工程力学科学与实践

Science and Practice in Engineering Mechanics

袁 鸿　王志伟　主编

暨南大學出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS

工程力学科学与实践

Science and Practice in Engineering Mechanics

袁　鸿　王志伟　主编

暨南大學出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS
中国·广州

图书在版编目（CIP）数据

工程力学科学与实践/袁鸿，王志伟主编．—广州：暨南大学出版社，2010.6
ISBN 978－7－81135－508－6

Ⅰ.①工…　Ⅱ.①袁…②王…　Ⅲ.①工程力学—学术会议—文集　Ⅳ.①TB12－53

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 077938 号

内容简介：为庆祝暨南大学应用力学研究所所长、中国工程院院士刘人怀教授从教四十六载暨七十华诞，暨南大学应用力学研究所于2009年11月在珠海市召开了“工程力学科学与实践学术会议”。本书共收集了刘人怀院士的学生、助手及学界朋友的30篇论文，内容涉及结构非线性振动、复合材料结构力学、弹性元件理论与设计、板壳非线性力学、力学的发展和应用、力学与其他相关学科之间的相互渗透交叉及耦合作用的研究和应用成果。这些论文体现了工程力学各领域的发展新趋势，也折射出工程力学的巨大生命力。

本书可供从事工程力学、航空航天工程、土木工程、机械工程及相关领域研究的科研人员、高等院校师生和工程技术人员参考。

出版发行：暨南大学出版社

地　址：中国广州暨南大学
电　话：总编室（8620）85221601
营销部（8620）85225284　85228291　85220693（邮购）
传　真：（8620）85221583（办公室）　85223774（营销部）
邮　编：510630
网　址：http：//www.jnupress.com　http：//press.jnu.edu.cn

排　版：暨南大学出版社照排中心
印　刷：广州桐鑫印刷有限公司

开　本：787mm×1092mm　1/16
印　张：20
字　数：474千
版　次：2010年6月第1版
印　次：2010年6月第1次

定　价：88.00元

序 言

本书是暨南大学应用力学研究所所长、中国工程院院士刘人怀教授七十华诞的祝寿学术论文集，是刘人怀院士朋友及学生对刘人怀院士的尊敬之心的表达方式。

刘人怀（1940. 7. 20—　）院士是板壳结构分析与应用专家、管理科学专家。四川省成都市人。1963 年毕业于兰州大学。现任暨南大学教授、董事、应用力学研究所所长、战略管理研究中心主任，并兼任中国工程院工程管理学部副主任，教育部科技委管理学部主任，教育部力学教学指导委员会主任，中国振动工程学会理事长，中国力学学会副理事长，中国复合材料学会副理事长等职。刘人怀院士是我国板壳结构理论与应用研究开拓者之一，与他人共同创立求解非线性微分方程的修正迭代法，研究了 6 类板壳：波纹板壳、夹层板壳、复合材料板壳、网格扁壳、单层板壳和双金属扁壳的非线性弯曲、稳定和振动问题，提出了精密仪器仪表心脏——弹性元件设计公式以及夹层和复合材料工程结构元件设计公式。在厚板壳弯曲领域进行了创造性研究，提出了弯曲理论及相应的设计公式。上述成果在工程实践中得到重要应用。此外，还在管理科学理论与应用方面开展了研究。获省部级自然科学奖、科技进步奖一等奖 4 项、二等奖 2 项，获国家级教学成果奖二等奖 1 项，省部级教学成果奖一等奖 3 项。出版学术著作 7 本，主编著作 4 本，发表学术论文 300 余篇，培养博士 33 人，硕士 114 人。刘人怀先生 1999 年当选为中国工程院机械与运载工程学部院士；2000 年又当选为中国工程院工程管理学部首批院士。

暨南大学应用力学研究所经国务院侨务办公室批准，于 1992 年由中国工程院院士刘人怀教授领衔建立并任所长至今。建所之初就提出了“理论联系实际，为国家经济建设服务；在理论与实践相结合的基础上开拓力学研究的新领域、新思路，不断提高力学研究的水平”的宗旨。经过十多年的发展和积累，暨南大学应用力学研究所在板壳的非线性力学领域形成了明显的特色和优势，凝聚了一批在国内外有影响的青年学者，特别是在板壳非线性微分方程求解、板壳的非线性理论与计算、板壳理论的工程应用三个方面，优势突出。2001 年工程力学硕士点开始招生，2003 年工程力学博士点开始招生，同年工程力学学科被批准为国务院侨办重点学科，2004 年工程结构故障诊断实验室被批准为广东省高校重点实验室，2005 年工程力学学科被批准为广东省重点学科，2006 年重大工程灾害与控制实验室被批准为教育部重点实验室。学科点及团队与国内外的学术交流十分活跃，多数成员在国外有一年以上的学习和进修经历，团队的研究工作在国际上有良好的声誉和较高的国际地位。暨南大学应用力学研究所，现有以中国工程院院士刘人怀教授为带头人，博士生导师、教授、博士为梯队，学术水平高、业务能力强、教学经验丰富的教师队伍。具有必要的实验设备、计算机软件及计算机设备。目前承担了国家自然科学基金、建设部科技计划、广东省自然科学基金、广东省科技计划、教育部骨干教师资助计划等多项科研项目的研究。

