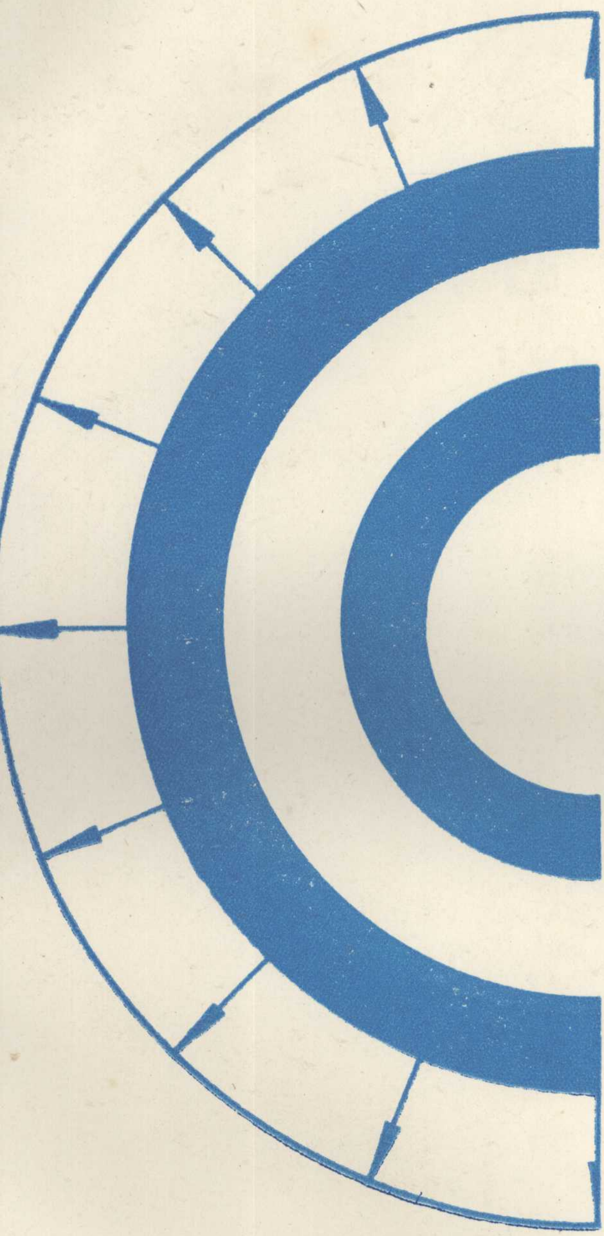
高等学校教学用书



TAN
XING
LI
XUE

弹性力学

万德连　编

中国矿业大学出版社

高等学校教学用书

弹　性　力　学

万德连　编

中国矿业大学出版社

内 容 提 要

本书系统讲解弹性力学的基本概念和理论，着重介绍弹性力学各种求解方法，其中对材料力学初等解法作了详细的论述。为适应采矿专业的需要，书中结合采矿工程中的力学现象，举例说明弹性力学在采矿工程中的应用。全书共分八章，主要内容为：弹性力学的基本概念，平面直角坐标问题及求解(位移法、应力法、逆解法、半逆解法、半逆解法的材料力学初等解法等)，平面极坐标问题及求解，复变函数法，空间问题及求解等。

本书是采矿工程各专业的通用教材(教学计划40学时左右)，亦可供相应专业的科研、设计和工程技术人员参考。

责任编辑：阎前辉
责任校对：关湘雯

高等学校教学用书
弹 性 力 学
万德连 编

中国矿业大学出版社出版
江苏省新华书店经销　中国矿业大学印刷厂印刷
开本787×1092毫米1/16　印张9.25字数223千字
1990年8月第一版　1990年10月第一次印刷
印数：1—3000册

ISBN 7-81021-392-X

O·14　定价：1.90元

前　言

本书根据采矿工程的特点，突出了弹性力学解题方法的论述，详细介绍了每个方法解题的步骤。本书提出了一种学生易于理解和掌握的材料力学初等解法，这是本书区别于其他同名教材的特点之一。为了适应专业的需要，书中列举了一些采矿工程中的问题，围绕这些例题说明应用弹性力学解算实际问题的过程，对于各种概念，也结合采矿工程的力学现象作了说明，这是本书的第二个特点。在讨论各种解题方法时，作者根据多年的教学经验，力求概念清楚，层次分明，条理性强，给读者以清晰的思路，这是第三个特点。

