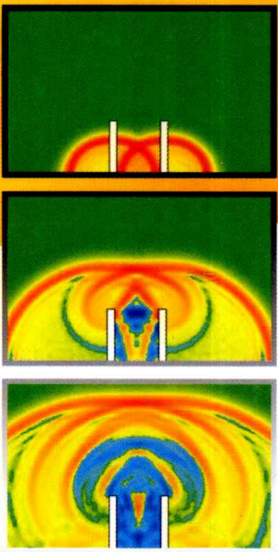

离散外微分在计算电磁学中的应用

马玉杰　谢　正　著

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书讲述离散外微分方法的基本原理及其在计算电磁学中的应用.全书共9章. 第1,2章系统介绍计算电磁学,并概述计算电磁学的现代电磁场理论,是全书物理上的准备;第3~7章讨论离散外微分方法的基本原理,介绍外微分形式与算子的离散化技术,用DEC方法建立离散的Maxwell方程组、网格剖分技术、计算程序设计的主要步骤、数值稳定性、吸收边界条件、常用入射波形式,以及用DEC方法建立时谐场与静电场的基本方程等;第8章讨论用隐式DEC方法建立离散Maxwell方程组,并概括介绍大型线性代数方程组的快速解法;第9章专门讨论并行计算问题,以适应电磁场计算的最新发展趋势.书末附有用DEC方法模拟的一些电磁波行为的彩图.

本书可作为高等院校理工类专业研究生教材或和教师的教学参考书,也可供从事应用数学、应用物理、电磁场工程以及相关领域研究的科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

离散外微分在计算电磁学中的应用/马玉杰,谢正著. —北京:科学出版社,2010

ISBN 978-7-03-026998-0

Ⅰ.离… Ⅱ.①马… ②谢… Ⅲ.离散-外微分-应用-电磁计算-研究 Ⅳ.TM153

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第043067号

责任编辑:赵彦超/责任校对:陈玉凤
责任印制:钱玉芬/封面设计:王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

天时彩色印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010年4月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2010年4月第一次印刷 印张:13 1/4
印数:1—2 500 字数:248 000

定价:48.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

序　言

计算电磁学是数学、物理与计算机技术相结合的产物. 随着计算电磁学的发展, 很多原本无法处理的复杂电磁场问题得到了很好的解决, 所得的数值解也达到了令人满意的求解精度. 但是, 随着电磁场领域的不断扩大, 越来越多更加棘手的电磁场问题摆在人们面前, 从而促使计算电磁学必须向更高的水平发展. Maxwell 方程组的解析解和数值解的求解是计算电磁学的研究重点之一, 这一研究主要由国防上对低雷达散射截面的航天飞行器的研发需求所带动. 通常只有一些经典问题才会有解析解, 而对于复杂的问题, 往往需要通过数值解得到具体环境下的电磁波特征. 因此, 数值求解成了唯一可行的解决方法, 它所能提供信息的丰富程度是实验方法无法比拟的. 可以说, 计算电磁学的发展改变了现代电磁场工程的设计过程.

本书的目的是介绍一种能保持问题本身几何结构的数值方法, 以求解 Maxwell 方程组. 尽管已有一系列的计算技术可用来离散化 Maxwell 方程组, 但是它们所模拟问题的几何结构在计算过程中常常难以保持. 电磁学本身就是一种特殊的几何理论 —— 规范场论, 而规范场论与微分几何中的联络论紧密联系. 事实上, 微分几何是许多物理和数学理论基本的表述语言. 但是, 这些理论中用到的几何常常受到其向量或张量的表达形式的限制, 从而隐藏了模型的拓扑和几何意义. Cartan 创立的外微分形式是现代微分几何中被广泛应用的理论之一, 可以方便地用来建立各种方法和理论以解决问题. 例如活动标架法和外微分系统, 这种基于几何的演算方法在 20 世纪不断完善和发展, 已经成为现代微分几何的基础之一. 相对于经典的张量计算, 外微分的计算具有以下两大优点：首先, 在张量表示之下很难看到不依赖于坐标的内蕴性质, 局部和全局的不变量很难通过这些指标反映出来, 而通过外微分技术将容易发现这些不变量; 其次, 每个微分方程都可以用外微分形式来表示, 称为外微分系统.

