



全国名校名师讲义精萃

中学教材学习讲义

高中数学 必修④

杜志建 主编

审订

- | | | | |
|-----|------------|-----|-------------|
| 郭玉珊 | 清华附中特级教师 | 郑晓龙 | 首都师大附中特级教师 |
| 孟卫东 | 清华附中特级教师 | 云冠全 | 广东省实验中学特级教师 |
| 翟蕾 | 北大附中高级教师 | 陈世华 | 湖北省黄冈中学特级教师 |
| 涂木年 | 广州六中特级教师 | 冯定应 | 杭州学军中学特级教师 |
| 金凤义 | 南京金陵中学高级教师 | 廖晓林 | 江西临川一中特级教师 |

配 人教A版
内含教材课后习题答案

汕头大学出版社

天星教育网
www.tianxing.com.cn
上网登陆 增值服务



全国名校名师讲义精萃

中学教材学习讲义

高中数学
必修④

丛书主编：杜志建

本册主编：彭海燕

本册副主编：雷波 王常斌

汕头大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

中学教材学习讲义. 数学. 4: 必修/杜志建主编.

汕头: 汕头大学出版社, 2007. 9

ISBN 978 - 7 - 81120 - 138 - 3

I. 中... II. 杜... III. 数学课—高中—教学参考资料

IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 122885 号

中学教材学习讲义·数学·必修 4

策 划: 杜志建

责任编辑: 胡开祥

封面设计: 魏晋文 

出版发行: 汕头大学出版社
(广东省汕头市汕头大学内)

印 刷: 郑州新星印刷实业有限公司

开 本: 890mm × 1240mm 1/16

版 次: 2009 年 8 月第 3 版

印 次: 2009 年 8 月第 1 次印刷

定 价: 74.00 元(共 4 册)

ISBN 978 - 7 - 81120 - 138 - 3

主 编: 杜志建

责任校对: 刘 娜

责任技编: 侯会锋

邮 编: 515063

电 话: 0754 - 2903126

印 张: 41

字 数: 902 千字

版权所有 翻版必究

如发现印装质量问题,请与承印厂联系退换。



喻旭初 语文学科特级教师。金陵中学学术委员会委员，现任全国中学语文教学研究会学术委员、南京市中学语文教学研究会会长、江苏省青少年写作研究会副会长、中国叶圣陶研究会理事。主编各类语文书籍12种，发表文章60余篇。



郭玉珊 数学学科特级教师。现任清华附中数学教研组组长，兼任吉林省青年教师协会理事、吉林省中学数学专业委员会理事、东北师大数学系教育硕士学位外校指导教师等；先后被评为全国中小学青年教师学科带头人、吉林省中小学青年教师学科带头人、吉林市优秀教师、优秀班主任等；发表了多篇论文或教学辅导文章。



安振平 数学学科特级教师。中国数学奥林匹克高级教练员，曾先后担任陕西数学会普及工作委员会副主任，陕西省教育学会学术委员会委员，陕西省中学数学教学研究会常务理事。《中学数学教学参考》高考试题研究组核心成员，主编高考、中考、竞赛图书多套，参与高校教材《中学数学研究》、《数学教育学导论》，以及北京师范大学版本高中新课程数学教材的编写。



齐智华 数学学科特级教师。享受国务院政府特殊津贴的有突出贡献的数学教育专家。中国数学奥林匹克教练，全国数学联赛命题专家；21世纪“全国中小学教师继续教育核心课培训教材”数学主编；中国科学院心理所《示范演练教学法》特聘教研员；MPA、MBA研究生入学考试辅导专家。



廖晓林 英语学科特级教师。江西省抚州市首批学科带头人，曾先后获得“全国中小校园丁奖”“全省优秀外语教师”等荣誉称号；2001年8月被授予抚州市首届享受市政府特殊津贴拔尖人才；被编入《中国当代教育名人辞典》、《中国专家名人辞典》等数十本大型工具书中；发表论文或文章900多篇；出版论著80余本。



李洪奇 英语学科特级教师。现任广州市外语综合高中英语科长、广州市特级教师协会副秘书长、全国创新学习研究会常务理事。2005年9月，经广州市教育局批准赴英国利兹城市大学进修。主编、参编、审校12部学术专著，发表学术论文数十篇。



孟卫东 物理学科特级教师。清华附中任教，新课标实验教材编写课题组成员，教育部全国理科实验班任课教师，清华附中理科班办公室主任，积极投身教学改革，参加并完成了多项教改科研课题，在高考复习、会考复习、实验班教学等方面有独到的建树。



陈世华 化学学科特级教师。湖北省优秀化学教师，2005年荣获湖北省化学化工学会颁发的首届“湖北省中学化学奖”。1999年至今，在《中国教育报》等68种国家级、省级刊报上发表化学教育教学文章1600余篇，出版专著5部，被多家杂志社聘为特约作者。



林祖荣 生物学科特级教师。任教北京师范大学附属实验中学，长期从事高三复习教学与研究。主编《高中生物新课程理念与实施》等专著；参与新课程初中《生物》教材（苏科版）、新课程高中《生物》教学参考（人教版）等书的编著工作。人教版高中新课标教材、北师大版九年义务教育新课标教材培训团专家。应邀到全国各地作新课程改革及高考辅导专题讲座百余场。



张法英 生物学科特级教师。河北省首批骨干教师、河北省生物教学专业委员会会员。曾连续两届当选石家庄市人大代表，获得过“专业技术拔尖人才”的称号和“特殊贡献奖”。多次参加大型模拟考试的命题工作，在《生物学通报》等杂志以及全国生物教学研讨会上发表或交流论文多篇，主编、参编教学辅导用书20多部。