本书是在使用多年的讲义的基础上，经过三次修改、补充而编写成的。但因作者的教学和学术水平所限，书中难免有不妥和错误之处，欢迎读者提出批评指正。

编　者

1989年秋

目　录

第一章　基本概念

§1-1　弹性力学的任务

弹性力学是研究弹性体在外力作用下或由于温度改变等原因所产生的应力、应变和位移。

弹性体，在这里应理解为变形处于弹性阶段的物体。像低碳钢这类塑性材料，它具有明显的弹性变形阶段和塑性变形阶段，因而，很容易确定弹性体的含意及变形范围。但是，像岩石一类的脆性材料，却没有明显的弹性变形和塑性变形的界限，实际上只能采取近似的方法来划定弹性变形的范围。

研究弹性体，如各种结构构件或机器零件的应力、变形和位移，其目的是为了分析构件的强度和刚度，确定它的工作状态，以便提高工作的可靠性和安全度。但在工程中也会遇到相反的问题，分析弹性体的应力、应变和位移是为了更有效地破坏物体，用最少的能耗取得最大的效益，如爆破工程，隧道、井巷掘进，煤岩破碎等就属于这类问题。

弹性力学与材料力学属于同一学科，两者的任务是一样的，但在研究对象和研究方法上则有所不同。材料力学只研究杆，而且，基本上是等直杆，分析这类杆件在不同受载时横截面上的应力和变形；由于方法上的限制，杆件横截面的形状也不是复杂的。弹性力学的情况就不相同，它研究的对象比较广泛，不仅包括各种形状的杆件，还包括板、壳和实心体。从方法上来说，材料力学采用了平面假设，或其他的一些简化条件，如截面形状的对称性、长宽高的比例，等等。弹性力学则从最普遍的情况出发，严格建立基本方程，并由边界条件求解，摒弃了平面假设和其他简化条件；在建立弹性体的平衡条件时，材料力学是截取一段杆件作为隔离体，得到的结果是整段的平衡，而弹性力学则是截取一微小单元体作为隔离体，得到的结果是任意一点的平衡。因而，弹性力学的方法在理论上更具有严密性，在应用上更具有广泛性。

弹性力学内容包括三部分，即基本理论、求解方法和工程应用。基本理论是论述弹性体的应力、应变及位移的基本方程和相关的问题，这些基本方程是：静力平衡条件、变形几何方程、物理方程，以及问题的边界条件。为了适应各种不同形状的弹性体，在研究基本方程和求解时是按照平面直角坐标系、平面极坐标系、空间直角坐标系、球坐标系和柱坐标系几种情况分别论述的。

求解方法是研究如何由基本方程和问题的边界条件来求出未知函数。根据选用的未知量，把求解方法分为应力法和位移法。前者是以应力作为未知量，后者是以位移作为未知量。在应力法中，又分为逆解法、半逆解法和混合解法。而从数学方法来说，又分为多项式解法、三角级数法、复变函数法、差分法、变分法、积分变换法以及有限元法等。

工程应用是讨论弹性力学的理论、方法和结果在各种工程问题中如何应用的问题，采取分散论述的方式，对每个基本理论结合工程实例说明应用的过程。本书列举了一些

采矿工程的应用实例，以满足专业需要。

弹性力学还是固体力学其他分支的基础，如塑性力学、断裂力学、光测弹性法、流变理论等，都要直接用到弹性力学的一些基本方程和求解方法；有些介质的变形是由弹性变形发展到塑性变形，对于处于弹性变形的阶段的应力和变形，必须按弹性力学的理论求解。可见，弹性力学的用途是十分广泛的。

§1-2 弹性力学与采矿专业的关系

弹性力学是采矿工程各专业，如地下开采，矿井建设、露天开采专业的一门重要的技术基础课，它不仅是多门后续课程的基础，而且对解决采矿生产中的实际问题、对开展采矿科学的研究也具有重要意义。

许多重要的专业课，如岩石力学、矿山压力理论、露天边坡稳定性理论、岩层移动等等，其理论基础就包含弹性力学。在分析巷道围岩的应力与变形，确定回采工作面顶板的下沉与冒落，在计算立井井壁的应力等问题时，或者要直接采用弹性力学的基本方程，或者要应用弹性力学的结果。因此，掌握弹性力学的理论和方法将为以后学好许多专业课打下坚实的基础。

在采矿施工过程中出现的许多力学现象，如冒顶、底鼓、冲击地压、岩层移动等，往往要用到弹性力学的理论来分析这些现象形成的机理、发展规律和影响因素等问题。对于用数学模拟、物理模拟，或现场实测方法来研究上述问题，也需要以弹性力学的理论作指导。因此，弹性力学又是解决采矿的生产问题和进行研究的一种重要工具。

当然，采矿工程中的力学问题是十分复杂的，表现为介质的多样性、地质条件的多变性、影响因素的不稳定性，单靠弹性力学一门课程不能完满地解决问题，必须多学科配合，相互渗透和补充，才能收到良好的效果。