“工程力学科学与实践学术会议”由暨南大学应用力学研究所于2009年11月主办。本书共收集了刘人怀院士的学生、助手及学界朋友的30篇论文，内容涉及结构非线性振动、复合材料结构力学、弹性元件理论与设计、板壳非线性力学、力学的发展和应用、力学与其他相关学科之间的相互渗透交叉及耦合作用的研究和应用成果。这些论文体现了工程力学各领域的发展新趋势，也折射出工程力学的巨大生命力。

作为本书的主编和学术会议的组织者，衷心感谢所有作者和与会代表，是他们精心撰写的高水平论文和对本次学术会议的积极参与，保证了本书的质量和学术会议的成功。感谢暨南大学“211工程”三期国家级项目“重大工程结构中的非线性力学问题”的资助；感谢暨南大学出版社对本书的出版给予的大力支持。限于时间和经验的不足，本书存在的疏漏之处敬请专家和读者指正。

衷心祝贺刘人怀院士七十寿辰生日快乐，并祝他和他的家人身体健康！

2010年3月20日

目 录

置入 Winkler 地基内板的分解理论

王敏中[1]　赵宝生[2]　高　阳[3]

（1. 北京大学湍流与复杂系统国家重点实验室、工学院，北京，100871；
2. 辽宁科技大学机械工程与自动化学院，辽宁鞍山，114051；
3. 中国农业大学理学院，北京，100083）

［摘　要］　本文将 Cheng 氏精化理论的研究思路推广到置入 Winkler 地基内板的研究当中，对 Winkler 弹性地基上的板进行了精确的分析，给出其精化理论。首先考虑到板所占有的区域是 z - 向凸的，故可借助于 Papkovich-Neuber 通解的变形形式获得利用调和函数表示的板内位移场和应力场；然后根据置入 Winkler 地基的边界条件和 Lur'e 算子方法，获得精化理论的精确方程，该精确方程分为剪切和超越两部分；最后，分别对这两部分进行分析，获得了它们的位移场和应力场。

［关键词］　弹性板；Winkler 地基；精化理论；超越弯曲方程

1. 引言

作为常用的工程材料，板被很多学者研究，在研究弹性地基上的板时，一般会认为板和地基之间的边界上的应力与挠度成正比，当板的厚度增加时，误差会越来越大，为此需要应用更精确的板的模型。

1979 年，Cheng[1] 从三维弹性力学的 Boussinesq-Galerkin 通解出发，利用 Lur'e[2] 算子表示，得到了各向同性板在板面不受外力时的精化理论，并以矩形板的扭转为例说明了剪切部分的重要性。其后，王飞跃[3] 将 Cheng 精化理论的方法应用到横观各向同性板中，得到了横观各向同性板在板面不受外力时的精化理论，并对具有圆孔的无限大横观各向同性板的弯曲进行了分析。2004 年，赵宝生和王敏中[4] 对横观各向同性板精化理论的超越方程进行了研究，完善了王飞跃关于横观各向同性板的精化理论。

1997 年，Wang 和 Shi[5] 从 Papkovich-Neuber 通解出发，利用 Cheng 精化理论的方法，讨论了各向同性板在板面受横向载荷的情况，并给出了板的挠度控制方程和剪切控制方程。利用 Wang 和 Shi 改进后的方法，Yin 和 Wang[6] 从 Elliott-Lodge 通解出发，分别对两种不同弹性常数的情况进行分析，得到了横观各向同性板在板面受横向载荷时的控制方程。王炜和罗长虹[7] 从定常温度热弹性 Biot 通解出发，得到了热弹性板精化理论的控制微分方程。高阳和赵宝生等还将精化理论的研究思路推广到拉伸平板[8]、磁弹性板[9] 和弹性地基梁[10,11] 的研究当中。

1992 年，Gregory 发展了板的分解理论[12]。2005 年，赵宝生和王敏中[13] 证明了 Cheng 的精化理论与 Gregory 的分解理论是等价的。

本文将精化理论推广到置入 Winkler 弹性地基内板的研究当中，考虑到板所占有的区域是 z – 向凸的，故可用 Papkovich-Neuber 通解的变化形式，从 Winkler 地基假设得到弹性地基板的精确方程，并将 Winkler 弹性地基内板的应力场和位移场分解为两种状态——剪切状态和超越弯曲状态。