覃遵君 政治学科特级教师。政府专项专家津贴获得者，现为北京师范大学良乡附中政治科教研组长、北京市政治教育研究会理事、房山区政治教育学会会长。担任全国《思想政治》部分实验教材的主编，并被人民教育出版社聘为全国实验教材培训团专家。



刘作敏 政治学科特级教师。大连市劳动模范、大连市优秀教师标兵、辽宁省中学思想政治课教学典型、大连政治名师工作室理事长、中国教育电视台2004年“中国考生”栏目政治主讲教师。先后在《思想政治课教学》等报刊杂志上发表教学研究和高考指导文章近40篇，并有多部书稿出版。



陈启洪 地理学科特级教师。中国地理学会会员、深圳市福田区学科带头人。应邀参编《中学地理教学方法辞典》等9本专业书籍，《高中地理教学要体现地理学思想》等论文分获全国、省、市一等奖。2002年入选《中国专家名人辞典》，2007年8月福田区教育局为其设立高中学段的第一个“名师工作室”。



何凡 历史学科特级教师。浙江省中学历史教学研究会理事；杭州市历史教研大组副组长。曾获杭州市教育系统先进工作者、杭州市第六届中学学科优秀教研组长、杭州市教委直属中学优秀教师等荣誉。建立和完成的省级立项课题《关于史地学科社会教育功能的探索与实践》获省一等奖。在国家级和省级刊物共发表学术论文和教学论文70余篇，共30余万字。



范佳琳 2007年河南高考理科状元

毕业学校：安阳一中 总分：705分 现就读：北京大学

状元寄语：在所有奖品中有一项我最难忘，那是我考班级第一名时老师奖给我的两本天星教辅，我如获至宝，后来就一直使用天星图书。她们伴我走过了高中三年，我相信，助我成功的天星，也同样会成为千万学子攀登高峰的助力！



何宇佳 2007年重庆高考理科状元

毕业学校：巴蜀中学 总分：703分 现就读：清华大学

状元寄语：高考的路，难免有坎坷，难免有曲折，但我庆幸我找到了天星。天星教辅体系完整，讲解细致全面，题目新颖，难度把握得当，让我少走了很多弯路。天星指路，榜上有名！



张友谊 2007年湖北高考文科状元

毕业学校：大冶一中 总分：627分 现就读：北京大学

状元寄语：第一次接触天星，是看到老师备课时用的《中学教材学习讲义》，后来我也买了一本，就此我与天星结下了不解之缘。天星教辅注重总结解题规律，对解题方法的归纳系统，全面。选择天星，我是幸运的！



赵子滨 2007年辽宁高考理科状元

毕业学校：锦州中学 总分：689分 现就读：香港科技大学

状元寄语：选择一本好的教辅图书，就等于选择了一位权威名师为自己的高考保驾护航。从高一到高三，从《中学教材学习讲义》到《高考复习讲义》，这些书内容丰富，对知识点的讲解深入透彻，是我高考路上的好帮手！



刘玉洁 2007年河北高考理科状元

毕业学校：保定一中 总分：708分 现就读：清华大学

状元寄语：天星教辅是我整个高中时期的良师益友，《中学教材学习讲义》同步指导我的学习；《试题调研》迅速地及时地传递高考动态，是我复习备考的风向标。她们增强了我直面高考的信心，使我在面对各类试题时都游刃有余。



朱 璐 2007年陕西高考文科状元

毕业学校：西安高新一中 总分：672分 现就读：清华大学

状元寄语：天星教辅品种齐全、实用性强，能满足不同层次学生的需求，在我的同学当中一度掀起了使用天星教辅的热潮。希望更多的学弟学妹们结伴天星，相信梦想不再遥远！



曹 焜 2006年安徽高考文科状元

毕业学校：合肥一中 总分：678分 现就读：北京大学

状元寄语：刚进入高三，我就暗自下决心要通过一年的奋战来实现自己心中渴望已久的梦想，但随着时间的流逝，我心里越来越不踏实。正是这个时候，我认识了天星。是她，救我于迷茫之中，为我指明了行进的方向。