§1-3 弹性体的基本假设

工程中使用的材料是多种多样的，其成份、结构、内部组织存在较大差异，因而，弹性体受载后反映出来的力学行为或力学现象可能很不一样。可是，在研究弹性体受力后所产生的应力和变形时，不应局限于一种特殊的材料，总希望从最普遍的情况出发，使建立的理论具有更广泛的适用性。因而，不得不对弹性体作出一些假设，抓住主要的、本质的因素，略去次要的、非本质的因素，一方面使问题简化，另方面又保留事物的本质。

对弹性体的基本假设有以下几条：

1. 均匀连续性假设

所谓连续性是指整个物体的体积都被组成该物体的介质充满而不留任何空隙，因而，应力、应变和位移等物理量都是点的坐标的连续函数。所谓均匀性，是指物体由同一材料组成，各部分具有相同的物理力学性质，材料的弹性模量 E、泊松比 γ，强度极限等都是一个定值，它们不随点的位置而变化。

2. 各向同性假设

各向同性是指材料的力学性质与方向无关，其弹性常数、强度极限在任何方向都具有相等的数值。对于许多非结晶材料，如橡胶、塑料等，具有比较明显的各向同性性

质，对于钢铁及其他金属材料，虽然是晶体材料，但由于晶体微小而且呈不规则的排列，所以，在宏观上仍表现为各向同性。

3．完全弹性假设

物体在卸除外力后能恢复到未受外力时的原来形状的性质，称为弹性。完全弹性则表明卸除外力后能完全恢复到受力前的原形而没有任何残余变形。一般的，弹性体服从虎克定律，即应力与应变成正比关系，而且，物体在任一瞬时的变形完全取决于它在这一瞬时所受的外力，与它的受力历史无关。

4．小变形假设

小变形的假设认为，物体在受力后，各点的位移都远小于物体原来的尺寸，应变和转角都远小于1。这样，在研究物体发生变形以后的平衡条件时，可以按变形前的尺寸，认为外力作用于物体上的方向没有改变。并且，在研究物体的变形和位移时，应变和转角的二次幂项或乘积项都可略去不计，使弹性力学的基本方程得以简化。

对于上面的基本假设，应当辩证地看待。一方面它反映了事物的本质，符合许多材料的力学性质；但是，另一方面这些假设的正确性又是相对的、有条件的，不能对什么材料都采用这些假设。例如，在采矿工程中经常遇到的岩石和煤，一般说来，它既不是均匀连续的，也不是各向同性的，而是力学性质十分复杂的材料。如果盲目采用上述的假设，计算结果将会产生较大的误差，甚至可能得到错误的结论。当然，作为一种近似的处理问题，有时也把岩石看成是均质弹性体或均质弹性塑性体。

§1-4 弹性力学的基本概念

在材料力学中已经详细讨论过外力、应力、位移和应变的概念，这里再作简要的重述。

一、外力

根据外力作用的方式，可以将它分为体力和面力。体力是一种场力，分布于弹性体的体积内，物体的自重、运动物体的惯性力均是体力。研究采场地压、巷道围岩的应力等问题，上覆岩层的自重就是体力，而且也是外力。弹性体内任意一点体力的大小用体力的集度来表示，即单位体积上外力的大小。通常是围绕该点截取一微小体积 ΔV，若作用在 ΔV 上的总体力为 ΔQ，则该点体力的集度可用平均体力的极限来表示

$$F=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta V} \tag{1-1}$$

体力的因次是[力][长度]$^{-3}$。体力在坐标轴 x、y、z 上的投影分别用 X、Y、Z 表示，称为体力沿坐标轴的分量，简称体力分量。体力分量的正负号是这样规定的：沿坐标轴正向的体力分量为正，沿坐标轴负向的体力分量为负。

面力是分布在弹性体的表面上的力，分为按面积分布和按线段分布。如果面力分布在非常小的面积范围，可简化为作用于一点的集中力。例如，围岩作用于井壁的压力是分布在井壁外表面的分布面力，而单体支架对工作面顶板的支撑力可简化为一集中力。弹性体表面上任一点面力的大小可用面力的集度、或单位面积上面力的大小来表示。围绕该点截取一微小面积 ΔA，若作用于 ΔA 上的总面力为 $\Delta \bar{Q}$，则该点面力的集度定义为平均面力的极限，即

$$\bar{P}=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta \bar{Q}}{\Delta A} \tag{1-2}$$

面力的因次为[力][长度]$^{-2}$。面力在坐标轴 x、y、z 上的投影分别用 $\bar{X}$、$\bar{Y}$、$\bar{Z}$ 表示，称为面力沿坐标轴的分量，简称面力分量。面力分量正负号的规定是：沿坐标轴正向的面力分量为正，沿坐标轴负向的面力分量为负。

