復興高級中學教科書

代數學

上冊

虞明禮編著

商務印書館發行

虞明禮編著

復興高級中學教科書

代數學

上冊

商務印書館發

五二三二上 咩

中華民國二十三年八月初版

周

(57023A)

高級中學用

復興教科書 代數學 二冊

上冊定價大洋柒角

外埠酌加運費匯費

編著者 虞明禮

主編兼發行人 王雲五 上海河南路

印刷所 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

(本書校對者胡達聰)

編輯大意

本書依據教育部最近頒布課程標準編輯,供高級中學代數科教本之用.

本書分四大段.第一章為一段,略論全部代數的基本.第二章至第十一章為一段,詳論各種代數式的重要運算.第十二章至第二十一章為一段,詳論方程式及不等式的解法和理論.第二十二章以後為一段,略論方程式以外的實際問題,如序列,組合,或然率,級數等問題.各章各節之間力謀前後銜接,一矯往昔教科書各章獨立之弊.

本書注重學生自動研習.例如,複習初中代數部份時,往往只列標題,使學生將固有智識自行回味,並加整理.又如,習題及備註中,往往有補充正課之不足者,亦只略予提示,使學者自行探討,以培養自學的習慣.

本書除於理論方面嚴密注意外,關於應用技

能亦極注意.例如,初中教材之切實複習,各章習題之豐富充實,開方,根式,對數之反覆說明,在在均以訓練演算純熟爲目標.

本書論述一次方程式較遲.因一次方程式在初中代數中雖宜儘量提早,以示代數之功用;但在高中代數則不然.高中代數,關於方程式方面,應注重同根原理及根之變化等等.理論較嚴,講授不宜過早也.

本書對於各種方程式集中論述,以應學習心理的需求.蓋當一次方程式學完之後,學者切望易瞭一次以上之方程式.本書由一次而二次,三次,四次以至n次,連續討論,而不間以他種教材.原原本本,一貫相承,比之分期敘述,零零碎碎,實有事半功倍之效.

本書將行列式緊接聯立一次方程式之後.因學生在求解多元聯立一次方程式,正苦手續繁難時,忽然利用行列式,予以極簡便的解法,使前此消元困難完全免除.此在學習,心理上實有無上的愉快.學者於此,自然折服算學家心思之巧,

油然起向上之心.

本書將序列,組合等等移置方程式通論之後.因求解序列,組合等問題,較之求解方程式通論中問題,有難無易故也.

本書不濫用函數名稱.蓋函數雖爲高等算學中重要觀念之一;但其意義,乃在研究函數與其所含變數二者相應變化之關係,和代數式之各種基本運算,實爲兩事.故本書非至確有需要時,決不濫用函數名稱,以免頭緒繁多,學者感受辨別不清之苦.

本書圖解扼要.圖解本屬解析幾何範圍以內,其在代數之應用,不過說明方程式之性質及解法.故本書關於圖解亦只以此部爲限.

本書極富彈性.如學生程度較有根底,則於附有星標*諸節,可擇要複習或全部略去;如學生程度較低,則較難習題可以不做,艱深理論可取簡易者代之.〔例如,論高級行列式可取四級爲代表;論 n 元一次方程組,可取特例 $n=4$ 言之,不必詳論其通例.〕斟酌損益,是在教師之活用耳.

本書原稿在江蘇省立松江女中高二甲乙組，由編者及沈式寰先生試用一年，成績均甚圓滿．修正時承沈先生根據試教經驗，對於教材之取合編排，多方予以良好指正；又承胡春池先生審閱第一章，鈕庭來君校閱全部，使此書減少許多錯誤．編者曷勝感激！謹書於此，以誌不忘！

編者學識淺陋，錯誤自知不免．海內專家倘肯進而教之，俾此書漸臻完善，則幸甚矣．

民國二十三年七月編者．

目 錄

代 數 學

上 册

第 一 章

總 論

§1. **代數之目的.** 初等算學大別爲二類.一類論形,一類論數.論形者爲幾何;論數者則爲算術及代數.算術之目的,在於研究數量的運算;代數之目的乃繼續算術,對於數量之運算作進一步的探求.代數的方法比算術巧,代數的範圍比算術廣.英人牛頓曰"代數者,廣義之算術也."其言洵有至理.

§2. **代數之方法.** 代數中如何能將算術的範圍推廣?端賴下列兩種方法.