2. Papkovich-Neuber 通解的变化形式[14][15]

直角坐标系下的弹性力学 Papkovich-Neuber 位移通解为：

$$u\ (x_1,\ x_2,\ x_3)\ = p - \frac{1}{4\ (1-v)}\nabla(p_0 + r\cdot \boldsymbol{p}) \tag{1}$$

其中，x_1，x_2，x_3 为直角坐标，e_1，e_2，e_3 分别为 x_1，x_2，x_3 方向上的单位矢量，∇ 为梯度算子，即

$$\nabla = e_1\frac{\partial}{\partial x_1} + e_2\frac{\partial}{\partial x_2} + e_3\frac{\partial}{\partial x_3}$$

而 $\boldsymbol{p}$ 和 p_0 分别为调和向量与调和函数，即

$$\nabla^2 p_0 = 0,\quad \nabla^2 p_1 = 0,\quad \nabla^2 p_2 = 0,\quad \nabla^2 p_3 = 0 \tag{2}$$

这里 $\nabla^2 = \tilde{\nabla}^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$，$\tilde{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$。

对于 z – 向凸的区域，对 Papkovich-Neuber 解中的势函数 $\boldsymbol{p}$ 和 p_0，可以令

$$\begin{cases} \boldsymbol{p} = \dfrac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial x_3} + \ (1-2v)\ e_3\nabla\cdot\boldsymbol{b} \\ p_0 = 4\ (1-v)\ \varphi + 2\ (1-v)\ x_3\nabla\cdot\boldsymbol{b} - \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p} \end{cases} \tag{3}$$

这里，$\boldsymbol{b}$ 和 φ 为调和函数，将式（3）代入式（1）中得：

$$\boldsymbol{u} = \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial z} + \ (1-2v)\ e_3\nabla\cdot\boldsymbol{b} - \frac{1}{2}\nabla\ (x_3\nabla\cdot\boldsymbol{b})\ - \nabla\varphi \tag{4}$$

可以证明该解是完备的[15]。式（4）的分量形式是：

$$\begin{cases} u_1 = b_{1,3} - \dfrac{1}{2}x_3\ (\nabla\cdot\boldsymbol{b})_{,1} - \varphi_{,1} \\ u_2 = b_{2,3} - \dfrac{1}{2}x_3\ (\nabla\cdot\boldsymbol{b})_{,2} - \varphi_{,2} \\ u_3 = b_{3,3} + \dfrac{1-4v}{2}\nabla\cdot\boldsymbol{b} - \dfrac{1}{2}x_3\ (\nabla\cdot\boldsymbol{b})_{,3} - \varphi_{,3} \end{cases} \tag{5}$$

其中，下标中的逗号表示对其后之宗量的微商。令

$$\varphi = \frac{1}{2}b_3 - v\psi \tag{6}$$

这里，ψ 为调和函数，它满足如下方程：

$$\psi_{,3} = \nabla\cdot\boldsymbol{b} \tag{7}$$

于是，位移场有下列形式：

$$\begin{cases} u_1 = b_{1,3} - \frac{1}{2}b_{3,1} + v\psi_{,1} - \frac{1}{2}x_3\ (\nabla \cdot \boldsymbol{b})_{,1} \\ u_2 = b_{2,3} - \frac{1}{2}b_{3,2} + v\psi_{,2} - \frac{1}{2}x_3\ (\nabla \cdot \boldsymbol{b})_{,2} \\ u_3 = \frac{1}{2}b_{3,3} + \frac{1-2v}{2}\nabla \cdot \boldsymbol{b} - \frac{1}{2}x_3\ (\nabla \cdot \boldsymbol{b})_{,3} \end{cases} \tag{8}$$

本构方程为:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{2\mu v}{1-2v}(u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3}) + 2\mu u_{1,1},\ \sigma_{23} = \mu(u_{2,3} + u_{3,2}) \\ \sigma_{22} = \frac{2\mu v}{1-2v}(u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3}) + 2\mu u_{2,2},\ \sigma_{31} = \mu(u_{3,1} + u_{1,3}) \\ \sigma_{33} = \frac{2\mu v}{1-2v}(u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3}) + 2\mu u_{3,3},\ \sigma_{12} = \mu(u_{1,2} + u_{2,1}) \end{cases} \tag{9}$$

这里，μ 为剪切模量，v 为泊松比。

应力场为:

$$\begin{cases} \frac{1}{\mu}\sigma_{11} = -2v\psi_{,22} + 2b_{1,13} - b_{3,11} - x_3\ (\nabla \cdot \boldsymbol{b})_{,11},\ \frac{1}{\mu}\sigma_{23} = b_{2,33} - x_3\ (\nabla \cdot \boldsymbol{b})_{,23} \\ \frac{1}{\mu}\sigma_{22} = -2v\psi_{,11} + 2b_{2,23} - b_{3,22} - x_3\ (\nabla \cdot \boldsymbol{b})_{,22},\ \frac{1}{\mu}\sigma_{31} = b_{1,33} - x_3\ (\nabla \cdot \boldsymbol{b})_{,31} \\ \frac{1}{\mu}\sigma_{12} = b_{1,23} + b_{2,13} - b_{3,12} + 2v\psi_{,12} - x_3\ (\nabla \cdot \boldsymbol{b})_{,12},\ \frac{1}{\mu}\sigma_{33} = b_{3,33} - x_3\ (\nabla \cdot \boldsymbol{b})_{,33} \end{cases} \tag{10}$$