体力和面力沿坐标轴的分量用的是同一字母 X、Y、Z，但在面力分量字符的上面加一横线"—"，以示两者的区别。本书在以后各章节，如无特别说明，均按此规定。

二、应力

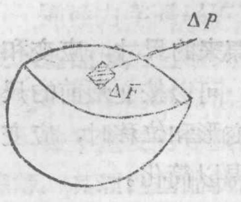


图1-1

受力弹性体内一点内力的集度，或单位面积上内力的大小，称为该点的应力，为了表示一点的应力，通常是想象地用一截面将弹性体截开，并在待求应力的点截取一微小面积ΔF，如图1-1所示。

若作用于微小面积 ΔF 上的内力为 ΔP，则 ΔF 单位面积上的内力为

$$\Delta \bar{p}=\frac{\Delta P}{\Delta F}$$

称为平均应力，令 ΔF 趋近于零，则平均应力的极限就表示该点应力的大小，即

$$p=\lim_{\Delta F\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta F} \tag{1-3}$$

应力 p 是一个矢量，它的方向应与 ΔP 的作用方向一致。为了说明变形的性质和材料破坏的机理，通常将应力 p 沿截面的法线方向和切平面分解，沿截面法线方向的应力分量称为正应力，用字符 σ 表示，而沿截面切平面的应力分量称为剪应力，用字符 τ 表示。三者间的关系为

$$p^2=\sigma^2+\tau^2 \tag{1-4}$$

为了表明应力作用在什么方位的截面上，常常在正应力的字符下标注σ作用截面的外法线方向，如σ_x，下标 x 就表示正应力作用于外法线是 x 轴的截面上。对于剪应力，还需要在切平面内将它沿两个正交的坐标轴分解，成为两个分量，因而，为了表明剪应力分量作用的截面及其指向，在剪应力字符下应标注 τ 作用截面的外法线方向和 τ 沿哪个坐标的分量，这样就需要两个下标，例如 τ_{xy}，第一个下标 x，表示剪应力作用于外法线是 x 轴的截面上，第二个下标 y 则表示剪应力沿 y 轴的分量，即指向沿 y 轴的分量。

在弹性力学中，应力的正负号按下面的规定来确定：若截面的外法线方向与坐标轴的正向一致，则该截面的应力分量就以指向与坐标轴正向一致者为正，而指向与坐标轴负向一致者为负；若截面的外法线方向与坐标轴的负向一致，则该截面的应力分量就以指向与坐标轴负向一致者为正，而指向与坐标轴正向一致者为负。图 1-2 所示的应力分量全部为正。需要强调，应力分量正负号的规定是人为的，常由解题的方便性来定，例如，在岩石力学中，规定压应力为正，拉应力为负，剪应力正负号的规定与上述规定恰相反。

应力的因次是[力][长度]$^{-2}$。

弹性体内的应力，一般说来都是点位置坐标的函数，即

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}(x,y,z) \tag{1-5}$$

点与点之间，其应力的大小、方向都可能不同，为了表示任意一点的应力状态，在材料力学中采用应力单元体的表示方法。即在该点截出一个平行于坐标轴的微小正六面体，在每个坐标平面上，将应力分解为一个正应力分量和两个剪应力分量，这样的微小正六面体称为应力单元体，如图1-2 所示。图中，只绘出了前三个坐标平面上的应力分量，后三个平面的应力分量没有绘出。在六个剪应力分量中，仍然服从剪应力互等定理，即在一点的两个互相垂直的平面上，其剪应力在数值上相等，而指向则相反，且垂直于两平面的交线，因而，剪应力分量具有关系

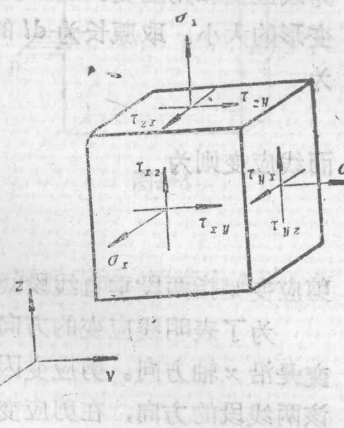


图1-2

$$\tau_{xy}=\tau_{yx},\quad \tau_{yz}=\tau_{zy},\quad \tau_{xz}=\tau_{zx} \tag{1-6}$$

于是，一点的应力状态可以用六个应力分量确定的应力单元体来表示，六个坐标平面上的应力分量构成一个应力矩阵，表示为

$$\mathbf{T}_\sigma=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z\end{bmatrix} \tag{1-7}$$

$\mathbf{T}_\sigma$ 也称为应力张量。

三、位移

弹性体受力后，由于产生变形，将使弹性体各点位移。例如，图1-3 的弹性体内任意一点M，变形前的位置在M，变形后它移至位置M'，则M、M'之间的距离就是点M的位移，表示为

