求，加强学生的识图和画直观图的训练。

4. 加强论证、计算书写表达的规范化的训练，为此可多让学生板演，并组织集体批改板演。其中特别应向学生指出添置线、面时作法要合理，要注意利用线面位置关系的性质来作图。

在课本使用中应注意两点：

1. 课本中定理和例题的论证有的采用双箭头证明格式，一般是用于所证问题比较简单而且采用直接证法的情况。教学中不强求学生使用。

2. 课本中借用一些集合符号如 $\in$ 、 $\notin$ 、 $\subset$ 等来叙述线面关系，但在符号的读法上仍用几何语言，而不用集合语言。如 $A \in \alpha$ 读作点A在平面 α 内。

本章教学时间约需27课时，具体分配如下（供参考）：

1.1 平面（引言）	}	约2课时
1.2 平面的基本性质		
1.3 水平放置的平面图形的直观图的画法		约1课时
1.4 两条直线位置关系		约1课时
1.5 平行直线		约2课时
1.6 两条异面直线所成的角		约2课时

1.7 直线和平面的位置关系	}	约3课时
1.8 直线和平面平行的判定和性质		
1.9 直线和平面垂直的判定和性质		约2课时
1.10 斜线在平面上的射影、直线和平面所成角		约2课时
1.11 三垂线定理		约2课时
1.12 两个平面的位置关系	}	约3课时
1.13 两个平面平行的判定和性质		
1.14 二面角		约3课时
1.15 两个平面垂直的判定和性质		约3课时
小结和复习		约3课时

说明：(1) 1.1、1.7、1.12 三节未给出教案。

(2) 有几个小节用 2 课时，但后面只给出一教案，是请读者根据自己学校情况，如学生基础好，一个教案可一课时完成，如学生基础不好，则根据实际情况将教案分成二部分，分二节课上。

上海市育才中学 章淳立

平面的基本性质

教学目的

使学生正确理解和掌握平面的基本性质。

教学重点和难点

重点：掌握平面的基本性质。难点：证明空间点和直线的共面。

教学过程

一、新课引入

在开始学习平面几何时，着重研究了点、直线的基本性质，然后以此为基础，进行进一步的推理。在立体几何中，点、直线、平面是空间图形的基本元素，除了原有的点和直线的基本性质外，还要规定平面的基本性质，把它们当作公理，作为进一步推理的基础。

二、新课

1. 在什么样的条件下，一条直线上所有的点都在一个平面内。

公理 1 如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内（图1-1）。

这时我们说直线在平面内，或者说平面经过直线。

例如，把一根直尺边缘上的任意两点放在平的桌面上，可以看到直尺边缘就落在桌面上，这就是应用公理 1 判定直线是否在平面内。

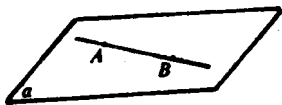


图1-1

又如，木工用直尺边检查所刨的木板平不平及泥水工人用木条的直边刮平地面，这就是应用公理 1 检查一个面平不平。

关于公理 1 可以使用集合的符号把它简明准确地表达出来。只把点作基本元素，于是直线、平面都可看作“点的集合”。规定用大写拉丁字母 A, B, P 等表示点，用小写拉丁字母 a, b, l 等表示直线，用小写希腊字母 α, β, γ 等表示平面。如点 A 在直线 a 上，记作 $A \in a$ ；点 A 在直线 a 外，记作 $A \notin a$ ，点 A 在平面 α 内，记作 $A \in \alpha$ ，点 A 在平面 α 外，记作 $A \notin \alpha$ ，直线 a 在平面 α 内，即 a 是 α 的

子集，记作 $a \subset \alpha$ ；直线 a 不在平面 α 内，记作 $a \not\subset \alpha$ 。

公理 1 的集合形式表示为：若 $A \in a$, $B \in a$, $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, 则 $a \subset \alpha$ 。

公理 1 的图形表示如图 1-1 所示、图 1-2、图 1-3 是学生初学时常会画错的图形，应提醒学生注意其错误的原因。

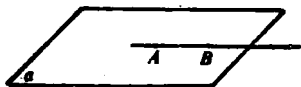


图 1-2

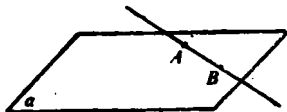


图 1-3

2. 两个平面在什么样条件下存在公共直线。

用一块木板（设它代表一个平面），使它与桌面（也代表一个平面）有一个公共点，请学生回答“这两个平面是否还有其他公共点？公共点有多少？”提醒学生注意平面有无限延展的特性。回答后，请学生观察教室内相邻的墙面，在墙角处交于一个点，它们就交于过这个点的一条直线。由此归纳出公理 2 内容。

公理 2 如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线（图 1-4）。

公理 2 中“有且只有一条”的含义是：“有”说明直线是存在的，“只有”说明直线是唯一的。

如果两个平面 α 和 β 有一条公共直线 a ，就是说平面 α 和 β 相交，交线是 a ，则可记作 $\alpha \cap \beta = a$ 。

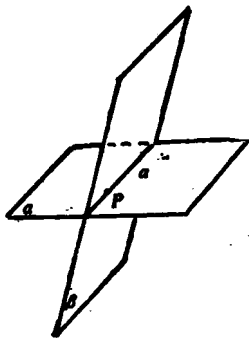


图 1-4

因此公理 2 可表示成如下形式:

若 $A \in \alpha$, $A \in \beta$, 则 $\alpha \cap \beta = a$, 且 $A \in a$.

由公理 2 可见: 两个平面如果有一个公共点, 那么就有无穷多个公共点, 所有公共点在公共直线上, 即它们的交线上; 交线上的每一个点都是两平面的公共点.

3. 两点确定一直线, 几个点确定一个平面?

一扇门用两个铰链和一把锁就可以固定了; 测量上用的平板仪用三脚架就可固定了. 从实例可归纳出公理 3 的内容.

公理 3 经过不在同一条直线上的三点, 有且只有一个平面 (图 1-5).

过 A, B, C 三点的平面
又可记作“平面 ABC ”.

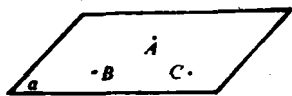


图 1-5

下面我们来讨论一个问题: 过空间一点、两点、三点、四点、可以有多少个平面?(请学生回答)

过一点、两点、在同一直线上的三点或四点都可以有无数个平面; 过不在一直线上的三点有且只有一个平面; 一般情况下, 过四点不一定有平面, 如图 1-6 所示的教具, 不存在一个平面过 A, B, C, D 四点.

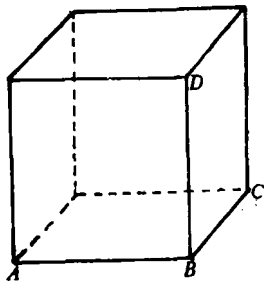


图 1-6

根据上述公理, 可以得出
下面的推论:

推论 1 经过一条直线和这条直线外的一点, 有且只有