3. 板面条件

设板所占的弹性区域为 $\boldsymbol{\Omega}$，则有:

$$\boldsymbol{\Omega} = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in G,\ |z| \leq \frac{h}{2}\}$$

其中 G 为一个二维区域。显然，区域 $\boldsymbol{\Omega}$ 是 z - 向凸的，故可援用上述的 Papkovich-Neuber 通解的变化形式（4）。

置入 Winkler 地基内板面边界条件有如下形式:

$$\begin{gathered} \sigma_{31} = \sigma_{23} = 0,\ \sigma_{33} + ku_3 = 0\ (x_3 = h/2) \\ \sigma_{31} = \sigma_{23} = 0;\ \sigma_{33} - ku_3 = 0\ (x_3 = -h/2) \end{gathered} \tag{11}$$

这里，k 是地基系数。

从板面边界条件（11），不难证明，位移 u_1 和 u_2 关于 $x_3=0$ 反对称，u_3 关于 $x_3=0$ 对称，利用 Lur'e[2] 方法，调和函数 $\boldsymbol{b}$ 可以写成下列形式:

$$b_1 = \cos(x_3\tilde{\nabla})\ g_1(x_1, x_2),\ b_2 = \cos(x_3\tilde{\nabla})\ g_2(x_1, x_2),\ b_3 = \frac{\sin(x_3\tilde{\nabla})}{\tilde{\nabla}}g_3(x_1, x_2) \tag{12}$$

其中，$g_i(x_1, x_2)$，$i=1, 2, 3$，为待定函数，而

$$\frac{\sin\ (x_3\tilde{\nabla})}{\tilde{\nabla}}=x_3-\frac{1}{3!}x_3^3\tilde{\nabla}^2+\frac{1}{5!}x_3^5\tilde{\nabla}^4+\cdots,\ \cos\ (x_3\tilde{\nabla})\ =1-\frac{1}{2!}x_3^2\tilde{\nabla}^2+\frac{1}{4!}x_3^4\tilde{\nabla}^4+\cdots \tag{13}$$

所以

$$\nabla\cdot b=\cos\ (x_3\tilde{\nabla})\ (g_{1,1}+g_{2,2}+g_3) \tag{14}$$

将式（12）代入位移场（8）和应力场（10）中，并根据式（12）可以获得：

$$\begin{cases}C_{\aleph}\tilde{\nabla}^2g_1-\dfrac{h^2}{4}S_{\aleph}\tilde{\nabla}^2\Phi_{,1}=0\\ C_{\aleph}\tilde{\nabla}^2g_2-\dfrac{h^2}{4}S_{\aleph}\tilde{\nabla}^2\Phi_{,2}=0\\ -\dfrac{h}{2}S_{\aleph}\tilde{\nabla}^2g_3+\dfrac{h}{2}C_{\aleph}\tilde{\nabla}^2\Phi+\dfrac{k}{\mu}\left(\dfrac{1}{2}C_{\aleph}g_3+\dfrac{1-2v}{2}C_{\aleph}\Phi+\dfrac{h^2}{8}S_{\aleph}\tilde{\nabla}^2\Phi\right)=0\end{cases} \tag{15}$$

其中，$C_{\aleph}$ 和 $S_{\aleph}$ 是微分算子，

$$C_{\aleph}=\cos\left(\frac{h\tilde{\nabla}}{2}\right),\ S_{\aleph}=\frac{\sin\ (h\tilde{\nabla}/2)}{h\tilde{\nabla}/2} \tag{16}$$

而 $\Phi=g_{1,1}+g_{2,2}+g_3$。

根据 Wang 和 Shi[5] 的文章中附录 B 的第一个引理，我们可以设

$$g_1=\frac{1}{\tilde{\nabla}^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\right),\ g_2=\frac{1}{\tilde{\nabla}^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}-\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \tag{17}$$

其中分母中的二维 Laplace 算子理解为对数位势。

将式（17）代入式（15）的前两个方程中，并注意式（16），可得：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left[\left(C_{\aleph}-\dfrac{h^2\tilde{\nabla}^2}{4}S_{\aleph}\right)F-\dfrac{h^2\tilde{\nabla}^2}{4}S_{\aleph}g_3\right]+\dfrac{\partial}{\partial x_2}\ (C_{\aleph}f)\ =0\\ \dfrac{\partial}{\partial x_2}\left[\left(C_{\aleph}-\dfrac{h^2\tilde{\nabla}^2}{4}S_{\aleph}\right)F-\dfrac{h^2\tilde{\nabla}^2}{4}S_{\aleph}g_3\right]-\dfrac{\partial}{\partial x_1}\ (C_{\aleph}f)\ =0\end{cases} \tag{18}$$