姜 君 2006年贵州高考理科状元

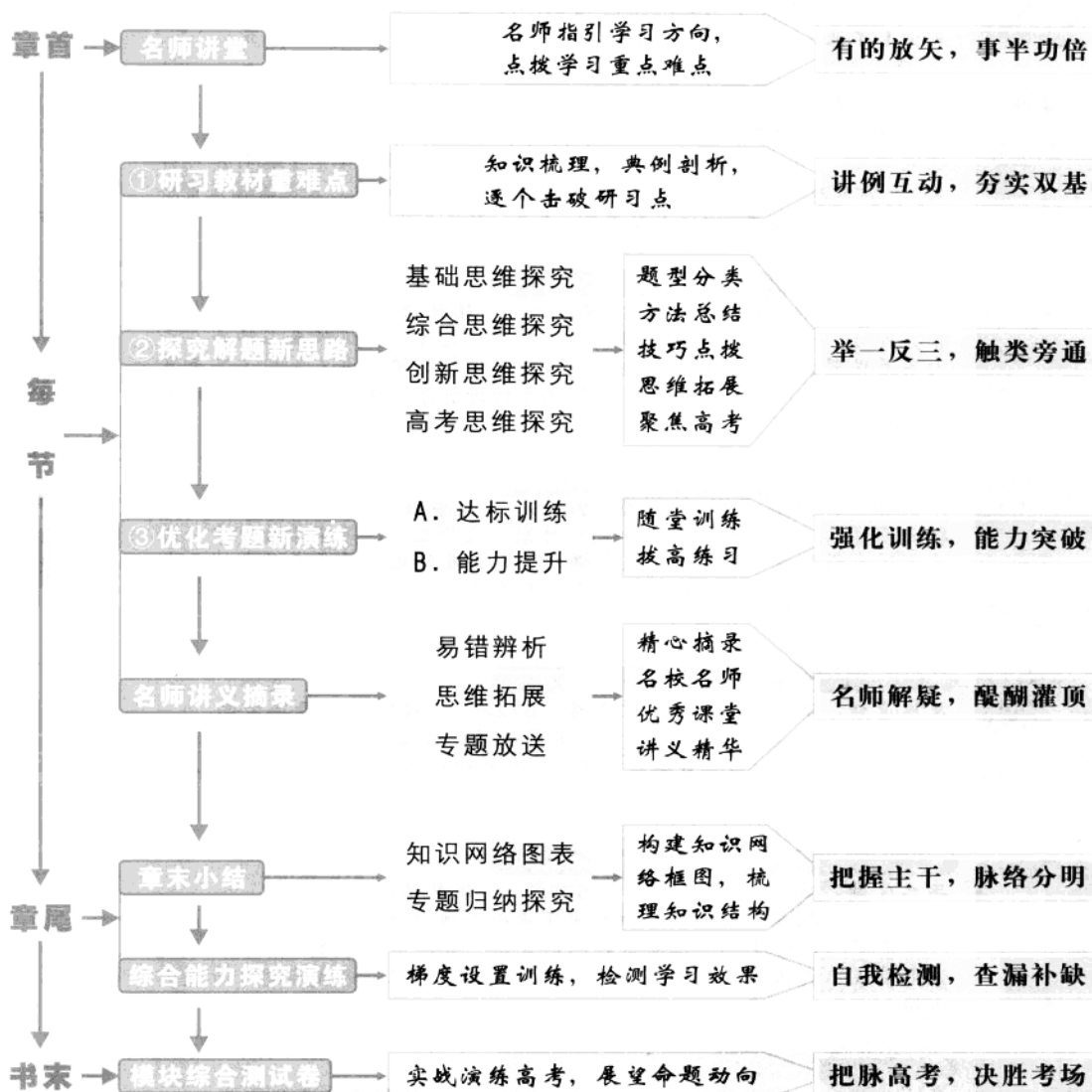
毕业学校：贵阳清华中学 总分：703分 现就读：清华大学

状元寄语：我自信，因为我有天星这张王牌，是她助我在刀光剑影、枪林弹雨的高考战场上所向披靡、战无不胜。感谢天星把我锻造成勇敢而自信的强者！

使用说明

立足教材，引领课标，把脉高考，以同步学习特点为编写基准，从学生学习实际出发，精心摘录名校名师讲义，全面梳理教材重难点，帮助学生构建全面系统的知识网络！

体例优化组合，为您展示名篇精华：



目录

CONTENTS

1 第一章 三角函数

1.1 任意角和弧度制	2
1.1.1 任意角	2
1.1.2 弧度制	7
1.2 任意角的三角函数	12
1.2.1 任意角的三角函数	12
1.2.2 同角三角函数的基本关系	17
1.3 三角函数的诱导公式	22
1.4 三角函数的图象与性质	27
1.4.1 正弦函数、余弦函数的图象	27
1.4.2 正弦函数、余弦函数的性质	27
1.4.3 正切函数的性质与图象	35
1.5 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象	39
1.6 三角函数模型的简单应用	48
章末小结	54
◆综合能力探究演练	55

58 第二章 平面向量

2.1 平面向量的实际背景及基本概念	59
2.2 平面向量的线性运算	64
2.2.1 向量加法运算及其几何意义	64
2.2.2 向量减法运算及其几何意义	64
2.2.3 向量数乘运算及其几何意义	71

2.3 平面向量的基本定理及坐标表示	75
2.3.1 平面向量基本定理	75
2.3.2 平面向量的正交分解及坐标表示	80
2.3.3 平面向量的坐标运算	80
2.3.4 平面向量共线的坐标表示	80
2.4 平面向量的数量积	85
2.4.1 平面向量数量积的物理背景及其含义	85
2.4.2 平面向量数量积的坐标表示、模、夹角	91
2.5 平面向量应用举例	97
章末小结	103
◆综合能力探究演练	104

107 第三章 三角恒等变换

3.1 两角和与差的正弦、余弦和正切公式	108
3.1.1 两角差的余弦公式	108
3.1.2 两角和与差的正弦、余弦、正切公式	108
3.1.3 二倍角的正弦、余弦、正切公式	114
3.2 简单的三角恒等变换	121
章末小结	128
◆综合能力探究演练	130

模块综合测试卷	132
习题答案全解全析	135
教材课后习题答案	160

学习索引

名师讲义摘录

易错辨析

混用角的旋转方向以及角度和弧度	11
忽略角的范围	16
忽略公式 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	21
求三角函数的单调区间时忽略函数中 A 与 ω 的符号	34
忽略正、余弦函数的有界性	34
抓不住图象变换的实质而出错	46
忽略问题的实际意义	53
对实际量的概念把握不准	53
对向量的概念理解不到位	63
对数量积的定义理解不透	90
忽略共线条件	96
求三角函数值时忽略角的范围	113
解题中扩大或缩小角的范围	126

思维拓展

圆心角所对的弧长与半径的比值为常数	11
同角三角函数比较大小问题	21
函数 $y = \sin x$ 的图象到函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ (其中 $A > 0, \omega > 0$) 的图象的变换	46
向量加法的多边形法则	70
巧用性质 $ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq \mathbf{a} \mathbf{b} $, 妙解三类代数题	96
正切半角公式的有理形式	127

专题放送

分角的象限确定法	6
巧用角的关系求值	26
利用向量巧求三角函数值	70
平行四边形法则的应用	79
向量定比分点式的坐标表示	84
直线的方向向量和法向量	102
利用互余关系巧解一类三角函数题	120

第一章

三角函数

名师
讲堂

三角函数是基本初等函数,它是描述周期现象的重要数学模型,在数学和其他领域中都具有重要作用.

