全国高等农林院校“十一五”规划教材

高等数学
学习指导与习题解析

下册

王家军　徐光辉　主编

中国农业出版社

全国高等农林院校“十一五”规划教材

高等数学学习指导与习题解析

下 册

王家军　徐光辉　主编

中 国 农 业 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导与习题解析．下册／王家军，徐光辉主编．—北京：中国农业出版社，2009.12

全国高等农林院校“十一五”规划教材

ISBN 978-7-109-14193-3

Ⅰ．高…　Ⅱ．①王…②徐…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 210592 号

中国农业出版社出版

（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）

（邮政编码 100125）

策划编辑　朱　雷

文字编辑　魏明龙

北京三木印刷有限公司印刷　　新华书店北京发行所发行

2010 年 1 月第 1 版　　2010 年 1 月北京第 1 次印刷

开本：720mm×960mm　1/16　　印张：18

字数：266 千字

定价：24.00 元

内 容 简 介

本教材是全国高等农林院校“十一五”规划教材《高等数学》下册(王家军主编)的学习辅导书，针对原教材的各个章节依序编写而成。内容包括各章节的学习要求、内容提要及解难释疑、解题方法与典型例题解析等指导性材料，并给出了各章节练习题、测试题的参考解答等辅助性材料。为学生学习本课程提供方便。

本教材分为上、下两册。下册内容包括空间解析几何与向量代数初步、多元微分学、重积分、曲线与曲面积分、无穷级数等内容。

编　委　名　单

主　编　王家军　徐光辉

副主编　方惠兰　王胜奎　张立溥

编　委　顾庆凤　贺志民

前　　言

本教材是全国高等农林院校“十一五”规划教材《高等数学》下册(王家军主编)的配套参考书。针对原教材中各个章节的内容，编写了学习要求、学习指导(解难释疑)、解题方法与典型例题解析等指导性材料，旨在为初学者深刻理解数学知识、全面掌握数学方法提供适时帮助。

考虑到高等数学课程可能出现的学习困难，特别是初入校的大学生学习负担较重的现象，本教材对原教材中的全部练习题给出了参考解答。同时，照顾到不同学习基础、不同学习追求者的学习需要，每章末安排了测试题并附有参考解答(其中某些题目，以及每章总练习的一些题目已接近考研水准)，供学有余力的同学作为探究性学习的练习题材。当然必须指出，所有习题的参考解答，只能作为读者自行练习后自我检测的参考依据，以免影响学习效果。

编　者

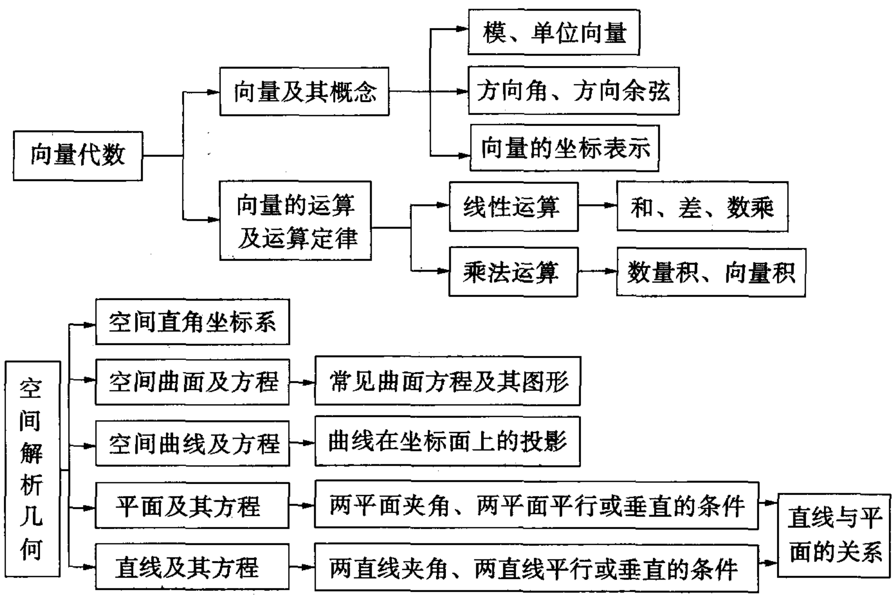
2009年11月

目　录

第八章　空间解析几何与向量代数初步

在中学已经知道，平面解析几何是通过建立平面直角坐标系，用代数方法来研究平面几何问题的数学学科．而空间解析几何则要建立空间坐标系，用代数方法研究立体几何问题．这不仅是对中学数学知识的提高，也是学习多元函数微积分的必要基础(正如前面我们学习一元函数微积分时所体会到的那样).

