矩阵理论学习指导

黄廷祝　杨传胜　主编

清华大学出版社

矩阵理论学习指导

黄廷祝 杨传胜 主编

清华大学出版社
北京

内容简介

本书对矩阵理论的基本概念、主要结论等作了简明扼要的分类总结，针对每章主要内容给出了典型例题分析，并对各章的课后习题做了详细的解答，最后提供了6套复习题及相应解答以便读者自测参考.

本书叙述简明，概括性强，可作为理工科研究生和本科高年级学生学习"矩阵理论"课程的辅导书，也可作为从事矩阵理论教学工作的教师和有关科技工作者的参考书.

版权所有，侵权必究。侵权举报电话：010-62782989　13701121933

图书在版编目（CIP）数据

矩阵理论学习指导/黄廷祝，杨传胜主编. --北京：清华大学出版社，2010.10

ISBN 978-7-302-23741-9

Ⅰ. ①矩…　Ⅱ. ①黄…　②杨…　Ⅲ. ①矩阵—理论—自学参考资料　Ⅳ. ①O151.21

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第167878号

责任编辑：陈　明
责任校对：王淑云
责任印制：孟凡玉

出版发行：清华大学出版社　　地　址：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　邮　编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：185×230　　印　张：9.75　　字　数：208千字
版　次：2010年10月第1版　　印　次：2010年10月第1次印刷
印　数：1～3000
定　价：19.00元

产品编号：038977-01

前言

矩阵理论是面向理工科研究生和数学专业高年级本科生开设的一门数学基础课,它在数值分析、最优化方法、微分方程、控制理论等分支及各种工程学科有极其重要的应用.矩阵理论已成为科技领域中不可缺少的数学工具.因此,学习和掌握矩阵的基本理论与方法,对于初学者来说是必不可少的.

本书是研究生教材《矩阵理论》(黄廷祝、钟守铭、李正良,高等教育出版社,2003)一书的学习指导书,由相应章节内容的基本概念、主要结论、典型例题、习题解答及复习题五部分组成,书中给出了教材中所有习题的详细解答,其目的在于帮助读者学习矩阵的基本理论、掌握解题方法、提高解题技巧以及了解相关学科中的应用等.

本书对于学习矩阵理论课程的研究生、本科生以及参加博士生入学矩阵理论考试的有关人员有很好的辅导作用,对于从事矩阵理论教学的教师也有一定的参考价值.

本书由黄廷祝、杨传胜主编,具体执笔者为:李厚彪(第一章)、程光辉(第二章及复习题)、高中喜(第三、四章)、龚丽莎(第五、六章)和王转德(第七章)等.

限于水平,书中难免存在不当甚至错误之处,敬请读者批评指正,以期今后改正.

编者

电子科技大学,成都

2010年6月

目录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一章 线性代数基础

线性代数有着悠久的历史，是数学学科中的一门重要基础课，在线性规划、离散数学、管理科学、计算机科学以及物理学、化学等学科中有着极为广泛的应用.

本章主要分为线性代数的基本概念、主要结论、典型例题和习题解答几个部分，所讨论的内容既是已有线性代数知识的深化，也是全面理解和掌握本书后面内容的数学基础.

一、基本概念

（一）线性空间与线性变换

作为在研究物理学、力学中满足叠加原理的系统的一种数学抽象，线性空间与线性变换是学习矩阵理论的两个基本概念. 线性空间是对集合中的元素在进行线性运算时的共性加以概括而形成的，是 n 维向量空间的抽象和推广. 线性变换则反映了线性空间中的元素之间最基本的线性关系，是研究线性空间的主要工具.

1. 线性空间

定义 1 设 V 是一个非空集合，P 是一个数域. 如果 V 满足如下两个条件：

(1) 在 V 中定义了一个封闭的加法运算，即当 $\alpha,\beta\in V$ 时，有唯一的和 $\alpha+\beta\in V$，并且加法运算满足 4 条性质：

① $\alpha+\beta=\beta+\alpha$（交换律）；

② $(\alpha+\beta)+\upsilon=\alpha+(\beta+\upsilon)$（结合律）；

③ 存在零元素 $0\in V$，使得对于 V 中任何一个元素 α 都有 $\alpha+0=\alpha$；

④ 存在负元素，即对任一元素 $\alpha\in V$，存在有一个元素 $\beta\in V$，使得 $\alpha+\beta=0$（β 称为 α 的负元素，记为 $\beta=-\alpha$）.