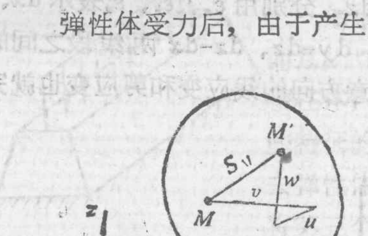


图1-3

$$\mathbf{S}_M=MM'$$

位移是一个矢量，它沿坐标轴 x、y、z 的投影分别用 u、v、w 表示，称为位移分量。一般地，位移分量是点位置坐标的函数，即

$$\left.\begin{aligned}u&=u(x,y,z)\\ v&=v(x,y,z)\\ w&=w(x,y,z)\end{aligned}\right\} \tag{1-8}$$

位移正负号是这样规定的：若点的位移分量是沿坐标轴的正向，则定为正，若位移分量沿坐标轴的负向，则定为负。

位移的因次是[长度]。

弹性体除了变形会引起各点的位移外，还可产生刚体位移。刚体位移包含线位移和角位移，它是弹性体的整体位移，这种位移不会影响弹性体各点的应力和应变，因而，常常略去不计。

四、应变

弹性体受力后要产生形状的改变，称为变形。不论弹性体的变形怎么复杂，它总是

由线段的变化和角度的变化组合而成。线段长度的变化称为线变形，角度的变化称为角变形。

为了度量变形的大小，材料力学提出了应变的概念。应变是指相对变形的大小，分为线应变和角应变。线应变也称正应变，角应变也称为剪应变。线应变是指单位长度线变形的大小。取原长为 dl 的微小线段，变形后长度变为dl'，因而，微小线段的线变形为

$$\Delta(dl) = dl' - dl$$

而线应变则为

$$\varepsilon = \frac{\Delta(dl)}{dl} \tag{1-9}$$

剪应变是指两段垂直线段间直角的变化，用字母 γ 表示。

为了表明线应变的方向，通常是在线应变字符 ε 标注下脚标，如ε_x，下标 x 表示线应变是沿 x 轴方向。剪应变因为是相互垂直的两段线段之间直角的变化，因而，需要标注该两线段的方向，在剪应变字符 γ 应标注两个下脚标，如 γ_{xy}， 下标xy表示沿 x 和沿 y 轴方向的两线段之间直角的变化。

线应变或正应变是由于正应力引起的，剪应变是由于剪应力引起的。为了使正应变的正负号与正应力正负号的规定相适应，规定伸长的正应变为正，缩短的正应变为负；对于剪应变则规定：直角变小时的剪应变为正，变大者为负；以与剪应力正负号的规定相适应。

正应变和剪应变都是无因次的物理量。

与一点的应力状态相对应，变形也提出了一点的应变状态的概念。在弹性体内任一点沿坐标轴 x、y、z 方向取三个微小的线段 dx、dy、dz，分别用 ε_x、ε_y、ε_z表示 dx、dy、dz 方向的正应变，用 γ_{xy}、γ_{yz}、γ_{zx} 表示 dx-dy、dy-dz、dz-dx 两线段之间的剪应变，如果这 6 个应变分量已经知道，则过该点在任意方向的线应变和剪应变也就完全可以确定。6 个应变分量构成一个应变矩阵，表为

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{1-10}$$

$\mathbf{T}_\varepsilon$ 也称为应变张量。

§1-5 弹性力学的平面问题

弹性力学的问题，在一般情况都是空间问题。空间问题包含 6 个应力分量、6 个应变分量和 3 个位移分量。这些都是待求的未知函数。因而，空间问题有15个未知函数，而每个未知函数又都是 3 个坐标变量 x、y、z 的函数。这样求解起来就十分困难，只有极简单的一些问题才能求出解答。

但是，如果弹性体是某种特殊的几何形状，受到的外力也具有特殊的分布状况，这时，空间问题可以简化为平面问题。平面问题的特点是弹性体沿某个方向的应力或应变

等于零或等于常数，而在垂直于该方向的任何一个平面内的应力和变形都相同，因而，求出其中一个平面内的应力和变形就知道整个弹性体的应力和变形。平面问题分为平面应力问题和平面应变问题。

一、平面应力问题

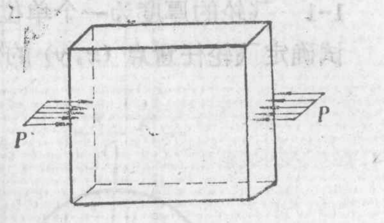


图1-4

如果弹性体的纵向尺寸远小于横向的两个几何尺寸，而且它的几何形状沿纵向又不发生变化，如图 1-4 所示的薄板，若受到沿纵向不变的外力作用，或外力虽沿纵向变化，但对称于板的中间平面，这样，弹性体沿纵向的变形可认为是自由的，在该方向不产生应力。因而，将第三个方向没有应力的问题称为平面应力问题。