第一法 用文字表數,使(*a*)運算的形式簡明,(*b*)答數的範圍加廣,(*c*)解題的工具銳利.今依次舉例明之.

〔例一〕 設有問題:"大小二數之和爲140,自小數3倍減去大數2倍,所得之差爲30.求此二數."

算術解法. 因小數+大數是140,

所以2倍小數+2倍大數是280.

又因3倍小數−2倍大數是30.

所以2倍小數+2倍大數+3倍小數−2倍大數是280+30.

所以5倍小數是310.

所以小數是310÷5=62. 大數是140−62=78.

代數解法: 設$x=$小數, $y=$大數,則

$$\begin{cases} x+y=140 & \cdots\cdots(1) \\ 3x-2y=30 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

2(1)得 $$2x+2y=280 \quad\cdots\cdots(1')$$

(1′)+(2)得 $$5x=310$$

$$\therefore\quad x=62=\text{小數}$$

代入(1)得 $$y=140-62=78=\text{大數}.$$

學者試觀代數解法比之算術解法何等簡明!

〔例二〕 仍就前例來說.在算術,依四則解法能解例一之問題,得其答數爲

$$(A)\quad\begin{cases}\text{小數}=62\\ \text{大數}=78\end{cases}$$

在代數,應用文字代表已知數,則可解範圍更廣之問題:"大小兩數之和為 a;自小數 m 倍減去大數 n 倍,所得之差為 b. 求此二數."依代數解法,得其答數為

$$(B)\quad\begin{cases}\text{小數}=\dfrac{na+b}{m+n}\\[2ex] \text{大數}=\dfrac{ma-b}{m+n}\end{cases}$$

學者注意(B)式所表答數比(A)式範圍加廣矣!蓋在此類問題中,任設 m, n, a, b 為何值,所求大小二數皆可由(B)式求得之.故(B)式代表一類問題之答數;至於(A)式,則僅表單獨一個問題之答數.二者適用的範圍自有廣狹之不同也.

〔例三〕 設有問題:"某數 7 倍與其平方之和為 198, 求該數."此問題,在算術無法解決;在代數則由方程式 $x^2+7x=198$ 可立得其答數為 11 或 -18. 代數之解法,不亦神妙乎哉!

第二法. 創造新數以濟運算之窮.算術上的

運算往往有相當限制;逾此限制,算法便不通行,例如,在算術減法中,減數如大於被減數,則此減法便不通;代數上創造負數,減法乃無不可行.又如在算術開方中,被開方數如不為完全整方,則此不盡根數之眞值便無法求得,其性質因亦不能明瞭;代數上引用無理數,此類根式的性質及算法乃能全部了然.不特如此,卽在代數開方中,倘所論之數只限於正負數,則當被開方數為負數時,此開方算法亦不能通行.故又創立虛數以濟其窮.自有虛數,開方算法乃毫無限制矣.

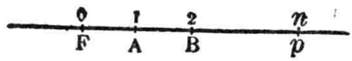
§3. **代數之數系.** 如上(第二法)所述,代數上為濟算法之窮計,常創立新數以求其通,故代數上所論之數比算術上所論者範圍加廣;而且除1外,各類新數皆由適應算法的需要而來,玆列表明之於下:—

<table>
<tr><th>算法</th><th colspan="4">新數</th></tr>
<tr><td>加法</td><td>正整數</td><td rowspan="3">有理數</td><td rowspan="4">實數</td><td rowspan="5">代數數</td></tr>
<tr><td>減法〔被減數小於減數時〕</td><td>貟數</td></tr>
<tr><td>除法〔不能整除時〕</td><td>分數</td></tr>
<tr><td>開方〔開方不盡時〕</td><td colspan="2">無理數</td></tr>
<tr><td>開方〔被開方數為貟數時〕</td><td colspan="3">虛數</td></tr>
</table>

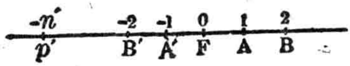
集合上表所列各數乃完成代數的數系.

§4. **代數數之圖形表示.** 代數系中任何一數,皆可用平面上之一點表之.略陳其說如下:—

(1) 正實數. 在一直線上取定點 F 表零,定長 FA 爲單位 1,則無論 n 爲有理數抑爲無理數,由幾何作圖法恆可得 $FP=nFA=n$. 故任何數 n 可以適當之 P 點表之.



(2) 負實數. 在上述直線上 F 之左側取 P' 使 $FP'=-nFA=-n$, 則此 P' 點便可代表 $-n$.