(2) 在 V 中定义了一个封闭的数乘运算，即对于数域 P 中任一数 k 和任意 $\alpha\in V$，有唯一的 $k\alpha\in V$，且数乘运算满足 4 条性质：

⑤ $1\alpha=\alpha$；

⑥ $k(l\alpha)=(kl)\alpha$(结合律)；

⑦ $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$(分配律)；

⑧ $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$ (数因子分配律).

这时，我们称 V 是数域 P 上的线性空间，其中 α,β,υ 表示 V 中的任意元素；k,l 是数域 P 中的任意数；1 是数域 P 中的单位元.

通常我们把 V 中满足以上 8 条性质且封闭的加法及数乘两种运算，统称为线性运算. 线性运算是线性空间的本质，它反映了集合中元素之间的某种代数结构.

下面是几种常见的线性空间：

(1) 实行向量空间 $\mathbf{R}^n=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R}\}$.

(2) 复矩阵空间 $\mathbf{C}^{m\times n}=\{\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}\mid a_{ij}\in\mathbf{C}\}$.

(3) 复多项式空间 $P_n[t]=\{f(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n\mid a_i\in\mathbf{C}\}$.

(4) 齐次线性方程组的解空间 $\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\}$，其中 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}$.

2. 线性空间的基与维数

定义 2 设 V 是数域 P 上的线性空间，$x_1,x_2,\cdots,x_n(n\geqslant1)$是 V 中的任意 n 个向量，如果满足

(1) $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性无关；

(2) V 中任何向量 x 均可由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性表示.

则称 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 V 的一组基(或基底)，并称 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 V 的一组基向量.

线性空间 V 的基向量所含向量的个数 n，称为线性空间 V 的维数，记为 $\dim V=n$，并称 V 为 n 维线性空间，简记为 V^n. 最小的有限维线性空间是零空间，其维数为 0.

3. 线性子空间

定义 3 如果数域 P 上线性空间 V 的一非空子集 W 对于 V 的两种运算也构成线性空间，则称 W 为 V 的一个线性子空间(简称子空间).

显然，对于一个线性空间 V，这里至少存在两个子空间—— 一个是其自身，另一个是仅含零向量的零子空间. 另外，子空间之间也可进行多种运算，如交与和，其相互作用可构成一些新的子空间.

4. 线性变换

定义 4 线性空间 V 的一个变换 A 称为线性变换，如果对于 V 中任意的元素 α,β 和数域 P 中任意数 k,l，都有 $A(k\alpha+l\beta)=kA(\alpha)+lA(\beta)$.

下面给出几种常见的线性子空间.

(1) 生成子空间 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n)$或者 $\mathrm{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$　设 V 是数域 P 上的线性空间，$x_i\in V(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\{x=k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n \mid k_i\in P, i=1,2,\cdots,n\}.$$

(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的值域 $R(\boldsymbol{A})$　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$ 的列向量组为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$，则

$$R(\boldsymbol{A})=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=\{\boldsymbol{y}\mid \boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n\}.$$

(3) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零空间 $N(\boldsymbol{A})$　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$，则 $N(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n\}$.

(4) 线性变换 A 的值域 $R(A)$　设 A 是线性空间 V 的线性变换，则

$$R(A)=\{y\mid y=A\alpha,\alpha\in V\}.$$

(5) 线性变换 A 的核 $N(A)$　设 A 是线性空间 V 的线性变换，则

$$N(A)=\{x\mid Ax=0,x\in V\}.$$

(6) 线性变换 A 的特征子空间 V_λ　设 λ 是线性空间 V 中线性变换 A 的一个特征值，则

$$V_\lambda=\{x\mid Ax=\lambda x,x\in V\}.$$

另外，对于线性变换来说，这里也存在着许多常见的特殊形式，如正交变换(初等旋转变换和镜像变换等)、对称变换、正规变换和酉变换等. 这些变换的定义在此不再详述，可详见本章第二部分中关于这些概念的一些相应的等价条件.

(二) 空间分解与维数定理

定义 5　设 V_1,V_2 是线性空间 V 的子空间，由同时属于这两个子空间中的向量构成的子集合，叫做 V_1 与 V_2 的交，记为 $V_1\cap V_2=\{\alpha\mid\alpha\in V_1,\alpha\in V_2\}$.