现在，将弹性体的纵向（厚度方向）取为 z 轴，平行于表面的平面（垂直于 z 轴）为 xoy 平面，这样，平面应力问题的特点可表示为

$$\sigma_z=0,\ \tau_{yz}=0,\ \tau_{zx}=0 \tag{1}$$

$$\varepsilon_z=-\frac{\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y) \tag{2}$$

于是，平面应力问题包含 8 个独立的未知函数，即 σ_x、σ_y、τ_{xy}; ε_x、ε_y、γ_{xy}; u, v。每个未知函数都是坐标变量 x、y 的函数。

采矿工程中经常会遇到平面应力问题，如天轮各部分的应力，U 形可缩金属支架等。

二、平面应变问题

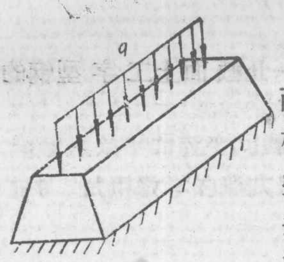


图1-5

如果弹性体的纵向尺寸大于其他两个垂直方向的尺寸较多，而且，它的几何形状沿纵向都是相同的，如图 1-5 所示的等直棱柱体；另外，位移约束或支承条件沿纵向也是一样的。具有这些特征的弹性体，若受到沿纵向不变的外力作用，可以认为，除去弹性体端部外，其中间部分不产生纵向的位移或应变，因而，将第三个方向没有应变的问题称为平面应变问题。

若将弹性体的纵向（长度方向）取为 z 轴，而垂直于纵轴的平面为 xoy 平面，于是，平面应变问题的特点可表示为

$$\left.\begin{aligned} w=0 \quad \varepsilon_z=0 \\ \gamma_{yz}=0 \quad \gamma_{xz}=0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

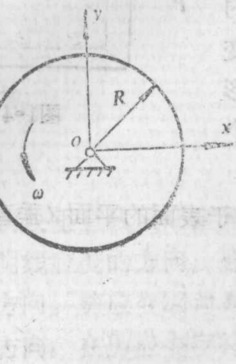
$$\sigma_z=\nu(\sigma_x+\sigma_y) \tag{4}$$

由剪应变 $\gamma_{yz}=0$、$\gamma_{xz}=0$ 及虎克定律，可推断剪应力 $\tau_{yz}=0$，$\tau_{xz}=0$。这样，平面应变问题也包含 8 个独立的未知函数，它们是：σ_x、σ_y、τ_{xy}; ε_x、ε_y、γ_{xy}; u、v。每个未知函数都是坐标变量 x、y 的函数。

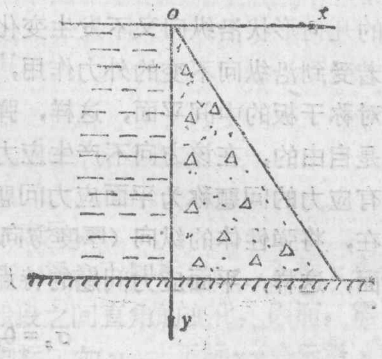
采矿工程中也经常遇到平面应变问题，求解各种形状的水平巷道的围岩应力场和变形场就是一例，其它如回采工作面顶板的压力、挡土墙等问题均属平面应变问题或可简化为这一类问题。

习 题

1-1 飞轮的厚度为一个单位，半径为R，密度为ρ，飞轮绕中心o作等角速度ω旋转，试确定飞轮任意点(x, y)的体力和外圆周表面上的面力。



习图1-1

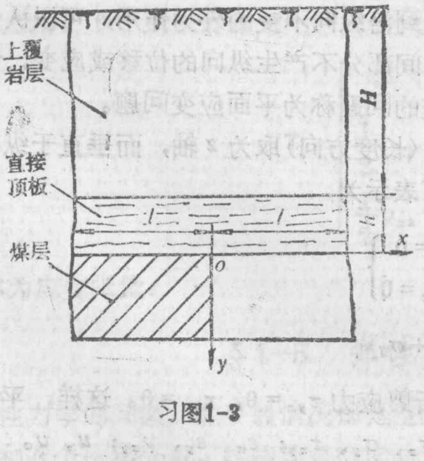


习图1-2

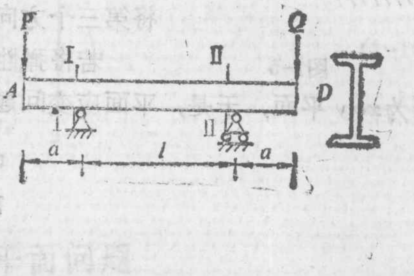
1-2 三角形挡水墙，左侧受有水压力作用，挡水墙的重度为ρg，水的重度为γ，试确定挡水墙的体力和左侧边的面力。