一、知识框图



二、学习要求

了解空间直角坐标系的有关内容；理解向量及其有关概念，能熟练进行向量运算；理解曲面与方程的概念，了解常用二次曲面的方程及其图形；会求以

坐标轴为旋转轴的各种旋转曲面，以及母线平行于坐标轴的柱面方程；熟练掌握平面的点法式方程、一般式方程等常用形式及其求法；能够判别空间点、直线、平面及其相互位置关系；熟练掌握常用直线方程的求取方法．

三、学习指导

有关向量运算的概念与方法，可以结合其几何意义予以理解；两向量垂直和平行的充要条件，不仅是理解直线、平面及其相互关系的关键，也往往是求直线方程、平面方程所需要的基本条件．

对照平面解析几何的有关知识来理解本章内容，是非常重要和有效的学习方法．虽然某些空间图形难以描绘，但结合该立体在每个坐标面上的投影，即可综合想像其大致形状．特别地，自觉培养空间图形的想像能力，不仅是学习多元函数积分学的需要，也是数学训练十分重要的目的之一！

第 1 节　空间直角坐标系和向量代数

一、学习要求

理解空间直角坐标系的结构，理解空间点、三元有序数组、空间向量三者之间的一一对应关系；理解向量及其有关概念，熟练掌握有关向量的模、方向余弦、方向角等坐标计算方法．

重点　空间点、三元有序数组、空间向量三者之间的一一对应关系；向量及其有关概念的坐标表示，向量模、方向余弦和方向角的坐标计算．

难点　向量及其有关概念的坐标表示，向量模、方向余弦和方向角的坐标计算．

二、主要内容与学习指导

1. 主要概念

向量是既有大小，又有方向的量．模为 1 的向量叫做**单位向量**．$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 是空间直角坐标系中与三条坐标轴同向的单位向量．

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$，则 $\boldsymbol{a}$ 的**模**为 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$；$\boldsymbol{a}$ 的**方向角**为 $\alpha=(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}})$，$\beta=(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{j}})$，$\gamma=(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}})$；$\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**为

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\ \cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\ \cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量记为

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{(a_x,\ a_y,\ a_z)}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma).$$

向量的加、减及数乘运算，分别定义为

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,\ a_y\pm b_y,\ a_z\pm b_z);$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z)，\lambda\text{ 为非零常数}.$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的**投影**，记为 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$，其中 φ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 u 轴的夹角．

2. 解难释疑

问题 1　空间直角坐标系只有“右手系”一种形式吗？

答　否，右手系只是习惯采取的一种空间直角坐标形式．在实际问题的讨论中，根据物体的位置或形状，往往需要灵活选用适当的坐标系(如左手系)，这对简化问题和寻求其他解决方法是十分必要的．

问题 2　如何理解空间点、三元有序数组、空间向量三者之间的一一对应关系？实际中又如何分辨？

答　一是理解：在空间直角坐标系中，点或向量均可写成三元有序数组的形式，因而三者之间具有一一对应的关系；二是分辨：这需借助符号或联系上下文来进行．如在符号形式上，点的写法是 $P(x,\ y,\ z)$，而向量则表示为 $\boldsymbol{r}=(x,\ y,\ z)$.

问题 3　能否进行向量的大小比较？

答　不能．因为向量同时兼具长度(模)和方向两个特征，而方向无法比较大小．

问题 4　为什么说方向余弦可以代表向量的方向？

答　理由有二：一是按照规定，任何给定的向量均有确定的方向角，且其余弦值唯一确定；二是给定向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向可由其单位向量 $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$来表示．

问题 5　向量的投影是向量吗？

答　否，向量的投影是数而非向量．但该数与向量的方向有关：如果向量与投影轴的方向一致，该数为正；如果向量与其投影轴的方向相反，则该数为负.

三、解题方法与例题解析

运用坐标进行向量的有关运算，必须遵守相关的算律和规则，其主要题型有：求向量的模、方向角、方向余弦，以及加减、数乘运算等.

例 1 已知点 $A(3,-1,2)$，$B(1,2,-4)$，$C(-1,1,2)$，试求点 D，使得以 A，B，C，D 为顶点的四边形是平行四边形.

