复变函数与运算微积初步

格·列·伦兹 列·埃·艾尔斯哥尔兹 著
熊振翔 杨应辰 丘玉圃 译

高等教育出版社

本书系根据苏联国立数学物理书籍出版社(Государственное издательство физико-математической литературы)出版的伦兹（Г. Л. Лунц）与艾尔斯哥尔兹（Л. Э. Эльсгольц）合著的“复变函数与运算微积初步”(Функции комплексного переменного с элементами операционного исчисления) 1958 年版译出。

本书讲述复变函数的基本理论以及这些理论在静电学、流体力学等方面的一些应用；也讲述运算微积的初步知识以及它在微分方程（常系数线性方程及一些其他类型的方程）的求积问题上的应用。本书內容浅近易懂且各章附有适量的习题。

本书可供工学院的学生和工程师阅读。

本书原由高等教育出版社出版，自 1960 年 4 月至 1964 年 12 月改由人民教育出版社出版。1965 年 1 月 1 日高等教育出版社成立后，本书仍用高等教育出版社名义继续印行。

复变函数与运算微积初步

格·列·伦兹　列·埃·艾尔斯哥尔兹　著

熊振翔　杨应辰　丘玉圃　译

北京市书刊出版业营业許可証出字第 119 号

高等教育出版社出版(北京景山东街)

人 民 教 育 印 刷 厂 印 装

新 华 书 店 北 京 发 行 所 发 行

各 地 新 华 书 店 经 售

統一书号K13010·764　开本 850×1168 1/32　印張 8 7/16

字数 242,000 印数 63,001—68,000 定价(6)¥0.80

1960 年 4 月第 1 版　1965 年 3 月北京第 9 次印刷

复变函数与
运算微积初步

格·列·伦兹 列·埃·艾尔斯哥尔兹 著
熊振翔 杨应辰 丘玉圃 译

高 等 教 育 出 版 社

序

本書是为具有工学院数学程度的讀者編写的。其目的在于以簡短并以尽可能通俗易懂的方式，使讀者知悉复变函数論的基本概念及其一些应用。

讀者若願对本書中所討論的問題作更深入的研究，可参考書末所介紹的文献。

作者对 Ю. Л. 拉宾諾維奇副教授与 А. Г. 施維希尼可夫副教授以及本書編者 С. Б. 諾尔金致謝，感謝他們的許多宝貴意見。

目　录

第一章　复数的代数运算

§1　复　数

数
$$z=x+iy$$
称为复数，其中 x 和 y 是任意的实数，而 i 是虚单位。实数 x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部，且記为：
$$x=\operatorname{Re} z \text{ 或 } R(z)$$
$$y=\operatorname{Im} z \text{ 或 } I(z).$$
如果两个复数的实部和虚部分别地相等，就認为它們是相等的，即是，等式
$$x_1+iy_1=x_2+iy_2$$
相当于两个等式：
$$x_1=x_2,$$
$$y_1=y_2.$$
因为被笛卡儿直角坐标系中的坐标所确定的两个点，当且仅当它們具有相等的横坐标和相等的縱坐标时才会重合，于是能够建立平面上全部的点和所有的复数間的一一对应关系。换句話說，我們将借助于横坐标为 x、縱坐标为 y 的点来表示复数 $z=x+iy$；这时任何复数为平面上完全确定的点所表示，反之，平面上任何的点 (x, y) 将对应着完全确定的复数 $z=x+iy$（图 1）。代替"表示数 z 的点"通常簡称为"点 z"。可以使复数的实部和虛部不与点的坐标对应，而与向量的坐标对

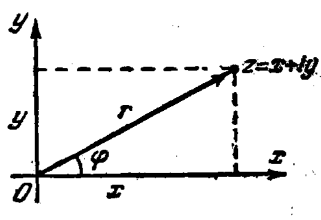

图 1

应，即对应于向量在坐标軸上的(具有适当符号的)投影，例如，取向量的起点在坐标原点上，因而，就借助于向量表示了复数(图 1)。

我們将虚部等于零的复数 $x+i0$ 和它的实部看作是一样的：$x+$ $+i0=x$，且認为实数是复数的特殊情况。用在 Ox 軸上的点表示实数；此軸称为实軸。类似地，实部等于零的复数（純虚数）将写为 $0+iy=$ $=iy$，它借助于在 Oy 軸上的点表示；此軸称为虚軸。