因为式（18）是一对 Cauchy-Riemann 方程，所以我们可以假设

$$\left(C_{\aleph}-\frac{h^2\tilde{\nabla}^2}{4}S_{\aleph}\right)F-\frac{h^2\tilde{\nabla}^2}{4}S_{\aleph}g_3=U_\alpha\ (x_1,\ x_2),\ C_{\aleph}f=U_\beta\ (x_1,\ x_2) \tag{19}$$

这里的 U_α 和 U_β 是一对共轭的调和函数，上式有特解，$F=U_\alpha$，$f=U_\beta$，$g_3=0$，这个解对 g_1、g_2 和 g_3 没有影响，可以忽略。所以有：

$$C_{\aleph}f=0 \tag{20}$$

$$\left(C_{\aleph}-\frac{h^2\tilde{\nabla}^2}{4}S_{\aleph}\right)F-\frac{h^2\tilde{\nabla}^2}{4}S_{\aleph}g_3=0 \tag{21}$$

将式（17）代入式（15）的最后一个方程中，并注意式（16），可得：

$$\left\{\left[\frac{h\tilde{\nabla}^2}{2}+\frac{(1-2v)\ k}{2\mu}\right]C_{\aleph}+\frac{kh^2\tilde{\nabla}^2}{8\mu}S_{\aleph}\right\}F+\left\{\left(\frac{kh^2}{8\mu}-\frac{h}{2}\right)S_{\aleph}\tilde{\nabla}^2+\left[\frac{h\tilde{\nabla}^2}{2}+\frac{k\ (1-v)}{\mu}\right]C_{\aleph}\right\}g_3=0 \tag{22}$$

所以，地基内板的问题可以分解为剪切和超越弯曲两部分，其中剪切部分中 $F=0$，$g_3=0$；超越弯曲部分中 $f=0$。

4. 剪切部分

剪切部分仅包括函数 f，且满足式（20），所以其对应的位移场为：

$$u_1=-\frac{\sin\ (x_3\tilde{\nabla})}{\tilde{\nabla}}f_{,2}+v\psi_{,1},\ u_2=\frac{\sin\ (x_3\tilde{\nabla})}{\tilde{\nabla}}f_{,1}+v\psi_{,2},\ u_3=0 \tag{23}$$

其中 ψ 是与 x_3 无关的二维调和函数，即 $\tilde{\nabla}^2\psi\ (x_1,\ x_2)\ =0$，根据 Eubanks 和 Sternberg[16]，可以找到一个函数 $A\ (x_1,\ x_2)$，满足

$$A_{,2}=\psi,\ \tilde{\nabla}^2A=0 \tag{24}$$

令

$$S=\mu\left[-\frac{\sin\ (x_3\tilde{\nabla})}{\tilde{\nabla}}f+vA_{,1}\right] \tag{25}$$

根据方程（20），S 满足下面的方程：

$$\nabla^2S=0 \tag{26}$$

$$S_{,3}=0\ (x_3=\pm h/2) \tag{27}$$

根据

$$u_1^S=\frac{1}{\mu}S_{,2},\ u_2^S=-\frac{1}{\mu}S_{,1},\ u_3^S=0 \tag{28}$$

将位移场代入本构方程（9）中，得到应力场为：

$$\begin{cases}\sigma_{11}^S=2S_{,12},\ \sigma_{22}^S=-2S_{,12},\ \sigma_{12}^S=S_{,22}-S_{,11}\\ \sigma_{31}^S=S_{,23},\ \sigma_{23}^S=-S_{,13},\ \sigma_{33}^S=0\end{cases} \tag{29}$$

5. 超越弯曲部分

超越弯曲部分包括 F 和 g_3 两个函数，将式（21）和式（22）改写成算子矩阵的形式：

$$\begin{bmatrix}L_{11} & L_{12}\\ L_{21} & L_{22}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}F\\ g_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \tag{30}$$

其中

$$L_{11}=C_{\aleph}-\frac{h^2\tilde{\nabla}^2}{4}S_{\aleph},\ L_{12}=-\frac{h^2\tilde{\nabla}^2}{4}S_{\aleph}$$

$$L_{21}=\left[\frac{h\tilde{\nabla}^2}{2}+\frac{(1-2v)\ k}{2\mu}\right]C_{\aleph}+\frac{kh^2\tilde{\nabla}^2}{8\mu}S_{\aleph},\ L_{22}=\left(\frac{kh^2}{8\mu}-\frac{h}{2}\right)S_{\aleph}\tilde{\nabla}^2+\left[\frac{h\tilde{\nabla}^2}{2}+\frac{k\ (1-v)}{\mu}\right]C_{\aleph} \tag{31}$$