离散外微分是平行于光滑情形的外微分发展出来的关注于计算的理论, 它在欧氏空间的电磁计算中有很多应用. Bossavit, Hiptmair 和 Stern 等分别引入了对偶复形的概念用以定义离散的 Hodge 星算子. 他们所提出的方法都属于时域有限差分法, 这一方法具有许多非常突出的优点. 但是这些方法都限于欧氏空间中的计算, 没有考虑流形的结构. 本书提出的采用离散外微分技术求解流形上的电磁问题尚属首创, 针对无整体坐标且具有复杂几何结构的曲面问题尤为有效. 目前主流的数值方法, 如有限元、有限差分和有限体积法都无法直接求解流形上的微分方程, 主流软件如 ANSYS 等也无此功能. 我们已做过的大量数值实验表明, 这个格式可

以有效模拟电磁波在真空和介质中的传播行为. 这组方程是欧氏空间的 FDTD 格式在流形上的推广. 我们也提出了无条件稳定的隐式离散外微分格式. 对一些具体问题而言, 由于这个格式是隐式 Yee 格式和 Keraen 等提出的格式在流形上的推广, 可以选取比显示格式大很多的时间步长, 即使考虑到每一步都需要有解方程的时间, 仍然可以节省计算时间.

全书的主要内容介绍如下. 第 1 章简要介绍计算电磁学与离散外微分的研究现状; 第 2, 3 章分别介绍 Maxwell 方程与离散外微分的基础知识, 为后续内容做必要的准备; 第 4 章主要介绍利用离散外微分技术来建立流形上的 Maxwell 方程的差分格式; 第 5 章介绍离散外微分算法的数据结构以及程序实现; 第 6, 7 章分别讨论离散外微分计算的边界条件和激励源等; 第 8 章讨论如何将隐式格式与离散外微分技术相结合来导出 Maxwell 无条件稳定的格式; 第 9 章系统地讨论本书提出的各种格式的并行算法.

本书中的结论涉及不少数学分支, 对涉及的数学理论, 我们尽量不引入严格的数学论述, 而是通过具体的例子, 使读者能通过计算了解这些理论. 当然, 这对严谨的读者来说必定是不满意的. 因为离散外微分在整个计算数学领域来说还是一个崭新的分支, 所以我们用了很大的篇幅来叙述离散外微分的基础知识和主要技术. 当今很多复杂电磁场问题都有巨大的未知量, 从而需要巨大的存储空间和 CPU 时间. 通常的计算机很难完成这样的计算任务, 只有在并行计算机上才可能实现. 因此, 各种计算方法, 当然也包括离散外微分方法的并行化已经成为必须解决的问题, 第 9 章简要介绍了并行计算方法的发展和重要性. 如前所述, 计算电磁学的应用如此广泛, 涉及与电磁场有关的各个方面, 因此, 面对不同类型的问题, 还可以采用一些特殊的方法. 在讨论各种电磁场的计算方法时, 一定要结合具体问题. 只要真正掌握电磁场计算方法的数学和物理基础及其基本原理, 就能够加以创造性的应用. 与计算电磁学相关的文献数量之多已经很难统计, 不可能将其一一列出. 因此, 书末只列出了一些本书所用到的文献以供参考.

本书的大部分结果在中国科学院数学机械化重点实验室与浙江大学数学中心的讨论班上报告过. 这些研究工作得到了国家基础研究发展规划 “数学机械化与自动推理平台” 和国家自然科学基金 (No. 10871170) 的支持, 并得到了莱芜钢铁集团的资助. 在此, 我们感谢中国科学院数学机械化重点实验室石赫研究员、高小山研究员、李洪波研究员对我们的鼎力支持和帮助. 感谢浙江大学数学中心和 UCLA 的刘克峰教授, 浙江大学数学中心许洪伟教授、孔德兴教授、李方教授对作者的关怀与栽培. 感谢中国科学院理论物理研究所郭汉英研究员和首都师范大学吴可教授的关键性建议和讨论. 感谢大连理工大学张鸿庆教授、李德生教授的关心. 感谢浙江大学计算机学院叶征博士、北京交通大学石依依同学、数学机械化重点实验室刘元杰博士以及晁小影、江舒畅、沈清华、马斌、庞丽荣和李飞等同学, 他们都在

本书的写作过程中提供了帮助.