定义 6　设 V_1,V_2 是线性空间 V 的子空间，所谓 V_1 与 V_2 的和，记为

$$V_1+V_2=\{\alpha=\alpha_1+\alpha_2\mid\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2\}.$$

一般地，V_1+V_2 和 $V_1\cap V_2$ 均是 V 的子空间，但一般说来，$V_1\cup V_2$ 并不是 V 的一个子空间(见本章典型例题分析中的例 2). 另外，它们一起构成的分配律一般也不成立.

定义 7　设 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 是线性空间 V 的子空间，如果和空间 $V_1+V_2+\cdots+V_s$ 中的每个向量 α 都有分解式

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s,\quad \alpha_i\in V_i(i=1,2,\cdots,s),$$

且这种分解是唯一的，则称这个和为直和，记为 $V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$.

定义 8　设 T 是酉空间(复内积空间) $V^n(\mathbf{C})$ 上的线性变换，W 是 $V^n(\mathbf{C})$ 的子空间，如果对 $\forall\xi\in W$，有 $T(\xi)\in W$，即 $T(W)\subseteq W$，则称 W 是 T 的不变子空间.

定义 9　对酉空间 $V^n(\mathbf{C})$ 的两个子空间 V_1 和 V_2，若有 $V_1\perp V_2$，且 $V_1+V_2=V^n(\mathbf{C})$，则称 V_2 为 V_1 的正交补子空间(或简称正交补)，记为 $V_2=V_1^{\perp}$.

显然，如果 V_2 是 V_1 的正交补，则 V_1 也是 V_2 的正交补，且 V_1+V_2 是直和，即 $V^n(\mathbf{C})=V_1\oplus V_2$.

(三) 商空间

定义 10　设 $\alpha\in V$，如果 $\alpha'\in V$ 满足 $\alpha'-\alpha\in M$，则称 α' 与 α 模 M 同余，记为 $\alpha'\equiv\alpha(\mathrm{mod}\ M)$. 其中 V 是一个 n 维线性空间，M 是它的子空间. 显然，$\forall\alpha\in V$，则 V 的子集 $\alpha+M=$

$\{\alpha+m|m\in M\}$内的任意一向量必与α模M同余；反之，与α模M同余的向量必属于$\alpha+M$. 那么，我们称$\alpha+M$为一个模M的同余类，而α称为这个同余类的代表.

定义 11 V的所有模M同余类的全体组成的集合称为V的商集，记为$\bar{V}$.

定义 12 在商集$\bar{V}$中定义如下加法和数乘两种运算：

(1) $(\alpha+M)+(\beta+M)=(\alpha+\beta)+M$；

(2) $k(\alpha+M)=k\alpha+M, \forall k\in P$.

则商集$\bar{V}$构成了数域P上的一个线性空间，称为V对于子空间M的商空间，记为V/M.

上述定义的同余关系实际上是一种等价关系，因此可以用其对n维线性空间V进行分类. 另外，与之类似的一个概念就是如下要谈到的线性流形问题.

（四）线性流形与凸包

定义 13 设V_1是V的子空间，r_0是V的固定向量，则称集合

$$P=r_0+V_1=\{r_0+\alpha \mid \alpha\in V_1\}$$

为线性空间V的一个线性流形，且V_1的维数称为线性流形P的维数.

线性流形是一个很重要的概念，许多实际问题都可转化为线性流形上的问题，如超平面问题、非奇次线性方程组解的结构问题等.

定义 14 在$\mathbf{R}^n$中以向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$的终点为端点的线段定义为

$$\{\boldsymbol{r} \mid \boldsymbol{r}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2, k_1+k_2=1, k_1,k_2\geqslant 0\}.$$

如果在$\mathbf{R}^n$的点集M中，以任意两点为端点组成的线段都含于M中，则称M为凸集. 给定集合$A\subset\mathbf{R}^n$，$\mathbf{R}^n$中所有包含A的凸集的交集称为A的凸包. 显然，$\mathbf{R}^n$中有限点集$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的凸包为

$$M^*=\left\{\boldsymbol{r} \mid \boldsymbol{r}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s, \sum_{i=1}^{s}k_i=1, 0\leqslant k_i\leqslant 1\right\}.$$

（五）特征值与特征向量

定义 15 设$\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，如果存在$\lambda\in\mathbf{C}$和非零向量$\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n$，使$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，则$\lambda$叫做$\boldsymbol{A}$的特征值，$\boldsymbol{x}$叫做$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda$的特征向量.