本章的重点是:任意角三角函数的定义,同角三角函数的基本关系式,诱导公式,正弦函数的图象与性质,函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象与正弦函数图象的关系;难点是:弧度制的概念,函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换,综合运用公式进行求值、化简和证明.学习时,应注意以下几点:

1. 注意区别一些容易混淆的概念、公式,养成用弧度制表示角的习惯.
2. 三角函数的研究中,借助单位圆的几何直观是非常重要的手段.
3. 在化简、求值、求角以及证明时,注意公式的变形应用(弦切互化、三角代换、消元、变量代换等),同时勿忘讨论角的范围.
4. 对诱导公式的理解,要抓住角的终边的对称性.
5. 注意函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象的变换特征(左加右减,上加下减,只对自变量和因变量).

——清华附中特级教师 郭玉珊

本章参考清华附中、北大附中、雅礼中学、广东省实验中学课堂讲义.

1.1 任意角和弧度制

1.1.1 任意角

2008年北京奥运会,男子体操一扫2004年雅典奥运会的惨淡,再次展示了辉煌.面对着一个个渐行渐远的身影,不该被忘记的将永载体操历史:2002年11月22日,匈牙利德布勒森,第36届世界体操锦标赛,“李小鹏跳”——“腱子后手翻转体180度直体前空翻转体900度”惊为天人;2005年11月23日,第38届世界体操锦标赛,“程菲跳”——“腱子后手翻转体180度接前直空翻540度”惊艳全场.这些响亮的名字一直萦绕在国人的耳边.那么这些体操名中又蕴含着什么意义呢?

1. 研习教材重难点

研习点① 任意角

一条射线由原来的位置 OA ,绕着它的端点 O 按逆时针方向旋转到终止位置 OB ,就形成角 α .旋转开始时的射线 OA 叫做角的始边,射线 OB 叫做角的终边,射线的端点 O 叫做角 α 的顶点.

规定,按逆时针方向旋转形成的角叫做正角(positive angle),按顺时针方向旋转形成的角叫做负角(negative angle),如果一条射线没有作任何旋转就认为它形成了一个零角(zero angle).如图 1-1-1-1 所示,这样,我们就把角的概念推广到了任意角(any angle).

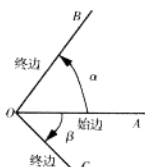


图 1-1-1-1

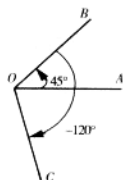


图 1-1-1-2

典例 1 如图 1-1-1-2,射线 OA 绕顶点 O 逆时针旋转 45° 到 OB 位置,并在此基础上顺时针旋转 120° 到达 OC 位置,求 $\angle AOC$.

[研析] 由角的定义可得到 $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC = 45^\circ + (-120^\circ) = -75^\circ$.

研习点② 直角坐标系中角的分类

1. 象限角

在直角坐标系中,若角的顶点在原点,角的始边与 x 轴的非负半轴重合,那么,角的终边在第几象限,便称此角为第几象限角(quadrant angle).

注意:(1)如果角的顶点不与坐标原点重合,或者角的始

边不与 x 轴的非负半轴重合,则不能判断角在哪个象限,也就不能称为象限角.

(2)如果角的终边在坐标轴上,则这个角不属于任何象限.

2. 终边相同的角

一般地,若角 α, β 终边相同,则它们的关系为:将角 α 终边旋转(逆时针或顺时针) $k(k \in \mathbf{Z})$ 周即得角 β .所有与角 α 终边相同的角,连同角 α 在内,可构成一个集合 $S = \{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$,即任一个与角 α 终边相同的角,都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

注意:(1)终边相同的角不一定相等,但相等的角的终边一定相同;(2)终边相同的角有无数个,它们相差 360° 的整数倍.为了方便,经常使角 α 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 之间,因此求终边相同的角,可用此角减去 360° 的整数倍,使差在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 之间.

归纳总结

象限角的表示

根据终边相同的角的表达式,终边在第一象限的角为 $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + \beta, 0^\circ < \beta < 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$,将不等式 $0^\circ < \beta < 90^\circ$ 的两边同时加 $k \cdot 360^\circ$,可得终边在第一象限的角的表示为 $\{\alpha | k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

同理,终边在第二象限的角为 $\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$;

终边在第三象限的角为 $\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 180^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$;

终边在第四象限的角为 $\{\alpha | k \cdot 360^\circ - 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

典例 2 在直角坐标系中,作出下列各角,并指出它们是第几象限角:

(1) 240° ; (2) 300° ; (3) 420° ; (4) 480° .

母爱,像一首田园诗,幽远纯净、和雅清淡;母爱,像一幅山水画,洗去浮华雕饰,留下清新自然;母爱,像一场春雨,润物无声;母爱,像一首情歌,绵长悠远。
——河南新蔡县第一高级中学高一 8 班 李娜娜



[研析] 在直角坐标系中,作出以上各角,如下所示.

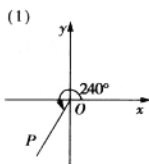


图 1-1-1-3

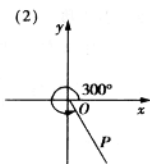


图 1-1-1-4

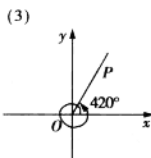


图 1-1-1-5

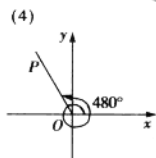


图 1-1-1-6

由图可知:(1)240°角是第三象限角;(2)300°角是第四象限角;(3)420°角是第一象限角;(4)480°角是第二象限角.