本书所阐述的离散外微分算法已成功应用于中国科学院特殊材料抗电磁辐射性能的数值模拟与仿真项目. 离散外微分以其理论的先进性与实践的优越性已得到越来越多的专家学者的赞同, 但由于作者水平有限, 书中难免存在诸多疏漏, 不足之处敬请各位专家、学者批评指正.

马玉杰

2009 年 4 月

符 号 表

d	外微分算子
$\wedge$	外积
$[,]$	Lie 括号
$*$	Hogde 对偶
G	规范群
$S=\sum_F -\mathcal{R}\{\chi^{(\rho)}(U(e_1)\cdots U(e_n))\}$	格上 Yang-Mills 作用量
$\oint_s$	闭路积分
∇	散度算子
E	电场强度; 边的集合
H	磁场强度
D	电通量密度
B	磁通量密度
$\{\partial_{x_1},\cdots,\partial_{x_n}\}$	切向量场
Γ^i_{kl}	联络系数
T_pM	M 的切空间
$\Omega^k(M)$	流形 M 上的微分 k 形式的集合
I	微分理想
$\Omega^*(M)$	M 上的外微分形式所组成的环
Δ^n	n 单纯形
$\mathcal{K}$	链复形
$\mathcal{H}_k$	第 k 个同调群
$\langle,\rangle$	内积
v_i	网格第 i 个顶点
σ_{ij}	连接第 i 和第 j 个顶点的边
ω	多辛形式

C	Courant 常数
$\mathscr{A}$	离散联络空间
$\mathcal{G}$	规范变换集合
L_-	左行波算子
L_+	右行波算子

目　录

第1章 绪 论

1.1 计算电磁学

1.1.1 形成

计算电磁学的核心问题之一是求解 Maxwell 方程组. 这组方程是英国物理学家 Maxwell 在 19 世纪建立的描述电磁场行为的基本方程组, 包含四个方程, 不仅分别描述了电场和磁场的行为, 也描述了它们之间的关系. 这四个方程分别表达了电荷如何产生电场 (即 Gauss 定理), 验证了磁单极子的不存在性 (即 Gauss 磁场定律), 电流和变化的电场是怎样产生磁场的 (即 Ampere 定律), 以及变化的磁场是如何产生电场的 (即 Faraday 电磁感应定律). Maxwell 方程组的最初形式由 20 个等式和 20 个变量组成. 现代使用的数学表达式是由 Heaviside 和 Gibbs 于 1884 年使用向量分析的形式重新表达而得到的.

对求解 Maxwell 方程组的近似方法和数值方法的研究可以追溯到 Maxwell 的工作. 他在 1879 年曾试图用一种被称为面积法的近似方法求有关矩形平板电容的积分方程的数值解. 在后来许多理论家的研究工作中, 又逐渐发展了一些有效的近似方法, 如变分法、扰动法、级数展开法和渐近法等. 但是, 由于计算条件的限制, 这些方法都无法充分发挥其作用, 使得一些理论上可以解决的问题却不能得到实际的解决.

电子计算机的出现和发展开创了电磁场计算研究的新时代. 20 世纪 60 年代, 几种适用于在计算机上大规模计算电磁场的数值计算方法陆续出现. 主要标志是 Yee 提出时域有限差分 (finite difference time domain, FDTD) 法 [145] 和 Harrington 提出矩量法 (method of moment, MoM)[51], 其中 Harrington 的著作 *Field Computation by Moment Methods* 的出版宣告了计算电磁学的诞生. 在此期间, 在其他学科中已获成熟应用的有限元法 (finite element method, FEM) 也被移植过来, 从而使电磁场的计算方法变得更加丰富.

计算电磁学所要解决的问题是多种多样的, 这就需要针对问题的特点选用合适的方法. 此外, 由于问题的复杂性, 单一的方法往往很难有效解决问题, 因此, 需要灵活地将不同方法结合起来.

1.1.2 意义

现在, 对电磁波的研究已经非常深入, 其应用也十分广泛, 如无线电传播、光纤

通信、移动通信、雷达、天线、电磁兼容、地下地磁探测、海洋探矿等. 由于各种复杂目标的散射, 复杂结构天线的辐射, 实际通信中城市环境、复杂地形以及海面对地磁波传播的影响, 使得电磁波在实际环境中的传播过程十分复杂. 但是, 这对于研究具体电磁问题, 探讨有益于国计民生的创造发明有着十分重要的意义. 由于实际问题的复杂性, 对该类问题的研究往往需要通过数值解才能得到具体环境下的电磁波特征. 现在, 从简单的台式机到超级计算机都被用来进行数值求解. 我们已经迈入 21 世纪, 却仍为解决一个 19 世纪的方程而付出如此巨大的精力听起来似乎有些不可思议, 我们不禁要问: Maxwell 方程组对于现代社会到底具有怎样的实际价值呢?