另外，就线性变换来说，也存在与之类似，实质上等价的定义.

定义 16 设T是线性空间V的一个线性变换，如果存在$\lambda\in\mathbf{C}$和非零向量$\xi\in V$，使得$T\xi=\lambda\xi$，则λ叫做T的特征值，ξ叫做T的属于特征值λ的特征向量.

一般地，矩阵$\boldsymbol{A}$的所有特征值的全体，叫做$\boldsymbol{A}$的谱，记做$\lambda(\boldsymbol{A})$. 另外，除了上述一般特征值问题外，还有如下更一般的广义特征值问题.

定义 17 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，如果对于一个复数$\lambda$，存在非零向量$\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n$，使得$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$，则称$\lambda$为矩阵$\boldsymbol{A}$相对于$\boldsymbol{B}$的特征值，或称$\lambda$为$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$确定的广义特征值. 非零向量$\boldsymbol{x}$称为与$\lambda$对应的广义特征向量.

定义 18 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，如果存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

则 $\boldsymbol{A}$ 叫做可对角化矩阵.

（六）欧氏空间上的度量

定义 19 在线性空间 $V^n(P)$ 中，若映射 (x,y)：$V^n(P)\times V^n(P)\to P$ 满足

(1) $(x,x)\geqslant 0$，$(x,x)=0$ 当且仅当 $x=0$；

(2) $(x,y)=\overline{(y,x)}$，$\forall x,y\in V^n(P)$；

(3) $(\lambda x,y)=\bar{\lambda}(x,y)$，$\forall\lambda\in P$，$\forall x,y\in V^n(P)$；

(4) $(x+y,z)=(x,y)+(x,z)$，$\forall x,y,z\in V^n(P)$，

则称 (x,y) 是 $V^n(P)$ 上的内积，定义了内积的线性空间称为内积空间.

（七）初等矩阵及酉变换

定义 20 设 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbf{C}^n$，$\sigma\in\mathbf{C}$，形如

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v};\sigma)=\boldsymbol{E}_n-\sigma\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{H}}$$

的矩阵叫做初等矩阵，其中 $\boldsymbol{v}$ 的 Hermite 转置 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{H}}$ 表示对 $\boldsymbol{v}$ 取转置后再取复共轭，$\boldsymbol{E}_n$ 表示 n 阶单位矩阵.

定义 21 设 $\boldsymbol{u}\in\mathbf{C}^n$，且 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}=1$，则

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u};2)=\boldsymbol{E}_n-2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{H}},$$

称为初等酉阵，或 Householder 变换.

定义 22 若线性空间 $V^n(\mathbf{C})$ 上的变换 T 满足

$$(T(x),T(y))=(x,y),\ \forall x,y\in V^n(\mathbf{C}),$$

则称 T 为 $V^n(\mathbf{C})$ 上的酉变换.

（八）酉空间的分解与投影

定义 23 设 $V^n(\mathbf{C})$ 是线性空间，如果线性变换 $T:V^n(\mathbf{C})\to V^n(\mathbf{C})$ 具有 $T^2=T$ 的性质，则称 T 是 $V^n(\mathbf{C})$ 上的投影（也称投影算子或幂等算子）.

定义 24 设 T 是 $V^n(\mathbf{C})$ 上的投影，$V^n(\mathbf{C})=R(T)\oplus N(T)$. 如果 $R^{\perp}(T)=N(T)$，则称 T 是正交投影.

（九）Kronecker 乘积

定义 25 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in P^{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in P^{p\times q}$，则

$$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}\boldsymbol{B} & a_{12}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{1n}\boldsymbol{B}\\ a_{21}\boldsymbol{B} & a_{22}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{2n}\boldsymbol{B}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1}\boldsymbol{B} & a_{m2}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{mn}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的 Kronecker 乘积（也称直积或张量积）.

定义 26 设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{c1},\boldsymbol{A}_{c2},\cdots,\boldsymbol{A}_{cn})$，令

$$\mathrm{Vec}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{c1}\\ \boldsymbol{A}_{c2}\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_{cn}\end{pmatrix},$$

称 Vec 为向量化算符(俗称拉直).