(3) 虛數. 詳見第十八章.

§5. **代數之基礎.** 代數上一切運算之基礎全在幾條假設,此類假設是否眞確,理論上無法證明.不過按之實際,無往不符,所以算學家乃將此類假設認爲公理或公律.代數上所有公律可分爲兩類:

第一類. 關於數之運算者名曰運算公律.列舉於下:—

(1)　在加法有對易律: $a+b=b+a$

結合律: $(a+b)+c=a+(b+c)$

$=(a+c)+b.$

(2)　在乘法有對易律: $ab=ba$

結合律: $(ab)c=a(bc)=(ac)b.$

配分律: $a(b+c)=ab+ac.$

上述三律(對易,結合,配分)乃代數上虛實各數運算之基本公律.此類公律的來源,最初是由正整數算法的啓示.其後乃假定此三律爲天經地義,凡由舊算所生之一切新數,其算法須經適當的規定(新數既然是新的,其算法照理可以隨便規定;但爲符合上述三律起見,此規定便不能隨便),務使此三律仍能完全符合.

例如,在初中代數,吾人已知下列幾種算法:

I.　$a+(-b)=a-b$　　II.　$a-(-b)=a+b.$

III.　$a(-b)=-ab$　　IV.　$(-a)(-b)=ab.$

何以知上列算法果爲正確乎?無他,以其能合前述三律之故也.試就算法III, IV考之.

(a)　先驗乘法對易律能否符合?

依IV,　$(-a)(-b)=ab,$　$(-b)(-a)=ba.$

但 a,b 俱為正數,其乘算服從對易律: $ab=ba$.

$$\therefore\quad (-a)(-b)=(-b)(-a).$$

(b)　次驗乘法結合律能否符合?

依 IV,　　$(-a)(-b)=ab$

所以 $[(-a)(-b)](-c)=ab(-c)=-abc$　　〔依 III.〕

又依 IV, $(-b)(-c)=bc$

所以 $(-a)[(-b)(-c)]=(-a)bc=-abc$　　〔依 III.〕

同樣 $[(-a)(-c)](-b)=-abc$

$$\therefore\ [(-a)(-b)](-c)=(-a)[(-b)(-c)]=[(-a)(-c)](-b)$$

(c)　再驗乘法配分律能否符合?

因　$(-a)[(-b)+(-c)]=(-a)[-(b+c)]=a(b+c)$

$$=ab+ac$$

又　$(-a)(-b)+(-a)(-c)=ab+ac$

$$\therefore\quad (-a)[(-b)+(-c)]=(-a)(-b)+(-a)(-c).$$

同樣,依上述 I, II, III, IV 幾條算法,加法中對易結合兩律亦均能適合.學者試自驗之.

第二類. 關於等式之推演者名曰等式推演公律.推演公律共有四條:

若 $a=b,\ c=d,$　　則 $a+c=b+d.$

若 $a=b,\ c=d,$ 則 $a-c=b-d.$

若 $a=b,\ c=d,$ 則 $ac=bd.$

若 $a=b,\ c=d\neq 0,$ 則 $a\div c=b\div d.$

其中 a, b, c, d 任爲何數.

以上四律,又名**等量公理**.等量公理,在代數上致用極廣.無論解方程式或證恆等式,凡由一個等式推出另一等式,莫不以此諸律爲根據,讀者愼勿以其平凡淺易而忽之也.

習題一

1. 依初中代數方法解下列諸方程(其中 a, b 俱爲正整數),並察其根各爲數系中的何種數.

$$ax-b=0 \qquad \left(\frac{b}{a}\neq\text{整數.}\right)$$

$$ax+b=0$$

$$x^2-b=0$$

$$x^2+b=0$$

$$x^2+x+1=0$$

然則各種新數的產生,是否又可視爲解方程式的結果?

2. 幾何的基礎,是否也在幾條不可證明的假設?這些假設便是公理和公法.試本所知儘量說出代數幾何的異同.

3. 完成§5〔第一類〕最後一句.

第二章

整式四則

§6* 定義. 下列諸名詞,學者在初中代數中皆已學過,能各舉數例詳釋其意義否?

(1) 代數式.

(2) 代數式之值.

(3) 項.

(4) 因數.

(5) 係數.

(6) 同類項,不同類項.

(7) 整式,分式.

(8) 有理式,無理式.

(9) 有理整式.

(10) 單項式,二項式,多項式.

(11) 指數,冪.