1. 国防需要

实际上, 计算电磁学的发展主要是由国防上对低雷达散射截面的航天飞行器的需求所驱动. 对这种复杂的问题, 不仅解析方法无能为力, 而且实验手段也不可能给予全面的解决, 更不用说经济上付出的代价. 同时, 计算电磁学所能提供信息的丰富程度也是实验方法无法比拟的. 因此可以说, 计算电磁学的发展改变了现代电磁场工程的设计过程.

对于涉及电磁波相互作用的工程问题, 主要是采用频域方法. 要计算由雷达束照射所导致的飞机和导弹表面产生的电流, 除了高频近似技术, 主要的方法是用矩量法求解频域积分方程. 从计算角度来看, 矩量法需要建立数目巨大的复数值的线性方程组, 再直接求解或用迭代法来求解这个方程组.

如今, 大多数电磁系统是在一个非常复杂的环境中运行, 与电磁波相互作用的也往往是形状和结构都极为复杂的系统. 例如, 很多在飞机、火箭或舰船上使用的电磁系统本身作为与电磁波相互作用的对象而构成复杂的电磁散射系统. 用 MoM 模拟这些系统的计算量非常大, 这就面临着计算机硬件的瓶颈问题. 在用 MoM 对广泛应用在航天技术中的非金属材料进行雷达散射截面 (radar cross section, RCS) 计算时, 这个问题尤为突出. 从一个具体的 RCS 问题来看这意味着什么? 对于一个长 10 米的战斗机, 当雷达频率达到 240MHz 时, 用 16 个处理器的 Cray Research C-90 需要的计算时间将近 3 小时; 当频率达到 480 MHz 时, 则需要 8 天时间; 当频率达到 960 MHz 时, 计算时间达到 17 个月 [119]. 尽管现代计算机在速度上都取得了飞速发展, 但是很明显, 当雷达频率在 500MHz 以上时, 用 MoM 方法来计算战斗机的 RCS 问题不可行, 需要寻求新的方法.

由于用矩量法求解整体航天器的高频 RCS 的局限, 自 1988 年以来, 电气工程师们对直接求解空间网格上的 Maxwell 旋度方程产生了极大的兴趣. 在求解 Maxwell 方程组的 PDE 解的过程中, 使用频域有限元方法会产生稀疏矩阵, 但是使用时域有限差分法 (FDTD) 或有限体积法 (FVTD) 根本不需要矩阵, 这样就消去

了 MoM 中求解稠密的方程组所带来的巨大计算量. 现在, 工程师们已经用 FDTD 和 FVTD 来计算数量级为 10^8 的未知矢量的大尺度问题. 例如, 歼击机对频率超过 1GHz 的雷达束的截面反射问题. 现阶段, 对于那些嵌入在 FDTD 的计算网格中的和真实尺度一样的喷气式歼击机的模型来说, 用来计算飞机窄频带或宽频带对雷达频率达到 1GHz 以上的散射响应是可行的. 无论过去还是未来, 国防领域中低雷达反射面的飞机和导弹的设计都推动着计算电磁学的发展. 在航天设计领域中, 多层复合材料和多孔材料的应用有了显著的增长, 这些材料在几微米的距离尺寸上的电和磁的性能具有不均匀性和各相异性. 另外, 其外形常常很不规则, 并包含多种形态的构件, 还可能包括多种材料成分及孔、缝、内腔和负载等各种内部结构. 对飞行器的材料和形状进行优化可以降低雷达散射面, 而计算电磁学可以在真实模型建立之前在计算机上对飞行器材料和形状进行优化, 并提出合理的方案.

2. 海洋探索

海洋电磁学是一门研究海洋中电磁场和电磁波的运动形态和规律, 以及在海洋探索、海洋通信和海洋开发中应用的学科. 海洋中的各种盐类几乎完全解离, 这使海水含有大量离子而成为导体. 1832 年, Faraday 指出, 在地磁场中流动的海水会产生感应电势, 但是他并没有证明这一点. 1851 年, Wollaston 在横跨英吉利海峡的海底电缆上检测到和海水潮汐周期相同的电位变化, 证实了 Faraday 的猜想, 由此开始了对海洋电磁现象的研究.