（十）线性代数在科学工程中的应用

数学学科的重要性除了它对人的逻辑推理、空间想象和分析问题等能力的培养具有其他学科无法代替的作用外，更重要的是其应用的广泛性. 线性代数的应用大体上可以分为两个方面，一是在其他数学分支中的应用，另一就是在数学学科之外的应用，其应用范围不仅包括物理学、化学、天文学、生物学等传统学科，还包括现代工程技术和经济理论等学科.

对线性空间和线性变换来说，在数学学科中可用于最优化理论中的最优下降法、线性规划和最小二乘问题等，现代科学计算中的 Krylov 子空间方法等，概率论中协方差的计算等，空间解析几何中二次曲面的划分问题等；在其他科学中，还可用于计算机图形学中计算机层析 X 射线问题，化学中离子(原子和分子)的振动问题，以及经济学研究中常用的随机矩阵和非负矩阵相关问题，物理学中求解相对论问题的洛伦兹变换等.

另外，在移动通信中，多址通信技术的理论基础是基于线性代数中的正交向量等理论；在模式识别中，近邻分类模式分类法也常用到线性代数中的欧氏空间上的度量等基础知识.

空间分解与投影技术在实际问题中也越来越受到了大家的欢迎，如 20 世纪 30 年代发展起来的斜投影算子现已广泛应用于图像恢复、快速系统识别、脉冲噪声对消、误码校正编码、信道与发射字符的联合估计等领域；正交投影矩阵在移动通信的盲多用户检测的 LMS 型自适应算法中也有很好的应用等.

另外，就其在数学其他分支中的应用来说，商空间、线性流形与凸包实际上是对常见的线性方程组解空间理论的更加一般性的抽象和概括. 如相容的(即有解的)非齐次线性方程组的解实际上是一个由导出组的解空间构成的线性流形.

还如，现代工程技术中一些振动问题(如振动分子的固有频率)与稳定性问题，数学中矩阵的对角化与微分方程组的求解问题，还有卫星和喷气式飞机工程设计等一些实际问题，都可以归结为求矩阵的特征值与特征向量的问题.

最后，矩阵的 Kronecker 乘积和向量化算符相结合也有着广泛的应用，例如利用这一技术可以方便地研究一般线性矩阵方程

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_2+\cdots+\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_p=\boldsymbol{C}$$

的相容性及其解法等问题(见本章的主要结论部分)，其中 $\boldsymbol{A}_i\in\mathbf{C}^{m\times m},\boldsymbol{B}_i\in\mathbf{C}^{n\times s},\boldsymbol{C}\in\mathbf{C}^{m\times s}$ 均为已知矩阵，$\boldsymbol{X}\in\mathbf{C}^{m\times n}$ 是未知矩阵.

二、主要结论

(一) 线性空间与线性变换

线性空间和线性变换是线性代数研究的主要内容之一. 特别是一些重要的不变子空间和线性变换的性质,都是线性代数中的重点知识.

1. 子空间的性质

(1) 设 $V_1,V_2,\cdots,V_m$ 是线性空间 V 的真子空间,则必存在 $\alpha\in V$,使得 $\alpha\notin V_i,1\leqslant i\leqslant m$.

(2) (扩展性定理) 设 $V_1=L(u_1,u_2,\cdots,u_m)$,令 $v_1,v_2,\cdots,v_r$ 是 V_1 中的 r 个线性无关的向量,且 $r<m$,则可以从 $u_1,u_2,\cdots,u_m$ 中去掉 r 个向量,使剩下的 $m-r$ 个向量与 $v_1,v_2,\cdots,v_r$ 合在一起仍生成子空间 V_1.

2. 子空间的和与交的基与维数的求法

设 V_1 和 V_2 是 V 的子空间,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$是 V_1 的一组基,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$是 V_2 的一组基,则

(1) V_1+V_2 的维数等于矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)$的秩 r,且 $\boldsymbol{A}$ 中 r 个线性无关的列即为 V_1+V_2 的基;

(2) 令 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_k\boldsymbol{\alpha}_k=y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+y_l\boldsymbol{\beta}_l$,解这个方程组求得一个基础解系

$$(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{ik},y_{i1},y_{i2},\cdots,y_{il})^{\mathrm{T}},\quad i=1,2,\cdots,d;d=k+l-r,$$

则 $\boldsymbol{z}_i=\sum\limits_{j=1}^{l}y_{ij}\boldsymbol{\beta}_j\,(i=1,2,\cdots,d)$ 就是 $V_1\cap V_2$ 的一组基,$V_1\cap V_2$ 的维数为 $d=k+l-r$.