2. 探究解题新思路

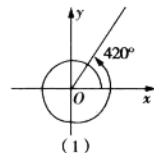
思维探究

题型一 象限角的判定

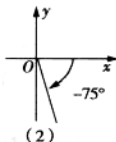
典例1 已知角的顶点与坐标原点重合,始边落在 x 轴的非负半轴上,作出下列各角,并指出它们是第几象限角,且指出在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内与其终边相同的角.

(1) 420° ; (2) -75° ; (3) 855° ; (4) -510° .

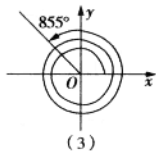
[研析] 作出各角的终边如图 1-1-1-7 所示:



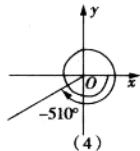
(1)



(2)



(3)



(4)

图 1-1-1-7

由图可知:

(1) 420° 是第一象限角;在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内, 60° 角与其终边相同.

(2) -75° 是第四象限角;在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内, 285° 角与其终边相同.

(3) 855° 是第二象限角;在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内, 135° 角与其终边相同.

(4) -510° 是第三象限角;在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内, 210° 角与其终边相同.

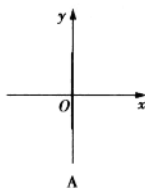
技巧点拨 象限角的判定有两种方法:一是根据图象,二是将角转化到 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内,利用图象实际操作时,依据的还是终边相同的角的思想.为什么转化到 $0^\circ \sim 360^\circ$ 之间就可以判定呢?那是因为 $0^\circ \sim 360^\circ$ 之间的角与坐标系中的射线可建立一一对应的关系,也就是说在直角坐标系内,在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 之间没有两个角终边是相同的.

变式·拓展1 在直角坐标系中,作出下列各角;在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内,找出与其终边相同的角,并判定它是第几象限角.

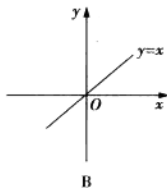
(1) 360° ; (2) 720° ; (3) 1080° ; (4) 1440° .

题型二 终边相同的角的表示

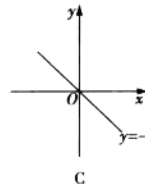
典例2 写出终边在图 1-1-1-8 所示直线上的角的集合.



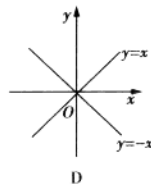
A



B



C



D

图 1-1-1-8

[研析] $A: S = \{ \alpha \mid \alpha = 90^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z} \}$;

$$B; S = \{ \alpha | \alpha = 45^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z} \};$$

$$C; S = \{ \alpha | \alpha = 135^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z} \};$$

$$\text{对于 } D; S = \{ \alpha | \alpha = 45^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z} \} \cup \{ \alpha | \alpha = 135^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z} \},$$

$$\text{即 } S = \{ \alpha | \alpha = 45^\circ + 2k \cdot 90^\circ, k \in \mathbf{Z} \} \cup \{ \alpha | \alpha = 45^\circ + (2k + 1) \cdot 90^\circ, k \in \mathbf{Z} \} = \{ \alpha | \alpha = 45^\circ + k \cdot 90^\circ, k \in \mathbf{Z} \}.$$

领悟整合 正确写出终边在题图所示直线上的角的集合除了要掌握终边相同的角的表示方法外,还必须熟练地进行集合的合并.由本题还可得出的结论便是“终边在直线上的角的周期为 180° ,而终边在互相垂直的两条直线上的角的周期为 90° .”

变式·拓展2 试写出终边在图1-1-1-9所示直线上的角的集合.

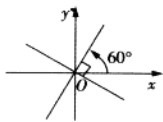


图1-1-1-9

综合思维探究

典例3 已知角 α 的终边在图1-1-1-10中阴影部分内,试指出角 α 的取值范围.

[研析] 终边在 30° 角的终边所在直线上的角的集合为 $S_1 = \{ \alpha | \alpha = 30^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z} \}$,终边在 $180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$ 角的终边所在直线上的角的集合为 $S_2 = \{ \alpha | \alpha = 105^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z} \}$,因此,终边在图中阴影部分内的角 α 的取值范围为 $\{ \alpha | 30^\circ + k \cdot 180^\circ \leq \alpha < 105^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z} \}$.

技巧点拨 对于探求角的取值范围的问题,可以先确定终边为“边界”的角的集合,最后再合成;另外,要注意虚线和实线的差别.

变式·拓展3 写出终边在如图1-1-1-11所示阴影部分内的角 α 的取值范围.

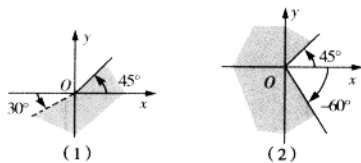


图1-1-1-11

典例4 (实际应用题) 经过5小时25分钟,时钟的分针和时针各转了多少度?

[研析] 时针转一周共需12小时,即12小时转过 -360° ,则时针每小时转 $\frac{-360^\circ}{12} = -30^\circ$,而5小时25分钟= $\frac{65}{12}$ 小时,从而时针转动的角度为 $\frac{65}{12} \times (-30^\circ) = -162.5^\circ$.

分针走一周共需1小时,即1小时转过 -360° ,则分针转动的角度为 $\frac{65}{12} \times (-360^\circ) = -1950^\circ$.

技巧点拨 时钟问题常常作为考查任意角的背景.要注意钟表的刻度上每一小时为 30° ,每一分钟为 6° ,可以证明分针转的速度是时针转的速度的 $\frac{360}{30} = 12$ 倍,秒针转的速度是分针转的速度的 $\frac{360}{6} = 60$ 倍.