解 若所求顶点与 A 相对，依题意：$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. 令 $D=(x,y,z)$，即 $(x-3,y+1,z-2)=(-2,3,-6)+(-4,2,0)=(-6,5,-6)$，于是 $x-3=-6$，$y+1=5$，$z-2=-6$，得

$$x=-3,\ y=4,\ z=-4,$$

即所求顶点的坐标为 $(-3,4,-4)$.

附注 对给定三点，可以作出不同位置的三种平行四边形. 在其余两种形式下，同上可得 D 的坐标分别为 $(1,-2,8)$ 和 $(5,0,-4)$.

例 2 某向量的终点为 $B(2,-1,7)$，且在 x，y，z 轴上的投影依次为 4，-4，7，求此向量的始点坐标、方向余弦和方向角.

解 设始点 A 的坐标为 (x,y,z)，则由题意

$$2-x=4,\ -1-y=-4,\ 7-z=7$$

可得

$$(x,y,z)=(-2,3,0),$$

所以 $\overrightarrow{AB}=(4,-4,7)$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4^2+(-4)^2+7^2}=9$，$e_{\overrightarrow{AB}}=\frac{1}{9}(4,-4,7)$，

从而所求方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{4}{9},\ \cos\beta=-\frac{4}{9},\ \cos\gamma=\frac{7}{9};$$

所求方向角为

$$\alpha=\arccos\frac{4}{9},\ \beta=\arccos\left(-\frac{4}{9}\right),\ \gamma=\arccos\frac{7}{9}.$$

例 3 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 xOy，yOz，zOx 三坐标面所成的角分别为 α_1，α_2，α_3，$\left(0\leqslant\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，求 $\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3$.

解 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$，则有 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

记向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x，y，z 轴所成的角分别为 α，β，γ，由题意：α_1 与 γ，α_2 与 β，α_3 与 α 均互为余角. 从而

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma$$
$$=3-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=2.$$

注意 此题求解主要利用了向量方向余弦的性质、向量的方向角及其与坐标垂直的关系.

习题 8-1 参考解答

思考题

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点所在的卦限：

解 $A(1, -2, 3)$在第Ⅳ卦限；$B(3, 1, -5)$在第Ⅴ卦限；$C(2, -3, -4)$在第Ⅷ卦限；$D(-1, 4, 5)$在第Ⅱ卦限.

2. **解** (1) 点$M(4, -3, 2)$关于xOy面的对称点为$(4, -3, -2)$，关于yOz面的对称点为$(-4, -3, 2)$，关于zOx面的对称点为$(4, 3, 2)$；

(2) 点$M(4, -3, 2)$关于x轴的对称点为$(4, 3, -2)$，关于y轴的对称点为$(-4, -3, -2)$，关于z轴的对称点为$(-4, 3, 2)$；

(3) 点$M(4, -3, 2)$关于坐标原点的对称点为$M(-4, 3, -2)$.

3. 当点M的坐标(x, y, z)分别满足下列条件时，点M的位置如何？

解 (1) $x=0$，$y=0$表示点M在z轴上；

(2) $x=a$表示点M在过点$(a, 0, 0)$且垂直于x轴的平面上；

(3) $x=a$，$y=b$表示点M在过点$(a, b, 0)$，且平行于z轴的直线上；

(4) $x^2+y^2+z^2=1$表示点M在以原点为球心的单位球面上.

4. **解** 由$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，验证可知：只有(1)可以作为向量的方向余弦.

5. 设向量的方向余弦分别满足：(1) $\cos\alpha=0$，(2) $\cos\beta=1$，(3) $\cos\alpha=\cos\beta=0$，问这些向量与坐标面或坐标轴的关系如何？

解 (1) $\cos\alpha=0$表示向量垂直于x轴，即平行于yOz平面；

(2) $\cos\beta=1$表示向量方向与y轴的正向一致，即垂直于zOx平面；

(3) $\cos\alpha=\cos\beta=0$表示向量平行于z轴，即垂直于xOy平面.

练习题

1. 某向量的坐标依次为4、-4、7，终点为$B(2, -1, 7)$，求它的始点A的坐标.

解 由于$\overrightarrow{AB}=(4, -4, 7)=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，所以

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{AB}=(2, -1, 7)-(4, -4, 7)=(-2, 3, 0).$$

2. 设$\boldsymbol{a}=(3, -1, 2)$，$\boldsymbol{b}=(1, 2, -1)$，求：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$;　　(2) $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$;　　(3) $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}|$.