1-3 回采工作面直接顶板的高度为h，容重为γ_1，上覆岩层看成均质整体，高度为H，容重为γ。若煤层对顶板的支反力按$q(x) = \dfrac{(l-x)}{l} q_0$分布，试确定在$-l \leqslant x \leqslant l$范围内，直接顶板的体力和上、下边界的面力。

1-4 工字梁AD，受有载荷P、Q $(P=2Q)$，试绘出Ⅰ-Ⅰ、Ⅱ-Ⅱ截面上工字型钢的腹板与上翼缘交接处的应力单元体，并决定各应力分量的正负号。



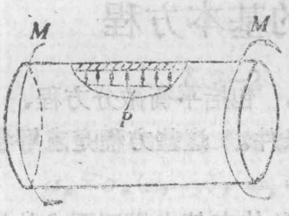
习图1-3



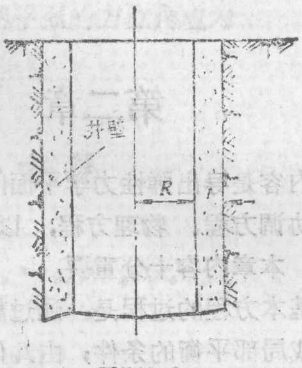
习图1-4

1-5 两端封闭的薄圆管，内径d、厚度δ，受有内压力p及扭矩M的作用，若略去径向应力，试绘出壁上任意点的应力单元体，并确定各应力分量的正负号。

1-6 立井井壁，圆形，半径为R，厚度t，外圆周作用均匀的地压p，另沿z方向作用自重γ，试绘出距地表为z处外圆周表面点的应力单元体，并确定应力分量的正负。

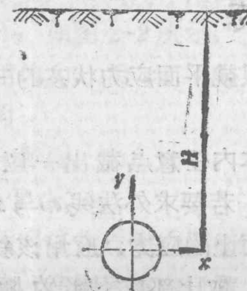


习图1-5

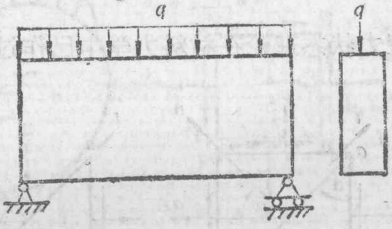


习图1-6

1-7　在地层深度H处挖一圆形巷道，若求巷道周围区域在上覆岩层重量作用下引起的应力和变形，试分析这是平面应力问题还是平面应变问题。



习图1-7



习图1-8

1-8　简支梁，在纵对称平面内作用均布载荷 q，欲求梁内的应力，试分析这是平面应力问题还是平面应变问题。

1-9　试用数学的形式表示各向同性及各向异性的定义。

第二章　平面问题的基本方程

本章内容是导出弹性力学平面问题的基本方程，包括平衡微分方程、变形几何方程、变形协调方程、物理方程，以及问题的边界条件。这些方程是求解各种问题的基础，因而，本章内容十分重要。

建立基本方程的过程是：通过静力学分析列出物体在外力作用下或其他因素影响下保持整体或局部平衡的条件；由几何分析确定变形分布规律及应变与位移的关系；由物理学分析建立应力与应变的关系。在学习材料力学时已接触到这个过程，例如，推导圆轴扭转时的剪应力公式和梁的弯曲正应力公式就是按这种程序进行的。下面各节，也按这个过程导出基本方程。

§2-1　一点的应力状态

应力状态理论在材料力学中已作过详细研究。这里只就平面应力状态的一些结果作简要介绍。

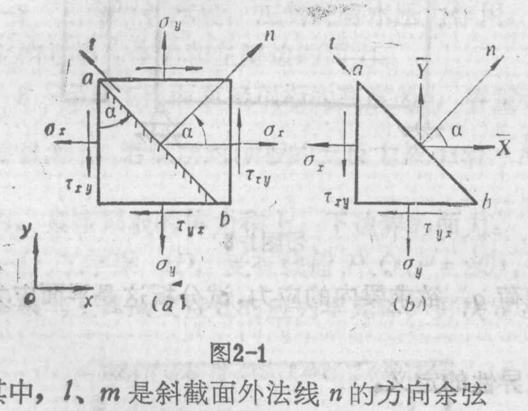


图2-1

由物体内任意点截出一应力单元体(图2-1a)，若要求外法线n与x轴成α夹角的斜截面上的应力，应用该斜截面将单元体截开，取上部或下部为隔离体(图2-1b)，由平衡条件：$\sum X=0$和$\sum Y=0$，求得斜截面上的应力为

$$\left.\begin{aligned}\overline{X}&=\sigma_x l+\tau_{yx}m\\ \overline{Y}&=\tau_{xy}l+\sigma_y m\end{aligned}\right\}\tag{2-1}$$