变式·拓展4 点A在以原点为圆心的圆周上按逆时针方向作匀速圆周运动.已知点A从x轴正半轴出发一分钟后转过 θ ($0^\circ < \theta < 180^\circ$)角,2分钟后到达第三象限,14分钟后返回出发的位置,则 $\theta =$ _____.

创新思维探究

典例5 如图1-1-1-12,一只红蚂蚁与一只黑蚂蚁在一个半径为1的圆上爬动,若两只蚂蚁均从点A(1,0)同时逆时针匀速爬动,若红蚂蚁每秒爬过 α 角,黑蚂蚁每秒爬过 β 角(其中 $0^\circ < \alpha < \beta < 180^\circ$),如果两只蚂蚁都在第14秒时回到A点,并且在第2秒时均位于第二象限,求 α, β 的值.

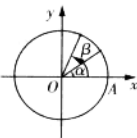


图1-1-1-12

[研析] 根据题意可知: $14\alpha, 14\beta$ 均为 360° 的整数倍,故可设 $14\alpha = m \cdot 360^\circ, m \in \mathbf{Z}, 14\beta = n \cdot 360^\circ, n \in \mathbf{Z}$.从而可知 $\alpha = \frac{m}{7} \cdot 180^\circ, \beta = \frac{n}{7} \cdot 180^\circ, m, n \in \mathbf{Z}$,

又两只蚂蚁在第2秒时均位于第二象限, $\therefore 2\alpha, 2\beta$ 的终边在第二象限,又 $0^\circ < \alpha < \beta < 180^\circ$,故 $90^\circ < 2\alpha < 2\beta < 180^\circ$.于是 $45^\circ < \alpha < 90^\circ, 45^\circ < \beta < 90^\circ$.

$$\therefore 45^\circ < \frac{m}{7} \cdot 180^\circ < 90^\circ, 45^\circ < \frac{n}{7} \cdot 180^\circ < 90^\circ, \text{即 } \frac{7}{4} < m < \frac{7}{2}, \frac{7}{4} < n < \frac{7}{2},$$

$$\text{又 } \alpha < \beta, \therefore m < n, \text{从而可得 } m = 2, n = 3. \text{即 } \alpha = \left(\frac{360}{7}\right)^\circ, \beta = \left(\frac{540}{7}\right)^\circ.$$

领悟整合 题目的设计比较巧妙,以有趣的题目背景来考查角所在象限的确定,角的旋转等问题,此类题目要善于从题目中提取数学信息,应用相关知识实现问题的转化.

思维探究

《普通高中数学课程标准(实验)》(以下简称《课程标准》)对本节的要求是:结合具体实例,认识角的概念推广的必要性;初步学会在平面直角坐标系中讨论角,并能熟练写出与

已知角终边相同的角的集合.

本节知识是整个三角知识的基础,高考中单独考查此部分知识的试题较少,但综合其他知识,如三角函数符号的确定就会考查象限角等有关知识.因此,本节知识的基础性不可轻视.

3. 优化考题新演练

A 达标训练

- 与 -460° 终边相同的角的集合为 ()
 - $\{\theta | \theta = 460^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$
 - $\{\theta | \theta = 100^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$
 - $\{\theta | \theta = 260^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$
 - $\{\theta | \theta = -260^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$
- 若 α 是第一象限角,则下列各角中是第四象限角的是 ()
 - $90^\circ - \alpha$
 - $90^\circ + \alpha$
 - $360^\circ - \alpha$
 - $180^\circ + \alpha$
- 若 α 与 β 的终边互为反向延长线,则有 ()
 - $\alpha = \beta + 180^\circ$
 - $\alpha = \beta - 180^\circ$
 - $\alpha = -\beta$
 - $\alpha = \beta + (2k+1) \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}$
- 已知 $M_1 = \{\text{第一象限角}\}, M_2 = \{\text{锐角}\}, M_3 = \{0^\circ \sim 90^\circ \text{的角}\}, M_4 = \{\text{小于 } 90^\circ \text{的角}\}$,则下面结论正确的是 ()
 - $M_1 = M_2 = M_3 = M_4$
 - $M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq M_4$
 - $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq M_4$
 - $M_2 \subseteq M_3$ 且 $M_2 \subseteq M_4$
- 与 -1060° 终边相同的最小正角是_____.
- 判断下列角是第几象限角,并在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内找出与其终边相同的角.
 - 549° ;
 - -60° ;
 - $-503^\circ 36'$.

- 写出与下列各角终边相同的角的集合 S , 并把 S 中适合不等式 $-360^\circ \leq \alpha \leq 720^\circ$ 的元素 α 写出来:

(1) 60° ; (2) -21° ; (3) $363^\circ 14'$.

- 试写出终边在直线 $y = -\sqrt{3}x$ 上的角的集合 S , 并把 S 中适合不等式 $-180^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ 的元素 α 写出来.

B 能力提升

- 若角 θ 的终边与 168° 角的终边相同,则在 $[0^\circ, 360^\circ]$ 内终边与角 $\frac{\theta}{3}$ 的终边相同的角可以是_____ (至少写出两个).
- (1) 当 12 点过 $\frac{1}{4}$ 小时的时候,时钟分针与时针的夹角是_____.
- (2) 时针走过 2 小时 40 分,则分针转过的角度是_____.
- 写出终边在如图 1-1-13 所示阴影部分内的角的集合.

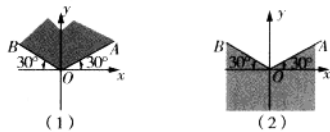


图 1-1-13

名师讲义摘录



分角的象限确定法

分角的象限确定往往是一个难点,常用的方法是先利用不等式的性质,再进行分类讨论.

典例 若 α 是第二象限角,则 $\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角?

[研析] 对象限角进行和、差、倍、分运算,要注意运用不等式的性质,结果是哪个象限的角,要进行讨论.