按 Lur'e 算子方法，式（30）的解为：

$$F=L_{22}\xi_1-L_{12}\xi_2,\ g_3=-L_{21}\xi_1+L_{11}\xi_2 \tag{32}$$

其中

$$\left\{\frac{\mu h\tilde{\nabla}^2}{1-v}\left[1-\frac{\sin\ (h\tilde{\nabla})}{h\tilde{\nabla}}\right]+k[1-\cos\ (h\tilde{\nabla}^2)]\right\}\xi_i=0,\ (i=1,\ 2) \tag{33}$$

将式（32）代入式（17），得：

$$\tilde{\nabla}^2 g_1=L_{22}\xi_{1,1}-L_{12}\xi_{2,1},\ \tilde{\nabla}^2 g_2=L_{22}\xi_{1,2}-L_{12}\xi_{2,2} \tag{34}$$

将式（32）和式（34）代回位移场（8），可得精确的位移场：

$$u_1^{PF}=\left\{\left(\frac{L_{21}}{2}-L_{22}\right)\frac{\sin\ (x_3\tilde{\nabla})}{\tilde{\nabla}}+x_3\left(\frac{L_{21}}{2}-\frac{L_{22}}{2}\right)\cos\ (x_3\tilde{\nabla})\right\}\xi_{1,1}+$$
$$\left\{\left(L_{12}-\frac{L_{11}}{2}\right)\frac{\sin\ (x_3\tilde{\nabla})}{\tilde{\nabla}}+x_3\left(\frac{L_{12}}{2}-\frac{L_{11}}{2}\right)\cos\ (x_3\tilde{\nabla})\right\}\xi_{2,1}+v\psi_{,1}$$

$$u_2^{PF}=\left\{\left(\frac{L_{21}}{2}-L_{22}\right)\frac{\sin\ (x_3\tilde{\nabla})}{\tilde{\nabla}}+x_3\left(\frac{L_{21}}{2}-\frac{L_{22}}{2}\right)\cos\ (x_3\tilde{\nabla})\right\}\xi_{1,2}+$$
$$\left\{\left(L_{12}-\frac{L_{11}}{2}\right)\frac{\sin\ (x_3\tilde{\nabla})}{\tilde{\nabla}}+x_3\left(\frac{L_{12}}{2}-\frac{L_{11}}{2}\right)\cos\ (x_3\tilde{\nabla})\right\}\xi_{2,2}+v\psi_{,2}$$

$$u_3^{PF}=\left\{x_3\ (L_{22}-L_{21})\ \frac{\sin\ (x_3\tilde{\nabla})}{\tilde{\nabla}}\tilde{\nabla}^2+\left[\frac{1-2v}{2}L_{22}-\ (1-v)\ L_{21}\right]\cos\ (x_3\tilde{\nabla})\right\}\xi_1+$$
$$\left\{x_3\ (L_{11}-L_{12})\ \frac{\sin\ (x_3\tilde{\nabla})}{\tilde{\nabla}}\tilde{\nabla}^2+\left[(1-v)\ L_{11}-\frac{1-2v}{2}L_{12}\right]\cos\ (x_3\tilde{\nabla})\right\}\xi_2 \tag{35}$$

这里，$\psi_{,3}=\cos\ (x_3\tilde{\nabla}^2)\ [\ (L_{22}-L_{21})\ \xi_1+\ (L_{11}-L_{12})\ \xi_2]$。

将位移场（35）代入本构方程（9）中可以获得应力场：

$$\frac{\sigma_{11}^{PF}}{\mu}=\left\{(L_{21}-2L_{22})\ \frac{\sin\ (x_3\tilde{\nabla})}{\tilde{\nabla}}+x_3\ (L_{21}-L_{22})\ \cos\ (x_3\tilde{\nabla})\right\}\xi_{1,11}+$$

$$\left\{(2L_{12}-L_{11})\frac{\sin(x_3\tilde{\nabla})}{\tilde{\nabla}}+x_3(L_{12}-L_{11})\cos(x_3\tilde{\nabla})\right\}\xi_{2,11}-2v\psi_{,22}$$

$$\frac{\sigma_{22}^{PF}}{\mu}=\left\{(L_{21}-2L_{22})\frac{\sin(x_3\tilde{\nabla})}{\tilde{\nabla}}+x_3(L_{21}-L_{22})\cos(x_3\tilde{\nabla})\right\}\xi_{1,22}+$$

$$\left\{(2L_{12}-L_{11})\frac{\sin(x_3\tilde{\nabla})}{\tilde{\nabla}}+x_3(L_{12}-L_{11})\cos(x_3\tilde{\nabla})\right\}\xi_{2,22}-2v\psi_{,11}$$