海洋中主要的天然电磁场是地磁场, 而占据地磁场 99% 以上的主磁场几乎全部起因于地核. 另外, 地球大气电离层中发生的各种动力学过程, 包括来自太阳的等离子流和地球磁场及电离层的相互作用, 不断产生频率范围很宽的电磁波, 其中周期为数分钟以上的电磁波, 能够穿过海水而达到海底, 再穿过海底沉积层, 达到上地幔岩石圈甚至更深处. 海水和海底接触处的电化学过程、岩石中的渗透过程及海水在岩石中的扩散作用等物理作用和化学作用, 在海洋中也能产生电场, 其强度可达 100μV/m. 在浮游植物和细菌的聚集区, 也发现有生物电场. 海水的各种较大尺度的运动, 如表面长波、内波、潮汐和海流等, 都能感应出相应的电磁场. 研究海水各种尺度运动所产生的感应电磁场, 探求测量它们的方法, 进而通过电磁测量来了解海水的各种运动, 也是海洋电磁学研究的一个重要方面. 海洋中的天然磁场和海水在地磁场中运动时产生的感应电磁场会对水下通信和地质探矿造成干扰, 这促使人们对海洋的天然磁场和感应电磁场进行深入的研究.

电磁波在海水中传播时激起的传导电流致使电磁波的能量急剧衰减, 频率愈高, 衰减愈快. 由 Maxwell 方程组可知, 兆赫兹以上的电磁波在海水中的穿透深度小于 25mm, 海水对这种电磁波就形成很强的屏蔽层; 而频率低于 10 周/小时的电磁波, 在海水中的穿透深度可达 5000m. 这样, 海洋就可以完全可穿透. 对于极低频

的电磁波, 可用于陆地对大洋深处核潜艇取得通信. 陆地、舰艇和飞机与水下潜艇进行无线电通信时, 所用的电磁波中的超长波, 波长在万米以上 (频率低于 30kHz). 电磁波沿地球表面和高度为 70~80km 的电离层所构成的两个同心反射层之间传播, 然后垂直透入海水, 潜艇可在水面以下 30m 深处收到这种电磁波. 要从陆地上和藏在大洋深处的核潜艇取得通信, 比较可靠的手段是极低频电磁波 (波长在百万米以上). 实验表明, 潜航于 120m 深的潜艇用 300m 长的拖曳接收天线, 能顺利地收到 4600km 远的极长波指令. 使用超长波和极长波对潜艇进行通信, 其优点是不受磁爆、核爆炸和太阳黑子的影响.

极低频的电磁波的另一重要应用是海底地壳物理探矿, 探测研究海底岩石圈的地质构造. 裂隙中充满海水的岩石和硫化矿物都能使岩石的电导率增加两个量级以上, 可以用电磁波探测到, 这是一种有效的探测手段. 海底岩石圈的电导率与它的物理化学性质、温度和含水量等均有关系. 根据海底附近的电磁测量推断海底以下的上地幔岩石圈的电磁性质, 可用来研究海底岩石圈的结构、热力学过程和海底岩基的运动及海底矿床的形成.

计算电磁学对其他相关学科也产生了很大的影响, 如模拟亚毫微秒数字电路的互联和模块化、微波和毫波集成电路的设计、亚微微秒非线性光学元件的设计 (包括集成光学电路、光子开关以及激光二极管列阵等)、天线设计 (包括为世界范围内个人无线电话技术、无线通信以及先进的汽车定位和导航等)、医疗中对癌症的热疗处理等.

计算电磁学的出现已经改变了电磁场理论的面貌, 使人们能用更统一的方法解决各种复杂的电磁场问题, 并更直接地用场的观点去阐述各种现象. 可以说, 计算电磁学正在成为电磁场理论研究的重点.

1.1.3　方法

电磁场计算方法的分类有很多种, 按其近似性可分为解析法、渐近法和数值法等. 基于数值法的应用的广泛性, 这里着重介绍数值法.