因为 $k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $45^\circ + k \cdot 180^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ + k \cdot 180^\circ$.

当 k 为偶数,即 $k = 2n (n \in \mathbf{Z})$ 时,有 $45^\circ + n \cdot 360^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ + n \cdot 360^\circ$, 这时 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限角;

当 k 为奇数,即 $k = 2n + 1 (n \in \mathbf{Z})$ 时,有 $225^\circ + n \cdot 360^\circ < \frac{\alpha}{2} < 270^\circ + n \cdot 360^\circ$, 这时 $\frac{\alpha}{2}$ 是第三象限角.

所以 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限角或第三象限角. 其终边变化区域如图 1-1-1-14 中阴影部分所示(不包括边界).

由上面讨论可知,在确定了 $\frac{\alpha}{2}$ 的范围以后,偶数可以取 0, 奇数可以取 1, 这样便可快速判断它是第几象限角. 当然本题还可作进一步的探讨, 下面介绍一种行之有效的方法.

首先来看如何根据 α 终边所在象限判断 $\frac{\alpha}{2}$ 终边所在象限.

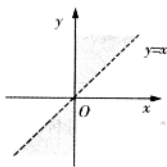


图 1-1-1-14

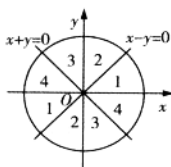


图 1-1-1-15

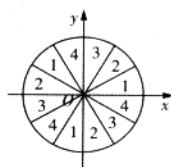


图 1-1-1-16

先画一圆,如图 1-1-1-15 所示,图中直线 $x \pm y = 0$ 与坐标轴将以原点为顶点, x 轴的非负半轴为始边的周角分成 8 等份. 数字 1, 2, 3, 4 表示角 α 终边所在象限,按逆时针方向分别在区域内填上 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 从而数字所在的区域表示 $\frac{\alpha}{2}$ 终边所在区域. 例如:若 α 是第一象限角,则 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第一、三象限的“1”区域内;若 α 是第二象限角,则 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第一、三象限的“2”区域内.

用同样的方法,可继续探求 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边所在象限,此时将每个象限三等分,逆时针方向分别编上 1, 2, 3, 4 的象限号,如图 1-1-1-16 所示,若 α 是第二象限的角,则 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边在图 1-1-1-16 中标号为“2”的区域. 用同样的方法还可以确定 $\frac{\alpha}{n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 的终边所在的区域,即将单位圆每一个象限 n 等分,逆时针方向依次循环标注 1, 2, 3, 4. 同样的方法还可以确定倍角的象限和范围. 在后面的学习过程中,我们会真正地体会到这种方法所带来的便捷.



母爱无处不在,我们时时刻刻都在感受着.有时母亲会表现出“恨铁不成钢”的态度,请不要埋怨她,因为她实在是大爱我们了.

——福建省龙海市第二中学高一6班 陈钟杰

互动空间

1.1.2 弧度制

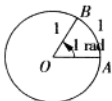
上赛季,小巨人姚明率领的火箭队终于在12年后突破了季后赛第一轮!甚至在半决赛中差点掀翻高傲的湖人。姚明在选秀时,NBA官方将姚明的身高登记为7英尺5.5英寸,换算为227厘米,此高度是姚明在NBA体检时所量。对同样一个身高问题,度量单位有英制和公制之分,那么角是否也有多种度量制呢?

1. 研习教材重难点

研习点① 弧度制的定义

在初中我们学过角度制 (degree measure): 规定周角为 360° , 周角的 $\frac{1}{360}$ 为 1° 的角。

数学上还采用另外一种度量角的单位制——弧度制 (radian measure): 把在单位圆中长为1个单位的弧所对的圆心角称为1弧度的角。它的单位符号是 rad, 读作弧度 (radian)。如图 1-1-2-1 所示, $\angle AOB$ 是 1 rad 图 1-1-2-1 的角。



典例1 下列叙述中,正确的是

- A. 1 弧度是 1 度的圆心角所对的弧
- B. 1 弧度是长度为半径的弧
- C. 1 弧度是 1 度的弧与 1 度的角之和
- D. 1 弧度是长度等于半径长的弧所对的圆心角,它是角的一种度量单位

[辨析] 由定义可知,长度等于半径长的弧所对的圆心角为 1 弧度的角。因此 D 叙述正确。故应选 D。事实上,弧度与圆的半径无关,仅与角的大小有关。

研习点② 角度与弧度的换算

一般地,正角的弧度数是一个正数,负角的弧度数是一个负数,零角的弧度数是 0。如果半径为 r 的圆的圆心角 α 所对的弧长为 l ,那么,角 α 的弧度数的绝对值是 $|\alpha| = \frac{l}{r}$ 。这里, α 的正负由角 α 的终边的旋转方向决定。

度数与弧度数的换算公式为: $\alpha (\text{rad}) = \left(\frac{180\alpha}{\pi}\right)^\circ, n^\circ =$

$$\frac{n\pi}{180} \text{ rad}.$$

按上述换算关系,可得以下一些特殊角的度数与弧度数的对应值:

角度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
角度	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°	
弧度	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π	

对于换算,最核心的是 $180^\circ = \pi \text{ rad}$, 掌握了这个换算关系,其他都容易得出。

说明:(1)用弧度制表示角的时候,“弧度”或“rad”经常省略,即只写一实数表示角的度量。

(2)角的弧度数为一个实数。

归纳总结

弧度制建立的意义

1. 弧度制把角的大小与实数一一对应起来。实数是十进制的,而角度(度、分、秒)则是六十进制的,因此无法建立直接的对应关系。弧度制是把角度制的六十进制化成了十进制,这样每一个角都有一个实数(弧度数)与它对应;反过来,每一个实数也都有一个角(角的弧度数等于这个实数)与它对应。如图 1-1-2-2 所示。