$$\frac{\sigma_{33}^{PF}}{\mu}=\left\{x_3(L_{22}-L_{21})\cos(x_3\tilde{\nabla})+(L_{21}-2L_{22})\frac{\sin(x_3\tilde{\nabla})}{\tilde{\nabla}}\right\}\tilde{\nabla}^2\xi_1+$$

$$\left\{x_3(L_{11}-L_{12})\cos(x_3\tilde{\nabla})+(2L_{12}-L_{11})\frac{\sin(x_3\tilde{\nabla})}{\tilde{\nabla}}\right\}\tilde{\nabla}^2\xi_2$$

$$\frac{\sigma_{23}^{PF}}{\mu}=\left\{x_3(L_{22}-L_{21})\frac{\sin(x_3\tilde{\nabla})}{\tilde{\nabla}}\tilde{\nabla}^2+(L_{21}-2L_{22})\cos(x_3\tilde{\nabla})\right\}\xi_{1,2}+$$

$$\left\{x_3(L_{11}-L_{12})\frac{\sin(x_3\tilde{\nabla})}{\tilde{\nabla}}\tilde{\nabla}^2+(2L_{12}-L_{11})\cos(x_3\tilde{\nabla})\right\}\xi_{2,2}$$

$$\frac{\sigma_{31}^{PF}}{\mu}=\left\{x_3(L_{22}-L_{21})\frac{\sin(x_3\tilde{\nabla})}{\tilde{\nabla}}\tilde{\nabla}^2+(L_{21}-2L_{22})\cos(x_3\tilde{\nabla})\right\}\xi_{1,1}+$$

$$\left\{x_3(L_{11}-L_{12})\frac{\sin(x_3\tilde{\nabla})}{\tilde{\nabla}}\tilde{\nabla}^2+(2L_{12}-L_{11})\cos(x_3\tilde{\nabla})\right\}\xi_{2,1}$$

$$\frac{\sigma_{12}^{PF}}{\mu}=\left\{(L_{21}-2L_{22})\frac{\sin(x_3\tilde{\nabla})}{\tilde{\nabla}}+x_3(L_{21}-L_{22})\cos(x_3\tilde{\nabla})\right\}\xi_{1,12}+$$

$$\left\{(2L_{12}-L_{11})\frac{\sin(x_3\tilde{\nabla})}{\tilde{\nabla}}+x_3(L_{12}-L_{11})\cos(x_3\tilde{\nabla})\right\}\xi_{2,12}+2v\psi_{,12}\qquad(36)$$

6. 结果与讨论

本文从 Papkovich-Neuber 通解的变形形式出发，利用 Lur'e 算子函数表示，获得了没有任何预先假设的置入 Winkler 地基板的精化理论，获得了精确的精化方程，精化方程分为剪切和超越两部分。最后，给出了两个方程对应的位移场和应力场。

与 Cheng 氏精化理论对比，

$$
\begin{aligned}
\Psi_1 &= -\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=0} = \frac{3-2v}{2}\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + (1-v)\frac{\partial g_3}{\partial x_1} \\
\Psi_2 &= -\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=0} = \frac{3-2v}{2}\frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_1} + (1-v)\frac{\partial g_3}{\partial x_2} \\
W &= u_3\bigg|_{x_3=0} = \frac{1-2v}{2}F + (1+v)\, g_3
\end{aligned}
\tag{37}
$$

改写成算子矩阵的形式，有：

$$
\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3-2v}{2}\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & (1-v)\frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{3-2v}{2}\frac{\partial}{\partial x_2} & -\frac{\partial}{\partial x_1} & (1-v)\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{1-2v}{2} & 0 & 1+v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ f \\ g_3 \end{pmatrix}
\tag{38}
$$

根据 Lur'e 算子理论可以知道：

$$
\begin{pmatrix} F \\ f \\ g_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{(2v^2-2v-1)\,\tilde{\nabla}^2} \begin{pmatrix} -(1-v)\frac{\partial}{\partial x_1} & (2v^2-2v-1)\frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{1-2v}{2}\frac{\partial}{\partial x_1} \\ -(1-v)\frac{\partial}{\partial x_2} & -(2v^2-2v-1)\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{1-2v}{2}\frac{\partial}{\partial x_2} \\ (1-v)\,\tilde{\nabla}^2 & 0 & -\frac{3-2v}{2}\tilde{\nabla}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ W \end{pmatrix}
\tag{39}
$$

将式（39）代入应力场，利用自由板面的边界条件，可以获得和 Cheng 氏精化理论相同的结论。

[参考文献]

[1] Cheng S. Elasticity theory of plates and a refined theory. *J. Appl. Mech.*, 1979, 46 (2): pp. 644 -650.

[2] Lur'e A. I. *Three-dimensional Problems of the Theory of Elasticity*. New York: Interscience, 1964. pp. 148 - 149.

[3] 王飞跃. 横观各向同性板的弹性精化理论. 上海力学, 1985, 6（2）: 10 ~21.