解 (1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,-1,2)+(1,2,-1)=(4,1,1)$;

(2) $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=3(3,-1,2)-2(1,2,-1)=(7,-7,8)$;

(3) 由于 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{14}$, $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{6}$, 所以

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}| &= \sqrt{14}(1,2,-1)-\sqrt{6}(3,-1,2)\\ &=(\sqrt{14}-3\sqrt{6},\ 2\sqrt{14}+\sqrt{6},\ -\sqrt{14}-2\sqrt{6}).\end{aligned}$$

3. 设 $A(1,-1,2)$, $B(1,1,0)$, $C(-1,4,2)$, 求 $\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}-4\overrightarrow{CA}$.

解 $$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}-4\overrightarrow{CA}&=(0,2,-2)+3(-2,3,2)-4(2,-5,0)\\&=(-14,31,4).\end{aligned}$$

4. 求与向量 $\boldsymbol{a}=(3,-1,2)$ 同方向的单位向量.

解 因为 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{14}$, 所以

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{1}{\sqrt{14}}(3,-1,2)=\left(\frac{3}{\sqrt{14}},-\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}}\right).$$

5. 已知两点 $A(4,\sqrt{2},1)$ 和 $B(3,0,2)$, 计算向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 由于 $\overrightarrow{AB}=(3,0,2)-(4,\sqrt{2},1)=(-1,-\sqrt{2},1)$, 所以

$$|\overrightarrow{AB}|=2,\ \boldsymbol{e}_{\overrightarrow{AB}}=\frac{(-1,-\sqrt{2},1)}{2}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right),$$

从而 $$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\ \cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\gamma=\frac{1}{2},$$

所以 $$\alpha=\frac{2\pi}{3},\ \beta=\frac{3\pi}{4},\ \gamma=\frac{\pi}{3}.$$

6. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦 $\cos\beta=\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=\frac{2}{3}$, $|\boldsymbol{a}|=3$, 求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式.

解 因为 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, $\cos\beta=\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=\frac{2}{3}$,

所以 $\cos\alpha=\pm\frac{1}{3}$, 从而

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a=3\left(\pm\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=(\pm1,2,2).$$

7. 已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度为 6, 方向余弦为 $-\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 点 A 的坐标为 $(3,0,4)$, 求点 B 的坐标.

解　因为$\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|e_{\overrightarrow{AB}}=6\left(-\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)=(-4,\ 2,\ 4)$，

所以　$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}=(-4,\ 2,\ 4)+(3,\ 0,\ 4)=(-1,\ 2,\ 8)$.

8. 设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模为 4，它与 u 轴的夹角为$\frac{\pi}{3}$，求 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影．

解　$(\boldsymbol{r})_u=|\boldsymbol{r}|\cos\varphi=4\cdot\cos\frac{\pi}{3}=2$.

9. 已知点 $A(2,\ -1,\ 3)$是向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点，向量 $\boldsymbol{b}=(-3,\ 4,\ 7)$和 $\boldsymbol{c}=(0,\ 0,\ 5)$与 $\boldsymbol{a}$ 满足$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点B 及$\boldsymbol{a}$ 在各坐标轴上的投影．

解　因为 $\boldsymbol{b}=(-3,\ 4,\ 7)$，$\boldsymbol{c}=(0,\ 0,\ 5)$，所以

$$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}=3(-3,\ 4,\ 7)-2(0,\ 0,\ 5)=(-9,\ 12,\ 11).$$

于是 $\boldsymbol{a}$ 在x，y，z 坐标轴上的投影分别为：-9，12，11；

又 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\overrightarrow{OA}=(-9,\ 12,\ 11)+(2,\ -1,\ 3)=(-7,\ 11,\ 14)$，

故 $\boldsymbol{a}$ 的起点B 的坐标为$(-7,\ 11,\ 14)$.

10. 求与向量 $\boldsymbol{r}=(16,\ -15,\ 12)$平行、方向相反，且长度为 75 的向量．

解　由于$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{16^2+(-15)^2+12^2}=25$，故所求向量为

$$75\frac{(-\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}|}=-3(16,\ -15,\ 12)=(-48,\ 45,\ -36).$$

11. 点 M 的向径与 x 轴成 45°角，与 y 轴成 60°角，其长度为 6 个单位，若其在 z 轴上的坐标为负值，求点 M 的坐标．

解　因为 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\beta=\frac{1}{2}$，所以 $\cos\gamma=\pm\frac{1}{2}$.