其中，l、m是斜截面外法线n的方向余弦

$$l=\cos(n,\ x),\quad m=\cos(n,\ y)$$

将$\overline{X}$、$\overline{Y}$向法线n和切线t投影，求出斜截面上的正应力和剪应力为

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha&=\overline{X}l+\overline{Y}m=\sigma_x l^2+\sigma_y m^2+2\tau_{xy}lm\\ \tau_\alpha&=\overline{Y}l-\overline{X}m=\tau_{xy}(l^2-m^2)+(\sigma_y-\sigma_x)lm\end{aligned}\tag{2-2}$$

式(2-2)表明，对于一定的应力状态，斜截面上的应力是该截面方位角α的函数，因而，应用求极值的方法，可以求出最大和最小的正应力，亦即主应力为

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}\tag{2-3}$$

$\sigma_{\max}$取“+”号，$\sigma_{\min}$取“−”号。主平面的方位角α_0为

$$\alpha_0=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}\tag{2-4}$$

再对剪应力应用求极值的方法，求出最大和最小的剪应力为

$$\left.\begin{matrix}\tau_{\max}\\ \tau_{\min}\end{matrix}\right\}=\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}\tag{2-5}$$

τ_{max} 取“+”号，τ_{min} 取“-”号。最大剪应力作用平面的方位角应为

$$\alpha_1=\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2\tau_{xy}} \tag{2-6}$$

§2-2 平衡微分方程

弹性力学平面问题待求的未知量是3个应力分量

$$\sigma_x=\sigma_x(x,\ y),\ \sigma_y=\sigma_y(x,\ y),\ \tau_{xy}=\tau_{yx}=\tau_{xy}(x,\ y)$$

2个沿坐标 x、y 的位移分量

$$u=u(x,\ y),\ v=v(x,\ y)$$

一般地，这些量都是点位置的函数，即是坐标变量 x、y 的函数。为了求出这些未知量，必须知道描述它们分布状态的方程，即需建立这些量的基本方程。

设任意形状的弹性体，厚度为一个单位，沿边界作用任意载荷$q(s)$，如图 2-2 所示，在体内作用体力，沿 x、y 坐标的分量为

$$X=X(x,\ y),$$
$$Y=Y(x,\ y)$$

现要求在体内任意点建立平衡条件。为此，在弹性体内任意点A，用 x、$x+dx$、y、$y+dy$、4个坐标平面截出一个微小单元体 $ABCD$(图2-2)。

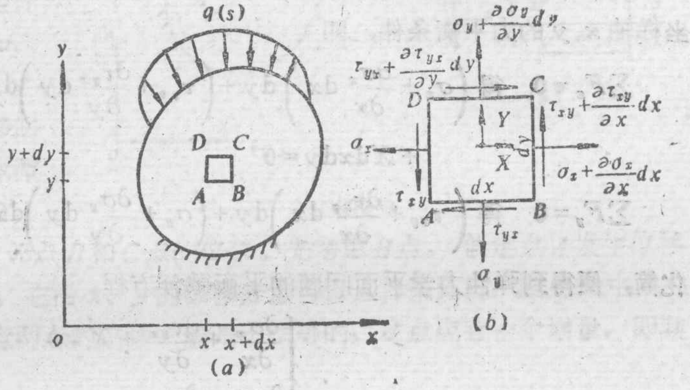


图2-2

各个截平面上的应力，一般是不相等的，可以这样分析：设 x 截面 AD上的应力分量为 σ_x、τ_{xy}，与之相邻的 $x+dx$ 截面 BC 上的应力分量，由于坐标 x 有一增量 dx，它们比 x 截面的应力应有一增量 $d\sigma_x$、$d\tau_{xy}$，其大小可以按照多变量函数求增量的规则来确定。例如应力分量 σ_x，因为它是坐标变量 x、y 的函数

$$\sigma_x=\sigma_x(x,\ y)$$

当变量 x、y 各有增量 dx、dy 时，其增量的近似式应为

$$d\sigma_x=\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx+\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}dy$$

对于只有变量 x 产生增量 dx 的情况，应力分量 σ_x 的增量就简化为

$$d\sigma_x=\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx$$

同理，对于应力分量 τ_{xy}，当变量 x 具有增量 dx 时，也有增量

$$d\tau_{xy}=\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx$$

于是，在 $x+dx$ 截面上的应力分量应为

$$\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx,\ \tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx$$