3. 线性变换的值域与核

(1) $R(A)=L(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n)$,其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是线性空间 V 的一组基,且 $\dim R(A)=r$(线性变换 A 所对应的矩阵的秩);

(2) $\dim R(A)+\dim N(A)=\dim V$;

(3) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是$R(A)$的一组基且 $A\beta_i=\alpha_i,1\leqslant i\leqslant n$,则

$$V=N(A)\oplus L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n).$$

因此,一般地 V 不等于$R(A)$与 $N(A)$的直和;

(4) $R(A)$和 $N(A)$都是线性变换 A 的不变子空间;

(5) A 与 B 可换,则 B 的核与值域也是 A 的不变子空间.

4. 不变子空间

(1) 线性空间 V 的子空间 W 是线性变换 A 的不变子空间当且仅当对任意的 $\alpha\in W$ 有 $A\alpha\in W$；

(2) 设 λ 是线性变换 A 的特征值，则 A 属于 λ 的特征子空间 $V_\lambda=\{x\mid Ax=\lambda x\}$ 是 A 的不变子空间；

(3) 不变子空间的和与交仍是不变子空间；

(4) 任一空间是数乘变换的不变子空间；

(5) 设 W 是线性空间 V 的子空间且 $W=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$，则 W 是线性变换 A 的不变子空间当且仅当 $A\alpha_i\in W, i=1,2,\cdots,r$；

(6) 设 V_1 是线性变换 A 的不变子空间，则对任一多项式 f，V_1 是 $f(A)$ 的不变子空间；

(7) 设 A 和 B 是线性变换且 $AB=BA$，V_λ 是 A 的特征子空间，则 V_λ 也是 B 的不变子空间；

(8) 设 V_1 是线性变换 A 和 B 的不变子空间，则它也是 $A+B$ 及 AB 的不变子空间；

(9) 设 A 是 n 维线性空间 V 上的线性变换，若 A 有 n 个不同的特征根，则 A 有 2^n 个不变子空间.

5. 几种常见的线性变换

1) 正交变换

(1) 下列说法等价：

① 欧氏空间 V 的线性变换 A 是正交变换；

② A 保持内积不变，即对任意的 $\alpha,\beta\in V$，有 $(A\alpha,A\beta)=(\alpha,\beta)$；

③ A 保持长度不变，即对 V 的任意元 α，有 $(A\alpha,A\alpha)=(\alpha,\alpha)$；

④ A 把一组标准正交基变为另一组标准正交基；

⑤ A 在一组标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

(2) 欧氏空间中的一个变换，若保持内积不变，则是正交变换.

(3) 正交变换的逆和积是正交变换.

(4) A 的特征值的模等于 1.

2) 对称变换

(1) 欧氏空间 V 中的线性变换 A 是对称变换，当且仅当对任意的 $\alpha,\beta\in V$，有 $(A\alpha,\beta)=(\alpha,A\beta)$；当且仅当在一组标准正交基下变换 A 所对应的矩阵为对称矩阵.

(2) 设 A 是欧氏空间 V 中的对称变换，若 V_1 是 A 的不变子空间，则 V_1 的正交补 $V_1^\perp$ 也是 A 的不变子空间.

(3) 对称变换的所有特征值全为实数，且属于不同特征值的特征向量互相正交.

3）共轭变换与正规变换

类似于欧氏空间的定义，设 V 是复数域上的线性空间，并在其上定义了内积，则称 V 为酉空间．这里的内积是二元复函数，满足 $(\alpha,\beta)=\overline{(\beta,\alpha)}$．对应于欧氏空间的正交变换和对称变换，在酉空间中有酉变换和对称变换．设 A 是酉空间中的线性变换．若对任意的 $\alpha,\beta\in V$，有 $(A\alpha,\beta)=(\alpha,B\beta)$，则称 B 是 A 的共轭变换，并记为 $B=A^*$．有关共轭变换的几个重要结论可归纳如下：

(1) 设线性变换 A 在一组标准正交基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则 A 的共轭变换在这组基下的矩阵为 $\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$．