1. 解析法

由 Maxwell 方程组导出的方程有偏微分方程、积分方程和变分方程等. 能求得精确解的主要是偏微分方程, 只有极个别的积分方程才能求得解析解, 而变分方程则主要用于求近似解 (除非将其转换成等价的偏微分方程). 解析解的主要优点如下:

(1) 忽略在导出方程时对实际问题所作的近似, 相对于所求解的方程而言, 解是精确的;

(2) 当问题中的某些参数改变时, 不必重新求解, 换句话说, 解具有某种普适性;

(3) 由于解中包含对某些参数的依赖关系, 很容易从中发现某种具有规律性的现象, 也就是说, 解中包含非常丰富的信息.

求偏微分方程精确解的方法主要包括分离变量法、级数展开法、Green 函数法、保角变化法和积分变换法. 这些方法适应不同的情况, 有时还要结合使用.

2. 渐近法

电磁频谱可划分为三个区域: 低频区、谐振区和高频区. 在不同区段, 电磁波的特性有很大区别, 在处理方法上也可能有很大不同. 在低频区和高频区, 并不严格地直接求解 Maxwell 方程组, 而可以采用物理上的近似方法. 在历史上, 对不同区域的研究走了不同的发展道路, 例如, 在低频区采用的是准静态法或电路的方法, 在高频区采用的是光学方法. 人们已证明, 这几种方法都只是 Maxwell 方程组的近似, 被称为渐近法. 高频近似法在其适用范围内不失为一种快速解法, 但当求解复杂系统的电磁场问题时可能会引起严重误差, 从而受到限制.

3. 数值法

数值法通过直接离散化要求解的方程, 将无限维的连续或者光滑问题转化为有限维的离散问题, 并将解析方程的求解问题转化为代数方程的计算问题. 数值法既是一种近似方法, 又保留有提高计算精度的空间. 解析法所求得的往往只是方程的经典解, 数值法则突破了这一限制, 能够求得方程在许多问题中的近似解. 数值法从原理上讲没有局限性, 是一种普适的方法, 只是算法的精度、结构保持的程度, 以及计算机的存储空间和计算速度限制其应用范围.

计算方法的精度主要取决于各种误差的产生和积累. 一般地, 误差的来源主要可分为四种:

(1) 给定的已知数据所包含的误差;

(2) 截断误差, 主要来源于数学计算中采取的近似方法;

(3) 模型误差, 在列出算法所依据的数学方程时忽略的实际问题中存在的一些次要因素;

(4) 源于计算机的有限字长表达数据产生的误差. 为此, 计算方法必须保证在合理离散的情况下能给出满意的计算精度.

数值法主要有矩量法、有限元法、有限差分法等. 在处理具体问题中, 常常需要混合使用这些数值方法. 下面将分别介绍这些方法:

(1) 矩量法是时域积分形式的加权余量法的总称. 根据加权方法的不同, 又可分为点配法、最小二乘法和 Galerkin 法等. 矩量法最早被 Richmand 和 Harrington 用于求解电磁场问题, 而后在 Harrington 的著作中得到了系统的论述 [51], 从此成为求解电磁场问题数值解的主要方法, 并成功地应用于天线和电磁散射等问题的研

究中.

矩量法的基本原理是: 先选定基函数对未知函数进行近似展开, 代入算子方程, 再选取适当的权函数, 使在加权平均的意义下方程的余量等于零, 由此将连续的算子方程转换为代数方程. 原则上, 矩量法可用于求解微分方程和积分方程, 但用于微分方程时所得到的代数方程组的系数矩阵往往是病态的, 故在电磁场问题中主要用于求解积分方程.

矩量法的应用主要受到以下几方面的限制:

① 需要对所要求解的问题导出相应的积分方程;

② 需要构造全域或分域上满足边界条件的基函数;

③ 要求解满秩的线性代数方程组.

为此, 在传统矩量法的基础上采取各种技术降低计算复杂度的方法通常称为快速算法. 例如, 快速多极子方法 (fast multipole method, FMM)、多层快速多极子算法 (multi-layer fast multipole algorithm, MLFMA) 等.

(2) 有限元法是以微分方程为基础的数值方法, 最初主要是利用变分原理将微分方程变为等价的变分方程, 再经改进的 Ritz 法, 将微分方程的求解问题变为代数方程的求解问题. 由于并非任意的微分方程都能找到与其等价的变分方程, 使得上述形式的有限元法的应用受到一定的限制. 用加权余量的 Galerkin 法直接从微分方程出发构造有限元方程, 就可突破变分原理的限制.