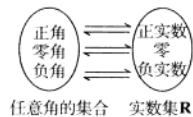


图 1-1-2-2

2. 引入弧度制之后,统一了角度与长度的单位,有助于某些数学问题的表示和研究,如在弧度制下的弧长和面积公式便十分简洁:在角度制下 n° 的弧长公式 $l = \frac{n\pi R}{180}$,但在弧度制下则为 $l = \alpha R$;相对应地,扇形的面积公式则为 $S = \frac{1}{2}\alpha R^2$ 。

互动空间

母亲对儿女的爱是无私的,我们走到哪里,母爱就会追寻到哪里,母亲对我们的爱像大海,宽广、深沉、厚重、稳固、永恒。

——河南洛阳市汝阳县第一高级中学高一3班 杨世杰



典例2 将下列角度与弧度进行互化:

$$(1) 20^\circ; \quad (2) -15^\circ; \quad (3) \frac{7\pi}{12}; \quad (4) -\frac{11\pi}{5}.$$

[研析] (1) $20^\circ = \frac{20}{180}\pi = \frac{\pi}{9}$;

(2) $-15^\circ = -\frac{15}{180}\pi = -\frac{\pi}{12}$;

(3) $\frac{7\pi}{12} = (\frac{180}{\pi} \times \frac{7\pi}{12})^\circ = \frac{7}{12} \times 180^\circ = 7 \times 15^\circ = 105^\circ$;

$$(4) -\frac{11\pi}{5} = (-\frac{11\pi}{5} \times \frac{180}{\pi})^\circ = -\frac{11}{5} \times 180^\circ = -396^\circ.$$

典例3 求下列各式的值: (1) $\cos \frac{\pi}{4}$; (2) $\tan \frac{\pi}{6}$.

[研析] (1) $\cos \frac{\pi}{4} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

(2) $\tan \frac{\pi}{6} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2 探究解题新思路



思维探究

题型一 弧度和角度的互化

典例1 已知 $\alpha_1 = -570^\circ, \alpha_2 = 750^\circ; \beta_1 = \frac{3\pi}{5}, \beta_2 = -\frac{\pi}{3}$.

(1) 将 α_1, α_2 用弧度表示出来, 并指出它们是第几象限角;

(2) 将 β_1, β_2 用角度表示出来, 并在 $-720^\circ \sim 0^\circ$ 之间找出与它们有相同终边的所有角.

[研析] 利用公式 $180^\circ = \pi \text{ rad}$ 实现角度和弧度的互化.

(1) $\because 180^\circ = \pi \text{ rad}$,

$$\therefore -570^\circ = -\frac{570}{180}\pi = -\frac{19}{6}\pi,$$

$$\therefore \alpha_1 = -\frac{19}{6}\pi = -2 \times 2\pi + \frac{5}{6}\pi,$$

同理, $\alpha_2 = 750^\circ = \frac{750}{180}\pi = \frac{25}{6}\pi = 2 \times 2\pi + \frac{\pi}{6}$.

$\therefore \alpha_1$ 是第二象限角, α_2 是第一象限角.

(2) $\beta_1 = \frac{3\pi}{5} = \frac{3}{5} \times 180^\circ = 108^\circ$,

设 $\theta = k \cdot 360^\circ + 108^\circ (k \in \mathbf{Z})$,

则由 $-720^\circ \leq \theta < 0^\circ$ 得 $-720^\circ \leq k \cdot 360^\circ + 108^\circ < 0^\circ (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $k = -2$ 或 $k = -1$,

\therefore 在 $-720^\circ \sim 0^\circ$ 之间与 β_1 有相同终边的角是 -612° 和 -252° ;

$$\beta_2 = -\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{3} \times 180^\circ = -60^\circ,$$

设 $\gamma = k \cdot 360^\circ - 60^\circ (k \in \mathbf{Z})$, 则由 $-720^\circ \leq k \cdot 360^\circ - 60^\circ < 0^\circ (k \in \mathbf{Z})$, 得 $k = -1$ 或 $k = 0$,

\therefore 在 $-720^\circ \sim 0^\circ$ 之间与 β_2 有相同终边的角是 -420° .

技巧点拨 快速准确地实现角度和弧度的互化在今后的学习中是必要的, 而实现这两者之间互化的桥梁就是 $180^\circ = \pi \text{ rad}$.

变式·拓展1 (1) 用弧度表示终边落在 x 轴的非正、非负半轴上, y 轴的非正、非负半轴上, x 轴上, y 轴上的角的集合:

(2) 用弧度表示第一、二、三、四象限角的集合.

题型二 弧长公式与扇形面积公式的应用

典例2 如图1-1-2-3是某公路

的弯道处, 试求弧 AB 的长 (精确到1 m, 图中长度单位为:m).

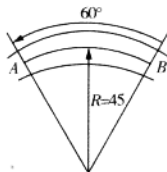


图1-1-2-3

[研析] $\because \alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$,

$$\therefore l = \alpha R = \frac{\pi}{3} \times 45 \approx 47,$$

故弯道处弧 AB 的长约为 47 m.

领悟整合 有关弧长公式和扇形面积公式的应用的题目一般较容易, 通过例题进一步体会用弧度制表示这两个公式的方便与简洁.

变式·拓展2 已知扇形的周长为 20 cm, 当它的半径和圆心角各取什么值时, 才能使扇形的面积最大? 最大面积是多少?



母亲只是一朵康乃馨, 但我们也只是花蕾中的花粉, 需要花蕾的呵护. 母爱是在生活中琐碎的小事中表现出来的, 虽然看不到, 但是却感受得到.

——广东梅州市棉洋中学高一1班 刘育平

互动空间