表示复数 z 的点的位置，也可以借助于极坐标 r 和 φ 来确定（图 1)，也就是借助对应于复数的向量的长度，和这向量与实軸的正向所构成的角度来确定。数 r 和 φ 将相应地称为复数 z 的模和輻角，且使用符号：

$$r=|z|,$$

$$\varphi=\operatorname{Arg} z.$$

在这里所引进的模的概念和对于实数的絕对值的概念是一致的。純虚数的模就是它的虚部的絕对值。

由模和輻角的定义推出，若 $z=x+iy$，則

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos\varphi=|z|\cos(\operatorname{Arg} z)\\ y&=r\sin\varphi=|z|\sin(\operatorname{Arg} z),\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

和

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{Arg} z)=\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}.$$

量 $\operatorname{Arg} z$ 是多值的，它們之間却可以相差 2π 的整倍数，通常取由不等式

$$-\pi<\operatorname{Arg} z\leqslant\pi$$

所确定的值作为量 $\operatorname{Arg} z$ 的主值，z 的輻角的主值表示为 $\arg z$。若 z 是正实数，則 $\arg z=0$；若 z 是負实数，則 $\arg z=\pi$；若 z 是具有正虚部的純虚数，則 $\arg z=\frac{\pi}{2}$；若 z 是具有負虚部的純虚数，則 $\arg z=-\frac{\pi}{2}$，当 $z=0$ 时量 $\operatorname{Arg} z$ 沒有意义。

利用公式(1),可以把任何异于零的复数表达为所謂复数 z 的三角形式:

$$z=x+iy=r\cos\varphi+ir\sin\varphi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \qquad (2)$$

例如,

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$i=1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right),$$

$$1=1(\cos 0+i\sin 0),$$

$$-2=2(\cos\pi+i\sin\pi),$$

$$-3i=3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

借助于欧拉公式 $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$(参看[1]第 135 节或本書第三章第 1 节),可以把复数 z 的三角形式(2)化为指数形式:

$$z=re^{i\varphi}.$$

例如,

$$1+i=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}};\quad i=e^{i\frac{\pi}{2}};\quad -1=e^{i\pi}.$$

具有同样的实部,而虚部的絕对值相等,但符号相反的两复数称为彼此共軛的。与数 z 共軛的数表示为 $\bar{z}$。若 $z=x+iy$, 則 $\bar{z}=x-iy$。由这定义推出,若 $w=\bar{z}$, 則 $z=\bar{w}$, 因而,$\bar{\bar{z}}=z$。

彼此共軛的数的模是相同的,而輻角只是符号不同:

$$|\bar{z}|=|z|;\quad \operatorname{Arg}\bar{z}=-\operatorname{Arg}z.①$$

任何实数都与它共軛的数完全相同。

表示共軛数的点关于实軸是相互对称的。

§ 2 复数的运算

复数的加法和乘法是按照代数多項式的加法規則和乘法規則来进

① 因为函数 $\operatorname{Arg}z$ 不是单值的,所以等式 $\operatorname{Arg}\bar{z}=-\operatorname{Arg}z$ 应該在这样的意义下来理解:被这等式的左端所确定的值的集合和被右端所确定的值的集合完全一样。

行的；最后由这些规則再添上以数 -1 代替 i^2 的要求(因而，以数 $-i$ 代替 i^3，数 1 代替 i^4，i 代替 i^5 等等)。当書写复数的运算結果时，要把实部和虛部分开，卽，分别归并不含有因子 i 的項及含有因子 i 的項：

$$\begin{aligned}(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)&=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2),\\(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)&=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2).\end{aligned}\qquad(3)$$