由题设，该向量在 z 轴上的坐标为负值，故取 $\cos\gamma=-\frac{1}{2}$，

由此得向径　$\overrightarrow{OM}=6\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)=(3\sqrt{2},\ 3,\ -3)$，

从而点 M 的坐标为$(3\sqrt{2},\ 3,\ -3)$.

12. 在$\triangle ABC$ 中，已知点 $A(1,\ -2,\ 3)$，$B(-2,\ -2,\ 7)$，$C(6,\ -4,\ -11)$，从点 A 出发的中线交BC 于D，求与$\overrightarrow{AD}$同方向的单位向量．

解　由于$\overrightarrow{AC}=(6,\ -4,\ -11)-(1,\ -2,\ 3)=(5,\ -2,\ -14)$，$\overrightarrow{AB}=(-2,\ -2,\ 7)-(1,\ -2,\ 3)=(-3,\ 0,\ 4)$，根据中线定义，有

$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(2,-2,-10)=(1,-1,-5)$，$|\overrightarrow{AD}|=3\sqrt{3}$，

于是与$\overrightarrow{AD}$同方向的单位向量

$$e_{\overrightarrow{AD}}=\left(\frac{\sqrt{3}}{9},\ -\frac{\sqrt{3}}{9},\ -\frac{5\sqrt{3}}{9}\right).$$

13. 向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角 α，β，γ 适合 $\alpha=\beta$，$\gamma=2\alpha$，求 $\boldsymbol{e}_a$.

解 因为 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，所以 $\cos^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha=1$，由此解得

$$\cos\alpha=\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}，\cos\gamma=0 \text{ 或 } \cos\alpha=\cos\beta=0，\cos\gamma=-1;$$

所以
$$\boldsymbol{e}_a=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)\text{或}(0,\ 0,\ -1).$$

第 2 节　数量积　向量积　混合积*

一、学习要求

理解向量的数量积、向量积(和混合积*)的概念及其几何意义；熟练掌握数量积、向量积(及混合积*)的坐标计算方法；熟悉并会应用两向量垂直、平行的条件.

重点　数量积、向量积(及混合积*)的概念及其坐标计算方法；两向量垂直、平行的条件.

难点　向量积(及混合积*)的坐标计算，向量垂直、平行的判别及应用.

二、主要内容与学习指导

1. 主要概念

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,\ b_y,\ b_z)$，$\boldsymbol{c}=(c_x,\ c_y,\ c_z)$，定义：

数量积　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，其中 $\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

由此易得：
$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}},$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

向量积
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

仍是向量，且当 $\boldsymbol{a}\not\parallel\boldsymbol{b}$ 时，规定：

(1) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$(大小)；(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{b}$

（方向），且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 依次构成右手坐标系．

当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时，规定 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 于是有 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b} \iff \dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

混合积* $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=[\boldsymbol{abc}]=c_x\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-c_y\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+c_z\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

是数量．其几何意义是：当向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面时，$|[\boldsymbol{abc}]|$ 表示以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积．从而易得：$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面$\iff[\boldsymbol{abc}]=0$.

2. 解难释疑

问题 1　向量夹角公式是如何推导的？其成立的前提条件是什么？有何应用？

答　记 $\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，由数量积的定义 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 立得

$$\cos\theta=\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}.$$

其前提条件有两个：一是 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，否则上式无意义；二是规定 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，否则夹角不能唯一确定．

夹角公式是讨论两向量位置关系的重要依据：不仅给出了夹角大小的实际求取方法，而且给出了两向量垂直的充要条件：

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\iff a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

问题 2　什么是向量积？向量积有什么意义和作用？

答　向量积是人为规定的一种向量形式（其大小与方向见上所述）.

向量积有着明确的几何意义：当 $\boldsymbol{a}\not\parallel\boldsymbol{b}$ 时，$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 表示以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积$\left(\text{因而以 }\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{ 为邻边的三角形面积表示为 }S=\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\right)$；当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时，规定 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，由此即得判断两向量平行的充要条件：

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\iff\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

三、解题方法与例题解析

数量积或向量积的定义，提供了判别两向量垂直或平行的常用方法．

例 1　已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 及 x 轴均垂直，其中 $\boldsymbol{b}=(3,6,8)$，$|\boldsymbol{a}|=2$，