有限元法的基本步骤是: 先通过各种适当的形式将解域划分成有限个单元, 再在每个单元中构造分域基函数, 利用 Ritz 法或 Galerkin 法构造代数形式的有限元方程.

有限元法的主要特点是其离散单元的灵活性. 相对而言, 有限元法可以更精确地模拟各种复杂的几何结构, 并通过选择取样点的疏密程度来适应场分布的不同情况, 这样既能保证计算精度的要求, 又不增加过大的计算量. 该方法的另一大优点是所形成的有限元方程组的系数矩阵是稀疏的、对称的, 这非常有利于代数方程组的求解.

在电磁场问题的应用中, 节点标量有限元存在几个明显的缺点, 其中突出的一点就是有时会出现 “伪解”(即非物理解). 此外, 在树立介质交界面、边缘和尖角等情况时也存在不足. 为此, 在 20 世纪 80 年代末至 90 年代初发展了一种矢量有限元技术, 用设置在单元棱边上的矢量基函数表示电磁场, 因此也称为棱边元, 后来逐渐成为电磁场计算中最有力的有限元形式.

在 20 世纪 70 年代, 边界积分方程与有限元的离散方式结合, 产生了一种新的数值计算方法. 该方法兼有积分方程法和有限元法的优点, 是边界积分法的一种发展, 称为边界元法 (boundary element method, BEM). 与经典的边界积分方法不同, 边界元法中的积分方法是通过加权余量法建立起来的.

(3) 有限差分法是出现最早的一种基于微分方程的数值方法. 由于方法简单、概念清晰等优点, 被广泛用于各种电磁场问题的数值分析, 尤其是该方法对连续方程离散化处理的思想, 成为后来各种数值方法发展的基础.

有限差分法的基本原理是: 用离散的代数形式的有限差分方程近似微分方程, 在代数方程中将空间各点待求量的值与其邻近点的值联系起来. 这种方法的解题步骤大致可归纳为:

① 将解域划分为若干网格, 用节点在待求量的离散值近似代替其连续分布;

② 用节点上待求函数的差分表达式代替微分表达式, 将待求的微分方程转化为有限差分方程;

③ 结合给定的边界条件或初始条件求解差分方程.

1966 年, Yee 提出后来被称为 Yee 网格的空间离散方式 [145]. 通过这个网格将依赖于时间变量的 Maxwell 旋度方程转化为差分格式, 并成功地模拟了电磁脉冲与理想导体作用的电磁现象. 这一方法属于差分方法, 后来被称为时域有限差分法, 它是一种新的电磁场的时域计算方法.

20 世纪 80 年代后期以来, 时域有限差分法进入一个新的发展阶段, 由成熟转入被广泛接受和应用, 在应用中又不断有新的发展. 作为一种电磁场的数值计算方法, 时域有限差分法具有许多非常突出的优点, 主要体现在以下几方面:

① 直接时域计算. 时域有限差分法直接将含时间变量的 Maxwell 旋度方程在 Yee 网格空间中转化为差分方程; 随着时间步的推进, 在每一时间步计算网格空间各点的电场和磁场分量, 能直接模拟电磁波的传播及其与物体的相互作用过程.

② 广泛的适用性. 在时域有限差分法的差分格式中, 被模拟空间电磁性质的参量按空间网格给出, 因此, 只需在相应的空间网格点设置适当的参数, 即可模拟各种复杂的电磁结构, 而且介质的非均匀性、各向异性、色散特性和非线性等都能很容易地被模拟.

③ 节约存储空间和计算时间. 在时域有限差分法中, 每个网格点上的电磁场分量及其上一时间步的值是必须存储的, 此外, 还有描述各网格电磁性质的参数以及吸收边界条件和连接条件的有关参量.

④ 适合并行计算. 并行计算机的发展推动了数值计算中并行处理的研究, 适合并行计算的方法将发挥更多的作用. 在时域有限差分法中, 每个网格点上的电场 (或磁场) 分量只与其周围相邻网格点处的电场 (或磁场) 分量及其上一时间步的场值有关, 这个特点很适合并行计算.

⑤ 计算程序的通用性. 由于 Maxwell 方程组是时域有限差分法计算电磁问题的数学模型, 其基本差分方程对不同的问题是不变的. 此外, 吸收边界条件和连接条件对很多问题是可以通用的, 而计算对象的模拟则可通过给网格赋予参数来实现, 与以上各部分没有直接联系, 可以独立进行.