特别是，由(3)推出，两个彼此共軛的复数的乘积是实数，它等于这彼此共軛的复数的模的平方：

$$(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2,$$

卽

$$z\cdot\bar{z}=|z|^2.$$

两个彼此共軛的复数的和也是实数：

$$(x+iy)+(x-iy)=2x,$$

卽

$$z+\bar{z}=2\mathrm{Re}\,z.$$

复数的减法定义为加法的逆运算，由此得到

$$(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

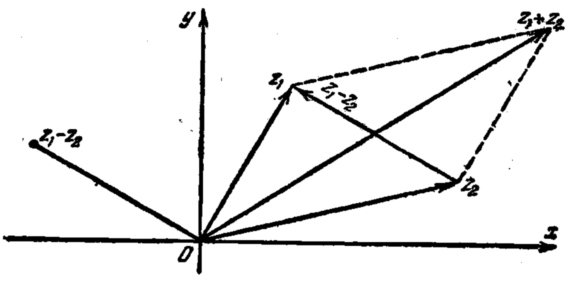

图 2

所以，复数相加或相减，就是把它們的实部和虛部分别地相加或相减。若用向量表示复数，那么，象我們已經知道的，复数的实部和虛部就是向量的坐标，而因为向量的相加或相减就是它們的坐标对应地相加或相减，于是复数的相加或相减归結为表示这些数的向量的相加或相减(图 2)。由于复数的模等于对应的向量的长度，所以两个复数的和的模小于或等于这两个复数的模的和：

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

把这不等式使用几次，我們得到：

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|.$$

在这不等式中，当且仅当表示数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 的向量都在一直綫上，且指向同一方向时，即是，当

$$\arg z_1=\arg z_2=\cdots=\arg z_n$$

时，上述不等式的等号才成立。两个复数之差的模等于表示这两数的点之間的距离(图 2)。因而，若 z_1 是給定的复数（給定的点），ρ 是給定的正实数，則滿足方程

$$|z-z_1|=\rho$$

的点 z 之总体构成了以点 z_1 为中心 ρ 为半徑的圓周。不等式 $|z-z_1|<\rho$ 确定在这圓周內的点集("圓内")，而不等式 $|z-z_1|>\rho$ 确定在圓周外的点集("圓外")。

复数的除法定义为乘法的逆运算。利用共軛数的性質，按如下方法进行复数的除法是最方便的：首先把分子和分母乘以分母的共軛数，于是分母变为正实数，然后分别地用分母除实部和虛部：

$$\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=$$

$$=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}=$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

若利用复数写法的三角形式：

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),$$

$$z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2),$$

則得到：

$$z_1z_2=r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+$$

$$+i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2)]=$$
$$=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]. \tag{4}$$

因而,复数相乘就是它們的模相乘,而輻角相加:

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,$$
$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}\, z_1+\mathrm{Arg}\, z_2.①$$

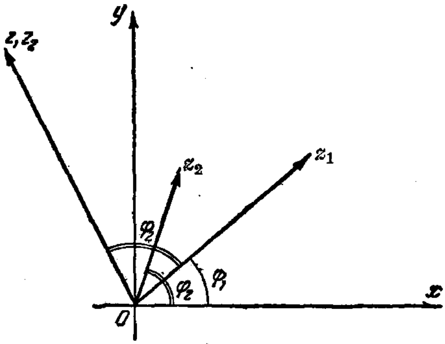

图 3

表示乘积 z_1z_2 的向量可以用下法得到,把表示数 z_1 的向量旋轉过由向量 z_2 和实軸正向所构成的角度 φ_2,且把它的长度乘以矢量 z_2 的长度(图 3)。例如,数 i 的模等于 1,輻角等于 $\frac{\pi}{2}$,所以乘以 i 归結为把矢量按正向旋轉 90° 而不改变其长度。

模等于 1 的数具有 $\cos\varphi+i\sin\varphi$ 的形状,或者,在指数形式中具有 $e^{i\varphi}$ 的形状。因而,矢量 $ze^{i\varphi}$ 可以由矢量 z 繞坐标原点旋轉角度 φ 而得到。

給定为三角形式的复数:

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),$$
$$z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2),$$

其除法归結为公式:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)],$$

即 $$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|};\quad \mathrm{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{Arg}\, z_1-\mathrm{Arg}\, z_2.$$