[4] 赵宝生, 王敏中. 横观各向同性板精化理论中的超越方程. 北京大学学报（自然科学版), 2004, 40（1）: 37 ~45.

[5] Wang W. and Shi M. X. Thick plate theory based on general solutions of elasticity. *Acta Mech.*, 1997, 123（1）: pp. 27 -36.

[6] Yin H. M. and Wang W. A refined theory of transversely isotropic plates. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis*, 2001, 37（1）: pp. 23 -33.

[7] 王炜, 罗长虹. 定常温度热弹性板的精化理论. 工程力学, 2000, 17（2）: 111 ~118, 141.

[8] Gao Y., Zhao B. S. A refined theory of elastic thick plates for extensional deformation. *Archive of Applied Mechanics*, 2009, 79: pp. 5 - 18.

[9] 赵宝生，王敏中．磁弹性板的精化理论. 工程力学，2006，23（3）：82～87，110.

[10] 赵宝生，王敏中，于新．Winkler 弹性地基上梁的精化理论. 应用力学学报，2005，22（4）：602～605.

[11] 赵宝生，佟继龙，高阳. 置入线弹性地基内梁的精化理论. 工程力学，2009，26（S1）：16～19.

[12] Gregory R. D. The general form of the three-dimensional elastic field inside an isotropic plate with free faces. *J. Elasticity*, 1992, 28: pp. 1 –28.

[13] 赵宝生，王敏中．弹性板中精化理论与分解定理的等价性．应用数学与力学，2005，26（4）：447～455.

[14] 王敏中，王炜，武际可. 弹性力学教程. 北京：北京大学出版社，2002. 154～155.

[15] 王敏中. 弹性半空间几个边值问题的解. 北京大学学报（自然科学版），1980（4）：36～42.

[16] Eubanks R. A. and Sternberg E. On the completeness of the Boussinesq-Papkovich stress functions. *J. Rat Mech. Anal.*, 1956（5）: pp. 735 –746.

纤维增强复合材料层合板的功能梯度设计及界面应力集中研究

傅衣铭　张　普　田燕萍
（湖南大学力学与航空航天学院，湖南长沙，410082）

［摘　要］　近来纤维增强复合材料的设计已逐渐精细化，研究者试图通过纤维的非均匀铺设以获得理想的结构力学性能。本文考虑复合材料中纤维体积分数沿板厚度方向的非均匀分布，在每一单层板设定梯度分布函数。利用状态空间法求得了四边简支功能梯度纤维增强层合板静力弯曲问题的弹性精确解，所得到的精确层间应力分布可以为进一步的强度和破坏分析奠定基础。通过传统层合板与功能梯度层合板中应力沿厚度方向分布的比较，发现纤维体积分数的梯度变化可以显著改变层合板的面内应力，但是对面外应力分布的影响却不明显。

［关键词］　功能梯度；复合材料；层合板；应力集中

复合材料层合结构由于其轻质、高强、抗疲劳等优点，已广泛地应用于现代工业中。同时，其可设计性又为这种材料带来了广阔的发展空间。传统的纤维增强复合材料层合板每一单层具有均一的纤维排列方向以及纤维体积分数，是均匀的正交各向异性材料。对于这种层合结构，研究者对其各种力学性能都进行了大量研究，与之相应的求解方法也日趋成熟[1]。随着金属—陶瓷功能梯度复合材料的出现，研究者将这种设计思想引入到纤维增强复合材料的设计中来，在前20年中得到了广泛的发展和应用。

Martin 和 Leissa[2,3]通过改变单层板面内各方向的纤维比例分布，求得了平面问题的数值解以及特定条件下的精确解。同时，他们发现这种铺设方式可以改变结构的临界屈曲荷载以及共振频率。随后，Shiau[4,5]利用有限元法对这种板的自由边及孔边应力集中问题进行了研究，发现自由边或孔边处纤维体积分数的减小可以有效地降低应力幅值。Meftah[6]将这种板应用到剪力墙的加固技术中，利用有限元法分析了这种结构的侧向刚度与振动性能等。而后，纤维铺设比例的变化扩展到多个方向。Benatta[7]，Oyekoya[8]以及 Kuo[9]等考虑梁或板沿厚度或其他方向纤维的非均匀分布，研究了不同分布方式对结构应力分布、屈曲临界荷载及共振频率的影响。他们的目的在于改变纤维的分布方式，从而使结构达到理想的力学性能。实际上，对纤维铺设方式的改变是十分灵活的，并不仅限于对纤维体积分数进行改变。Batra[10]和 Han[11]等对纤维铺设角度沿厚度方向的梯度分布进行了研究，试图改变结构的屈曲及振动性能。Bouremana[12]等引

［收稿日期］2009－09－20
［基金项目］国家自然科学基金资助项目（No. 10572066）
［作者简介］傅衣铭（1945—　），男，教授，硕士，研究方向：结构非线性动力学、复合材料力学及损伤理论