(2) 共轭变换满足 $(A^*)^*=A,(A+B)^*=A^*+B^*,(AB)^*=B^*A^*,(kA)^*=\bar{k}A^*$．

(3) 设酉空间 V 的子空间 W 是线性变换 A 的不变子空间，则 W 的正交补 $W^{\perp}$ 是 A^* 的不变子空间．

(4) 若 $AX=\lambda X$，则 $A^*X=\bar{\lambda}X$．

(5) 若线性变换 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 A^* 的特征值为 $\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2,\cdots,\bar{\lambda}_n$．

(6) 若线性变换 A 满足 $A^*A=AA^*$，则称 A 为正规变换．常见的正交变换，对称变换都是正规变换．

(7) 设 A 是正规变换，则属于 A 的不同特征值的特征向量正交．

(8) 若 A 是正规变换，W 是 A 的不变子空间，则 $W^{\perp}$ 也是 A 的不变子空间．

(9) 若线性变换 A 满足 $A^*=-A$，则称 A 为酉空间的反对称变换．显然反对称变换也是正规变换，且它满足对任意的 $\alpha,\beta\in V$，有 $(A\alpha,\beta)=-(\alpha,A\beta)$．

(10) 设 A 是酉空间的线性变换，则 A 是正规变换当且仅当 A 的每个特征向量也是 A^* 的特征向量．

（二）空间分解与维数定理

1．（维数公式）设 V_1,V_2 是线性空间 V 的子空间，则

$$\dim(V_1)+\dim(V_2)=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2).$$

2．（存在性定理）设 V_1 是 n 维线性空间 V 的一个子空间，则一定存在 V 的一个子空间 V_2，使得 $V=V_1\oplus V_2$．

3．设 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 是线性空间 V 的子空间，则下列几条命题相互等价：

(1) $W=\sum\limits_{i=1}^{s}V_i$ 是直和；

(2) 零向量表式法唯一；

(3) $V_i\cap\left(\sum\limits_{j\neq i}V_j\right)=\{0\},1\leqslant i\leqslant s$；

(4) $\dim(W)=\sum\limits_{i=1}^{s}\dim(V_i)$．

4．设 T 是线性空间 V^n 的线性变换，若 V^n 可分解为 T 的不变子空间 $V_i(i=1,2,\cdots,m)$

的直和，则 T 在由 $V_1, V_2, \cdots, V_m$ 的基拼接而构成 V^n 的基下的矩阵为准对角矩阵.

5. 设 T 是线性空间 V^n 的线性变换，若 T 在 V^n 的某个基下的矩阵为准对角矩阵 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_m)$，则 V^n 可分解为 T 的 m 个不变子空间的直和.

6. 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{m\times n}$，则有

(1) $[R(\boldsymbol{A})]^{\perp} = N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$，且 $\mathbf{C}^m = R(\boldsymbol{A}) \oplus N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$；

(2) $[R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})]^{\perp} = N(\boldsymbol{A})$，且 $\mathbf{C}^n = R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}) \oplus N(\boldsymbol{A})$.

（三）商空间

1. V 的关于子集 M 的商集 $\overline{V}$ 中的任意元素 $\alpha + M$，皆是模 M 的一个同余类，且满足如下等价关系：

(1) 反身律　$\alpha \equiv \alpha (\mathrm{mod}\ M)$；

(2) 对称律　若 $\alpha' \equiv \alpha (\mathrm{mod}\ M)$，则 $\alpha \equiv \alpha' (\mathrm{mod}\ M)$；

(3) 传递律　若 $\alpha'' \equiv \alpha' (\mathrm{mod}\ M)$，$\alpha' \equiv \alpha (\mathrm{mod}\ M)$，则 $\alpha'' \equiv \alpha (\mathrm{mod}\ M)$.

2.（商空间维数公式）设 M 是 V 的子空间，则

$$\dim\left(\frac{V}{M}\right) = \dim(V) - \dim(M).$$

（四）线性流形与凸包

1.（线性流形存在性定理）对任一 s 维线性流形 P，存在 $s+1$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$，使得

$$P = \{x = k_0\boldsymbol{\alpha}_0 + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s \mid k_0 + k_1 + \cdots + k_s = 1\},$$

且向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_0, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s - \boldsymbol{\alpha}_0$ 线性无关．反之，设 $\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中任意 $s+1$ 个向量，且 $k_0 + k_1 + \cdots + k_s = 1$，则形如 $x = k_0\boldsymbol{\alpha}_0 + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s$ 的所有向量组成一个维数等于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_0, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s - \boldsymbol{\alpha}_0$ 的秩的线性流形 P.