① 因为这等式的两端是多值的,于是应了解为这等式左端的值的集合和其右端的值的集合完全一样。

由乘法的法则(4),得到正整次方的法則:若

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

則

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),$$

即

$$|z^n|=|z|^n;\quad \operatorname{Arg}(z^n)=n\operatorname{Arg}z.$$①

利用除法的法則,不难驗証这公式对負整数 n 也是正确的。

求数 z 的正整 n 次方根就是求这样的数 $w=\sqrt[n]{z}$,它的 n 次方等于 z。根据乘方的法則,有

$$|w|^n=|z|\text{和}\ n\operatorname{Arg}w=\operatorname{Arg}z.$$

若

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

$$w=\rho(\cos\theta+i\sin\theta),$$

且考慮到复数的輻角含有 2π 的倍数的未确定的項,就得到

$$\rho^n=r;\quad n\theta=\varphi+2k\pi,\ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots).$$

因为 r 和 ρ 都是正数,則这些等式中的第一个单值地确定了 ρ,就是:

$$\rho=(\sqrt[n]{r}),$$

这里在右端的圓括号表示取根式的算术值(实的且是正的)。由第二个等式得到:

$$\theta=\frac{\varphi+2k\pi}{n},$$

借助于得到的公式可以求任何复数的 n 次方根,其形状为:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=$$

$$=(\sqrt[n]{r})\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right). \tag{5}$$

虽然 k 是任意的整数,但是由这公式仅得到量 $\sqrt[n]{z}$ 的 n 个不同的值,并

① 这等式的正确性只差到 2π 的倍数,即等式的左端或者和右端相同,或者是相差 $2k\pi$, k 是整数。如果所指的是輻角的值的整个集合,則等式是不正确的,这因为 $n\operatorname{Arg}z=$ $=n\arg z+2k\pi n$, 可是 $\operatorname{Arg}(z^n)=n\arg z+2k\pi$. 这样一来,不是量 $\operatorname{Arg}(z^n)$ 的所有值都会和量 $n\operatorname{Arg}z$ 的某一值相同,而仅是当数 k 是 n 的倍数时才会有相同。

且，这 n 个不同的值可以令 $k=0, 1, 2, \cdots, n-1$ 而得到。

事实上，两个彼此相差是 n、甚至是 n 的任意倍数的 k 值，当代入公式(5)时都給出同样的值，因为若 $k'-k=n$，則

$$\frac{\varphi+2k'\pi}{n}-\frac{\varphi+2k\pi}{n}=\frac{2(k'-k)\pi}{n}=2\pi,$$

所以

$$\cos\frac{\varphi+2k'\pi}{n}=\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n};\qquad \sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}=\sin\frac{\varphi+2k'\pi}{n}.$$

由公式(5)看到，量$\sqrt[n]{z}$的 n 个不同的值都具有相同的模($\sqrt[n]{|z|}$)。且因为

$$\frac{\varphi+2(k+1)\pi}{n}-\frac{\varphi+2k\pi}{n}=\frac{2\pi}{n},$$

所以，对应于和 k 相邻的值(k 和 $k+1$)，量$\sqrt[n]{z}$的两个值的輻角都相差$\frac{2\pi}{n}$，因而，对应于量$\sqrt[n]{z}$的 n 个点，就是內接于中心在坐标原点半徑为($\sqrt[n]{|z|}$)的圓周的正 n 角形的頂点。

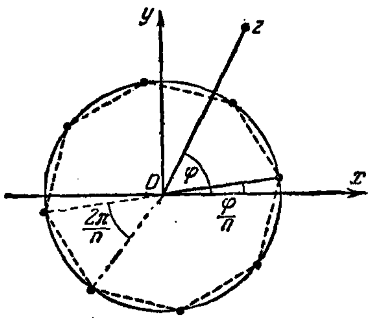

图 4

所以，我們能够用这样的方法(图 4)，作出对应于量$\sqrt[n]{z}$的 n 个点：以坐标原点为中心，作半徑等于$\sqrt[n]{|z|}$的圓周；然后由坐标原点引射綫，使它与实軸的正向所成的角度为由坐标原点到 z 点的射綫与实軸正向构成的角度 φ 的 n 分之 1，即$\frac{\varphi}{n}$，这样我們在圓周上就得到一个点，它对应于量$\sqrt[n]{z}$的值中的一个[这是对应于公式(5)中 $k=0$ 的一个点]；最后在圓周中画出这样的正 n 角形，其頂点之一就是所找到的点。这样一来，我們就作出与根式的其余的值相对应的点。

例 計算$\sqrt[3]{-8}$所有的值。

我們有，$-8=8(\cos\pi+i\sin\pi)$，因此

$$\sqrt[3]{-8}=(\sqrt[3]{8})\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right).$$

当 $k=0, 1, 2$ 时，得到：

$$\sqrt[3]{-8}=\begin{cases}1+i\sqrt{3},\\-2,\\1-i\sqrt{3},\end{cases}$$

如果采用对于实数所习用的写法：

$$\sqrt[n]{z^m}=z^{\frac{m}{n}},$$

那么复数的任何实有理数次乘方就被定义了。

第一章習題

1. 把下列各数写为三角形式。

а) $3i$, б) $-i$, в) 2, г) -2,
д) $1+i$, е) $-1-i$, ж) $\sqrt{3}-i$, з) $1-i\sqrt{3}$,
и) $2+5i$, к) $-2+5i$, л) $2-5i$, м) $-2-5i$.

2. 指出下列各題点 z 的位置：

а) $|z|>5$, б) $|z-i|<3$,
в) $|z+2i|\geqslant 2$, г) $|z-3-4i|=5$,
д) $\operatorname{Re} z>3$, е) $\operatorname{Im} z\leqslant 2$,
ж) $|z-2|+|z+2|=5$, з) $|z-2|-|z+2|>3$,
и) $|z^2-1|=a^2 (a>0)$, к) $\operatorname{Re}(z^2)=a^2$,
л) $|z-i|=|z+2|$, м) $\left|\frac{z-3}{z-2}\right|\geqslant 1$,
н) $\alpha<\arg z<\beta$, о) $\arg(z-i)=\frac{\pi}{4}$,
п) $\frac{\pi}{6}<\arg(z-2i)<\frac{\pi}{2}$.

3. 証明：若 $z_1+z_2+z_3=0$，且 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，則点 z_1, z_2, z_3 是內接于中心在坐标原点、半徑为 1 的圓周的正三角形的頂点。

4. 求：

а) $\frac{1}{i}$, б) $\frac{1-i}{1+i}$, в) $\frac{2}{1-3i}$,
г) $(\sqrt{3}-i)^5$, д) $(1+i\sqrt{3})^3$.

5. 求：

а) $\sqrt[3]{i}$, б) $\sqrt[6]{-8}$, в) $\sqrt[8]{1}$,
г) $\sqrt{1-i}$, д) $\sqrt{3+4i}$, е) $\sqrt{-2+2i}$.

第二章　复变量函数論的基本概念

§1　复自变量函数

复自变量函数論的基本概念几乎是实自变量函数論中相应的概念的逐字逐句的推广。这种在基本定义中的极其相似，导致在某些章节的許多理論的极其相似，例如，在这一章中所叙述的极限理論，直到基本定理的陈述也完全等同。

若給定的函数 $w=f(z)$ 在某一点集上的每一点 z（每一 z 值），都对应地給出 w 的一个或多个値，則説，在这描画复变量 z 的点集上給定了函数 $w=f(z)$。若每一个点 z 只有一个 w 值与之对应，則 w 称为单值函数，如有多个 w 值与之对称，則称为多值函数。

以后，在点集上給出（定义）函数 $w=f(z)$，通常这点集可看成平面的一切点的总体（全平面），或是除去了个别的点的全平面，或是单連通域或多連通域（参考[2]第 139 节），它們是由一条或几条光滑或分段光滑①的曲綫所圍成的部分平面，这部分平面可以除去（挖去）其中个别的点。

例如，函数 $w=z^2$ 是单值的，且它是定义在全平面上，因为借助于复数乘方的公式（参考第一章 §2.），可計算出任何复数 z 的一个（且仅是一个）对应值 z^2。函数 $w=\operatorname{Arg} z$ 是多值的，且在全平面上除去点 $z=$ $=0$ 外是有定义的（参考第一章 §1.）。

因为給定复数 z 相当于給定两个实数 x 和 y，它們是对应于数 $z(z=x+iy)$ 的实部和虚部，而数 w 亦同样单値地对应着一对实数 u 和

① 若在弧的每一点都可作出切綫，且当点沿曲綫运动时，切綫是連續地轉动，則称弧是光滑的；若弧是由有限条光滑弧段組成的連續曲綫則称弧是分段光滑的。