2. 空间 $\mathbf{R}^n$ 的两个维数分别为 k 和 h 的线性流形 P 和 Q 包含在一个维数小于等于 $k+h+1$ 的线性流形中．若线性流形 P 和 Q 有一个公共向量 $\boldsymbol{\alpha}_0$，则 $P \cap Q$ 是一个维数大于等于 $k+h-n$ 的线性流形.

（五）特征值与特征向量

1. 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 有 r 个不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$，其代数重数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_r$，则必存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P} \in \mathbf{C}^{n\times n}$，使得

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{J}_1(\lambda_1), \cdots, \boldsymbol{J}_r(\lambda_r)),$$

其中 $J_i(\lambda_i)(i=1,2,\cdots,r)$ 是维数为 n_i 的 Jordan 块，则矩阵 $\boldsymbol{J}$ 叫做 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形.

2. 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$，则下列命题等价：

(1) $\boldsymbol{A}$ 是可对角化矩阵；

(2) $\mathbf{C}^n$ 存在由 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量构成的一组基底；

(3) $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形中的 Jordan 块都是一阶的；

(4) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值的代数重数和几何重数皆相等；

(5) $\boldsymbol{A}$ 的初等因子都是一次因式；

(6) $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式无重根；

(7) 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱是 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$，则 $\mathbf{C}^n = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$.

3. 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$，$\boldsymbol{A}$ 是可对角化矩阵的几个常见的充分条件为

(1) $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值；

(2) $\boldsymbol{A}$ 的最后一个不变因子是不同的一次因式的乘积；

(3) $\boldsymbol{B}$ 有 n 个不同的特征值，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可换；

(4) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BC}$，且 $\boldsymbol{B}$ 正定，$\boldsymbol{C}$ 为实对称矩阵；

(5) $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵.

4. 线性变换(或矩阵) T 的不同特征值所对应的特征向量是线性无关的.

5. 设 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}$，且 $\boldsymbol{B}$ 是正定的，则 $\boldsymbol{B}$ 的共轭向量系 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 具有以下性质：

(1) $\boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{0}(i=1,2,\cdots,n)$；

(2) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 线性无关；

(3) λ_i 与 $\boldsymbol{x}_i$ 满足方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i = \lambda_i \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_i (i=1,2,\cdots,n)$；

(4) 若记 $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$，则 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{X}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

6. 广义特征值和特征向量的性质

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 都是 Hermite 矩阵(即 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}$)，且 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵，则

(1) 若有分解 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 等价于 $\boldsymbol{S}\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{y}$，其中 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G}^{-1})^{\mathrm{H}}$，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}$；

(2) 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$，即 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 相对于 $\boldsymbol{B}$ 的广义特征值，则 $\lambda \in \mathbf{R}$，且 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = 0$，其中 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 是对应不同广义特征值的广义特征向量；

(3) $R_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}} (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$ 在 $\mathbf{C}^n$ 的一维子空间上的值为常数；

(4) $R_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbf{C}^n$ 的 k 维子空间 V^k 上的最值存在，且能够在 V^k 的子集 $\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = 1, \boldsymbol{x} \in V^k\}$ 上达到；

(5) $R_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x})$ 的驻点是 $\boldsymbol{A}$ 相对于 $\boldsymbol{B}$ 的广义特征值，反之亦然；

(6) 若 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $R_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x})$ 的驻点，则 $R_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x}_0)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 相对于 $\boldsymbol{B}$ 的广义特征值；

(7) $\boldsymbol{A}$ 相对于 $\boldsymbol{B}$ 的最小和最大广义特征值分别为 $\min\limits_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} R_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x})$ 和 $\max\limits_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} R_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x})$；

(8) $\boldsymbol{A}$ 相对于 $\boldsymbol{B}$ 的从小到大排列的第 k 个广义特征值为 $\min\limits_{V^k}[\max\limits_{\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{x}\in V^k} R_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x})]$，$\boldsymbol{A}$ 相对于 $\boldsymbol{B}$ 的从大到小排列的第 k 个广义特征值为 $\max\limits_{V^k}[\min\limits_{\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{x}\in V^k} R_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x})]$，其中 V^k 表示 $\mathbf{C}^n$ 的任意一个 k 维子空间.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com